BURHAN

Résumé : Limites, continuité et fonctions réciproques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/resume

Chapitre	Semestre
Limites, continuité et fonctions réciproques	Semestre 1

Continuité en un point, prolongement

> **À retenir : À avoir sous les yeux**
>
> Continuité en a : $f(a)$ existe, la limite de f en a existe **et** les deux sont égales. Si l'une de ces trois conditions manque, f n'est pas continue en a.

Définition : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition : Continuité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a, a+h[$ avec $h > 0$, on dit que f est **continue à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-h, a]$ avec $h > 0$, on dit que f est **continue à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Propriété : Continuité et continuité latérale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Méthode : Point de raccordement ou borne : la démarche

1. Calcule $f(a)$ avec la ligne de l'accolade qui contient a.
2. De chaque côté de a où f est définie, prends la ligne valable de ce côté et calcule la limite latérale. Si l'expression oscille, par exemple avec $\sin \dfrac{1}{x}$, coince-la entre deux fonctions qui ont la même limite : c'est le théorème d'encadrement.

3. Compare chaque résultat à $f(a)$: l'égalité à droite donne la continuité à droite, l'égalité à gauche la continuité à gauche.
4. Les deux égalités réunies donnent la continuité en a. Écris-les avant de conclure.

Exemple : Mini-exemple

Soit k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour $x > 0$, le sinus est compris entre -1 et 1, donc :

$$-\sqrt{x} \leq k(x) \leq \sqrt{x}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 quand x tend vers 0^+. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = 0 = k(0)$: k est continue à droite en 0.

Propriété : Prolongement par continuité

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a. On l'appelle le **prolongement par continuité de f en a**.

Attention : Quand on ne peut pas prolonger

Prolonger demande une limite **réelle** en a. Une limite infinie, ou deux limites latérales différentes, rendent tout prolongement par continuité impossible.

Continuité sur un intervalle

Définition : Continuité sur un intervalle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- f est **continue sur** $]a, b[$ lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$.
- f est **continue sur** $[a, b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

On définit de même la continuité sur $[a, b[$, sur $]a, b]$ et sur les intervalles non bornés.

Propriété : Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Propriété : Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel.

- Les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Propriété : Continuité d'une composée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

En un point : si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Méthode : Justifier une continuité, étage par étage

Lis l'expression de l'intérieur vers l'extérieur. À chaque étage, nomme ton outil : fonction usuelle, opération (somme, produit, quotient, racine carrée) ou composée. Deux vérifications ne se sautent jamais : le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle, et ce qui est sous une racine carrée y reste positif.

Exemple : Mini-exemple

La fonction $u : x \mapsto 3 + \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $u(x) \geq 2 > 0$.

La racine carrée étant continue sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \sqrt{3 + \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition.

Limite d'une fonction composée

Théorème : Limite d'une fonction composée

Soit u et f deux fonctions, et a, b, ℓ des réels ou $\pm\infty$. On suppose que $f \circ u$ est définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f\big(u(x)\big) = \ell$.

Lorsque b est un réel, on suppose de plus que $u(x) \neq b$ pour tout x assez proche de a (et différent de a si a est réel), ou que f est continue en b (et alors $\ell = f(b)$).

Le résultat reste vrai pour des limites à droite ou à gauche.

Méthode : Rédiger une limite par composition

1. Sépare l'expression en deux étages : une fonction u à l'intérieur, une fonction f à l'extérieur.
2. Cherche la limite b de $u(x)$ quand x tend vers a.
3. Cherche la limite de $f(y)$ quand y tend vers b. Si b est un réel, contrôle que f est continue en b, ou bien que $u(x) \neq b$ près de a.
4. Cite les deux limites, puis écris « par composition » et la conclusion.

Exemple : Mini-exemple

Pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{3x+1}\right)$: le quotient tend vers $\dfrac{\pi}{3}$ en $+\infty$, et $\cos$ est continue en $\dfrac{\pi}{3}$. Par composition, la limite vaut :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Remarque : Changement de variable

Poser $X = u(x)$ n'est pas une nouvelle règle : c'est le même théorème, écrit autrement. Par exemple, poser $X = \dfrac{1}{x}$ transforme une limite en $+\infty$ en une limite en 0^+.

Valeurs intermédiaires, unicité, dichotomie

Théorème : Image d'un intervalle, d'un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

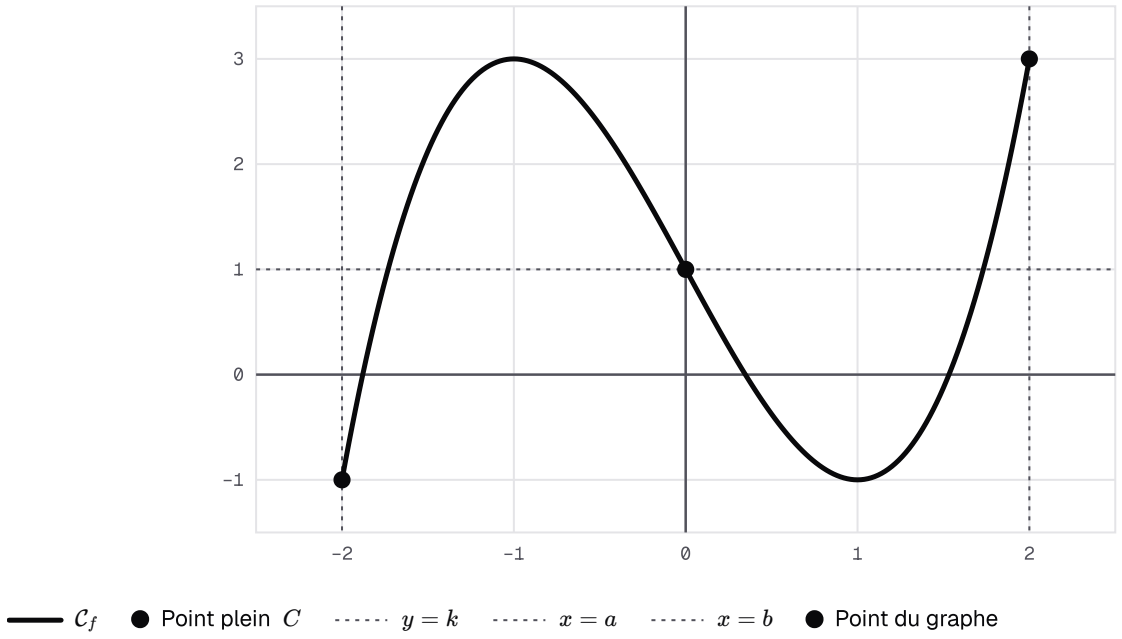
- L'image $f(I)$ de l'intervalle I est un intervalle.

- Si $I = [a, b]$ est un segment, $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Une fonction continue sur [a, b] : la droite y = k, prise entre f(a) et f(b), rencontre ici la courbe trois fois, dont au point C.

Propriété : Unicité par stricte monotonie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a, b[$.

Méthode : Une seule solution : la rédaction attendue

1. Nomme la fonction f telle que l'équation s'écrive $f(x) = 0$, et l'intervalle $[a, b]$.
2. Établis trois faits, chacun avec sa raison : f est continue sur $[a, b]$; f y est strictement monotone ; $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
3. Conclus en nommant le théorème : « f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, et $f(a) \times f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a, b[$. »

4. Pour situer α plus finement sans calculatrice, prends un réel c de $]a, b[$ et trouve le signe de $f(c)$ à la main ou avec la valeur fournie par l'énoncé. Si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires, alors $a < \alpha < c$; sinon, $c \leq \alpha < b$.

Attention : Au moins une, ou une seule ?

Le théorème des valeurs intermédiaires seul donne l'existence, pas l'unicité : il faut un argument de plus, le plus souvent la stricte monotonie.

Sans continuité sur tout le segment, il ne donne rien : justifie-la avant de regarder les signes.

Enfin, sans monotonie, l'image de $[a, b]$ n'est pas forcément l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$: cherche le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.

Méthode : Dichotomie

À chaque étape, coupe l'intervalle en son milieu m, regarde le signe de $f(m)$ et garde la moitié aux bornes de laquelle f change de signe. L'amplitude est divisée par 2 à chaque étape.

Milieu $m = \dfrac{a+b}{2}$	On garde la moitié gauche si $f(a) \times f(m) < 0$
On garde la moitié droite si $f(m) \times f(b) < 0$	Amplitude après n étapes $\dfrac{b-a}{2^n}$

Exemple : Mini-exemple

La fonction $w : x \mapsto x^3 + 2x - 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $w(0) = -2$ et $w(1) = 1$: l'équation $w(x) = 0$ a une seule solution α dans $]0, 1[$.

- $w(0{,}5) = -0{,}875 < 0$, donc $0{,}5 < \alpha < 1$.
- $w(0{,}75) = -0{,}078125 < 0$, donc $0{,}75 < \alpha < 1$.

Après deux étapes, l'amplitude vaut $\dfrac{1}{4}$.

Bijection et fonction réciproque

Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$, a et b éventuellement infinis pour un intervalle ouvert de ce côté).

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$

Les limites aux bornes ouvertes existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; une borne infinie de $f(I)$ est alors ouverte.

Théorème : Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors J est un intervalle et f est une **bijection** de I sur J : pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

La **fonction réciproque** de f, notée f^{-1}, est la fonction définie sur J qui associe à chaque $x \in J$ l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$. Ainsi :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

En particulier, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in I$, et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ pour tout $y \in J$.

Méthode : Bijection, puis expression de la réciproque

1. Vérifie les deux hypothèses sur l'intervalle I : continuité et stricte monotonie.
2. Calcule $J = f(I)$ avec le tableau des images : une valeur pour une borne fermée, une limite pour une borne ouverte.
3. Conclus en nommant le théorème : « d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J ».
4. Pour écrire f^{-1}, fixe $x \in J$ et résous $f(y) = x$ avec $y \in I$. Écarte toute solution qui sort de I.

Exemple : Mini-exemple

Sur $I = [1, +\infty[$, la fonction $s : x \mapsto (x-1)^2 - 1$ est continue et strictement croissante. On a $s(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$, donc $J = [-1, +\infty[$.

Soit $x \in J$. L'équation $s(y) = x$, d'inconnue $y \in I$, s'écrit $(y-1)^2 = x + 1$. Comme $y - 1 \geq 0$, elle équivaut à $y - 1 = \sqrt{x+1}$. Ainsi, pour tout $x \in J$:

$$s^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}.$$

Attention : Réciproque ou inverse ?

f^{-1} n'est pas $\dfrac{1}{f}$: on l'obtient en résolvant une équation, pas en renversant une fraction. Et f^{-1} est définie sur J, pas sur I.

Propriété : Variations et courbe de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.
2. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

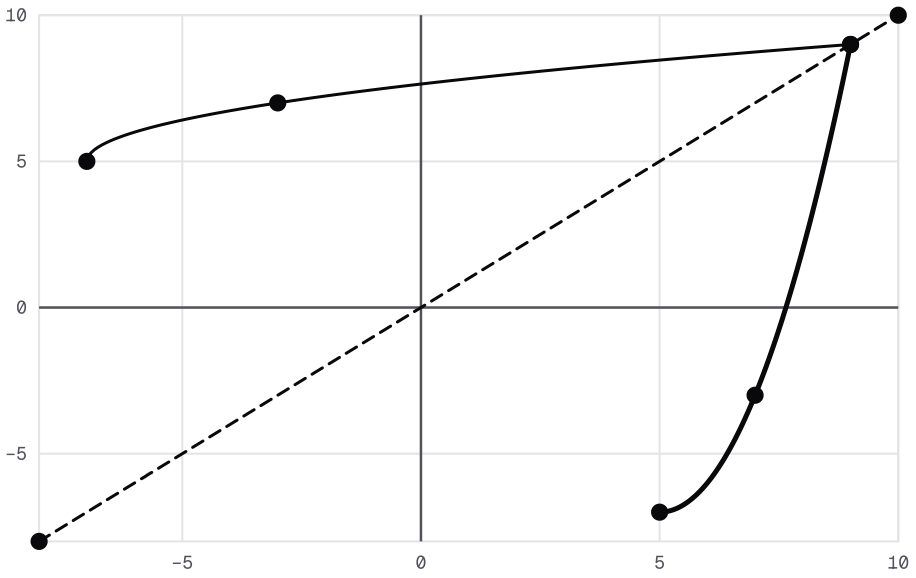
Propriété : Continuité de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors la fonction f^{-1} est continue sur J.

À retenir : Lire la courbe de la réciproque

En repère orthonormé, le point (p, q) est sur la courbe de f exactement quand le point (q, p) est sur celle de f^{-1}. On trace donc la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Un arc de parabole et son image par la symétrie d'axe y = x : le point (p, q) d'une courbe devient le point (q, p) de l'autre.

Racines n-ièmes et puissances rationnelles

Définition : Racine n-ième

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et son image est $[0, +\infty[$: d'après le théorème de la bijection (F16), elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction racine n-ième** et notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Produit de racines

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

Racine d'une racine

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$$

Puissance d'une racine

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

Puissance rationnelle, pour x strictement positif

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Produit de puissances

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

Puissance d'une puissance

$$\left(x^r\right)^{r'} = x^{rr'}$$

Exposant opposé

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

À retenir : Domaine à vérifier d'abord

Ici, $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens que pour $x \geq 0$, et x^r avec r non entier que pour $x > 0$. Les règles de la grille s'emploient dans ce cadre.

Propriété : Équation $x^n = a$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et a un réel. Dans $\mathbb{R}$:

- si n est **impair**, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $\sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$, et $-\sqrt[n]{-a}$ si $a < 0$;
- si n est **pair** : pour $a > 0$, elle admet exactement deux solutions, $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$; pour $a = 0$, l'unique solution est 0 ; pour $a < 0$, elle n'admet aucune solution.

Exemple : Mini-exemples

- $x^5 = -32$ a pour unique solution $-\sqrt[5]{32} = -2$.
- $x^4 = 81$ a deux solutions : 3 et -3.
- $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9$.

Méthode : Indétermination avec une racine n-ième

1. En $+\infty$, sors le terme dominant de la racine : pour $x > 0$ et $v \geq 0$, $\sqrt[n]{x^n v} = x\sqrt[n]{v}$.
2. Pour une différence de racines, multiplie par la « conjuguée » construite sur $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$, ou sur son analogue de degré n.
3. Si cela simplifie, écris $\sqrt[n]{x^p}$ sous la forme $x^{\frac{p}{n}}$ pour $x > 0$. Termine avec la continuité des racines et les opérations sur les limites.

Exemple : Mini-exemple

Pour $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$, pose $A = \sqrt[3]{x+8}$, pour $x \geq -8$. Alors $A^3 - 8 = x$, donc pour $x \neq 0$:

$$\frac{A-2}{x} = \frac{1}{A^2 + 2A + 4}.$$

Par continuité de la racine cubique en 8, A tend vers 2 : la limite vaut $\dfrac{1}{12}$.

Fonction arctangente

Définition : Fonction arctangente

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et son image est $\mathbb{R}$: d'après le théorème de la bijection (F16), elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction arctangente** et notée $\arctan$; elle est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x et tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y = \arctan x \iff \tan y = x.$$

Propriété : Propriétés de la fonction arctangente

- La fonction $\arctan$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout réel x : $\arctan(-x) = -\arctan x$ et $\tan(\arctan x) = x$.
- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\arctan(\tan x) = x$.
- $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Variations de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$

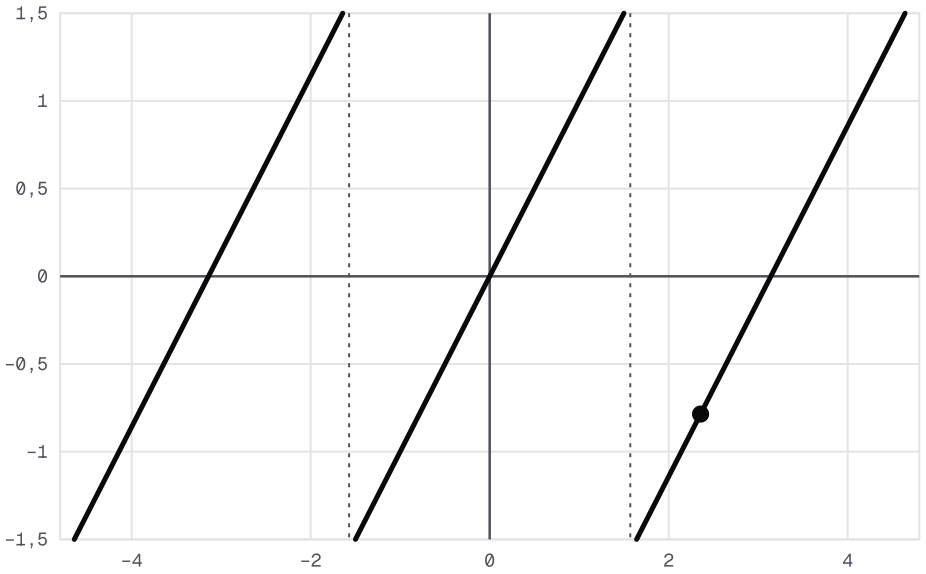
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

Méthode : Prouver une égalité d'arctangentes

1. Appelle θ le nombre qui doit valoir $\arctan x$.
2. Place θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: c'est l'étape la plus souvent oubliée.
3. Calcule $\tan \theta$ et obtiens x.
4. Ces deux faits réunis donnent $\theta = \arctan x$, par définition de l'arctangente.

Attention : Arctangente d'une tangente : attention à l'intervalle

L'égalité $\arctan(\tan x) = x$ exige $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sinon, ajoute ou retranche un multiple de π pour revenir dans cet intervalle : la tangente ne change pas.



Dents de scie : arctan(tan x) reste toujours entre -π/2 et π/2, et ne vaut x que dans cet intervalle.

Exemple : Mini-exemple

$\frac{3\pi}{4}$ sort de l'intervalle, mais $\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$ y est et a la même tangente. Donc :

$$\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$