BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une fonction prolongée en 0 et sa solution unique

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0)=-2$ et, pour tout réel $x>0$:

$$f(x)=x^2-4+\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

On donne $\sqrt{2{,}2}<1{,}49$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x>0$:

$$f(x)=x^2+\sqrt{1+x}-3.$$

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ par la quantité conjuguée $\sqrt{1+x}+1$. Vérifie d'abord que ce dénominateur ne s'annule pas lorsque $x>0$.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x>0$, l'écriture de la question 1 fait disparaître la forme $\dfrac{0}{0}$. Compare ensuite la limite trouvée à la valeur imposée $f(0)$.

3. 0,75 pts

Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$, puis qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle.

INDICE

Sur $]0,+\infty[$, l'écriture de la question 1 est faite de fonctions usuelles ; en 0, borne gauche de l'intervalle, seule la continuité à droite est demandée. Pour le sens de variation, vérifie que cette écriture reste vraie en 0, puis compare séparément a^2 et b^2, $\sqrt{1+a}$ et $\sqrt{1+b}$ pour $0\le a<b$.

4. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

Chaque terme de $x^2+\sqrt{1+x}-3$ a une limite connue en $+\infty$; regarde si une forme indéterminée apparaît.

5. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$, et que $1<\alpha<2$.

INDICE

Travaille d'abord sur le segment $[1,2]$ et vérifie une à une les hypothèses : continuité sur le segment, stricte monotonie, signes de $f(1)$ et de $f(2)$. Le point délicat : l'unicité est demandée sur tout $[0,+\infty[$, pas seulement sur $[1,2]$.

6. 0,5 pts

En utilisant l'encadrement donné de $\sqrt{2{,}2}$, montrer que $1{,}2 < \alpha < 1{,}25$.

INDICE

Calcule $f(1{,}25)$ exactement : $1 + 1{,}25$ est le carré d'un décimal simple. Pour $f(1{,}2)$, utilise la majoration de $\sqrt{2{,}2}$ donnée. Conclus ensuite avec la stricte croissance de f, et non avec les seules valeurs.

7. 0,5 pts

Déterminer $f\big([0, \alpha]\big)$ et $f\big([0, +\infty[\big)$, puis donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x dans $[0, +\infty[$.

INDICE

f est continue et strictement croissante : l'image d'un segment se lit sur les images des bornes ; pour $[0, +\infty[$, utilise $f(0)$ et la limite de la question 4. Le signe découle de la comparaison de x avec α.

8. 0,25 pts

Montrer que $\alpha^2 < 3$ et que $\left(3 - \alpha^2\right)^2 = 1 + \alpha$.

INDICE

Écris $f(\alpha) = 0$ avec l'expression de la question 1, puis isole la racine carrée. On ne peut élever au carré sans perte qu'en connaissant le signe des deux membres.

Exercice 2 3,5 pts

Bijection et réciproque avec une racine quatrième

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 3}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé, et $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe de f.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x^4 + 3},$$

puis que f est strictement croissante sur I.

INDICE

Réduis $2 - \dfrac{6}{x^4 + 3}$ au même dénominateur. Pour le sens de variation, suis les étapes $x \mapsto x^4 + 3$, puis l'inverse, en précisant à chaque fois le signe des quantités comparées.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

INDICE

Avec l'écriture de la question 1, la limite en $+\infty$ se lit directement. Pour la bijection, cite les deux hypothèses du théorème sur I, puis calcule $J = f(I)$: une borne de J est atteinte, l'autre ne l'est pas.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{3x}{2 - x}}.$$

INDICE

Fixe $x \in J$ et cherche le réel $y \in I$ tel que $f(y) = x$: isole y^4. Le point délicat : pour $a > 0$, l'équation $y^4 = a$ a deux solutions réelles, et seule la condition $y \in I$ permet de choisir.

4. 0,5 pts

Calculer $f^{-1}\left(\dfrac{6}{7}\right)$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{p}}{q}$, où p est un entier naturel sans facteur carré autre que 1 et q un entier naturel non nul, puis vérifier le résultat en calculant son image par f.

INDICE

Vérifie que $\dfrac{6}{7}$ appartient à J, puis remplace dans l'expression de la question 3. Pour simplifier, utilise $\sqrt[4]{c^2} = \sqrt{c}$, valable pour $c \geq 0$.

5. 0,5 pts

Justifier que f^{-1} est continue sur J, puis calculer $\lim\limits_{x \to 2^-} f^{-1}(x)$.

INDICE

Écris f^{-1} comme la racine quatrième de $u : x \mapsto \dfrac{3x}{2-x}$, et vérifie que u est continue et positive sur J. Pour la limite, cherche d'abord celle de $u(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, en suivant le signe du dénominateur.

6. 0,5 pts

Donner le sens de variation de f^{-1} sur J. Expliquer comment obtenir la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} à partir de $\mathcal{C}_f$, et interpréter graphiquement le résultat de la question 5.

INDICE

La réciproque d'une fonction continue strictement monotone garde son sens de variation. Pour les courbes, pense à la droite d'équation $y = x$; une limite infinie en un réel se traduit par une asymptote.

7. 0,25 pts

Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(x) \leq 1$.

INDICE

Les réels $f^{-1}(x)$ et 1 sont dans I : applique-leur f, qui y conserve l'ordre. Il reste à calculer $f(1)$.

Exercice 3 4,25 pts

Écart entre deux arctangentes voisines

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \arctan(x+1) - \arctan x.$$

On rappelle que, pour tous réels a et b tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a-b)$ soient définis :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

1. 0,5 pts

Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ en nommant les limites composées.

INDICE

$x \mapsto \arctan(x+1)$ est la composée de $x \mapsto x+1$ suivie d'$\arctan$. Pour chaque limite, donne d'abord celle de $x+1$, puis celle d'$\arctan$ en cette valeur.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $0 < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

La minoration vient de la stricte croissance d'$\arctan$. Pour la majoration, sépare trois cas qui recouvrent $\mathbb{R}$: $x \geq 0$, $x \leq -1$ et $-1 < x < 0$. Dans le dernier cas, compare $x+1$ à 1 et x à -1.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x :

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right).$$

INDICE

Pose $a = \arctan(x+1)$ et $b = \arctan x$, puis calcule $\tan(a-b)$ grâce au rappel. Le point délicat : pour passer de $\tan\big(g(x)\big)$ à $g(x)$, il faut savoir que $g(x)$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; c'est le rôle de la question 2.

4. 0,5 pts

Montrer que $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

INDICE

Calcule $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ de deux manières : avec la définition de g, puis avec la question 3. L'imparité d'$\arctan$ sert dans le premier calcul.

5. 0,75 pts

On note h la restriction de g à l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Montrer que h réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = \left]0, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right]$.

INDICE

Avec la question 3, suis successivement les variations de $x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ sur I, puis de l'inverse, puis d'$\arctan$. Pour l'image, utilise $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ (question 4) et la limite en $+\infty$ (question 1).

6. 0,5 pts

Déterminer $h^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $\frac{\pi}{4}$ appartient à J. Résous ensuite $h(x) = \frac{\pi}{4}$ pour $x \in I$ avec la question 3 ; l'une des solutions de l'équation du second degré obtenue est à écarter.

7. 0,5 pts

L'équation $g(x) = \frac{\pi}{3}$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier.

INDICE

Majore $g(x)$ sur tout $\mathbb{R}$ à l'aide de $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$, puis compare $\frac{4}{3}$ à $\sqrt{3}$ en élevant au carré deux nombres positifs.

Exercice 4 4 pts

Trois racines d'un polynôme et l'image d'un segment

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.

INDICE

Compare les signes de deux valeurs consécutives. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique sur chaque segment, à condition de nommer la continuité de P sur ce segment.

2. 0,5 pts

Montrer que P admet exactement trois racines réelles, notées $r_1 < r_2 < r_3$, avec $-2 < r_1 < -1$, $0 < r_2 < 1$ et $1 < r_3 < 2$.

INDICE

Les trois intervalles de la question 1 sont deux à deux disjoints. Combien de racines réelles un polynôme de degré 3 peut-il avoir au plus ?

3. 0,5 pts

En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Sur un intervalle où P ne s'annule pas, P ne peut pas changer de signe : sinon, le théorème des valeurs intermédiaires fournirait une racine de plus. Une valeur calculée dans chaque intervalle donne alors le signe.

4. 0,5 pts

Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que $0 < r_2 < \frac{1}{2}$. Combien d'étapes de dichotomie à partir de $[0, 1]$ faut-il pour obtenir un intervalle d'amplitude au plus 10^{-3} ?

INDICE

D'après la question 2, r_2 est la seule racine de P dans $[0, 1]$. Compare les signes de $P(0)$ et de $P\left(\frac{1}{2}\right)$. À chaque étape de dichotomie, l'amplitude est divisée par 2 : après n étapes, elle vaut $\frac{1}{2^n}$.

5. 0,5 pts

Montrer que $r_2 = \dfrac{1 + r_2^3}{3}$. En déduire que $\dfrac{1}{3} < r_2 < \dfrac{3}{8}$.

INDICE

Traduis $P(r_2) = 0$. Pour la minoration, utilise le signe de r_2 ; pour la majoration, l'encadrement de la question 4 et la stricte croissance de $t \mapsto t^3$.

6. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x :

$$P(x) - 3 = (x+1)^2(x-2),$$
$$P(x) + 1 = (x-1)^2(x+2).$$

En déduire $P\big([-1, 2]\big)$.

INDICE

Développe les deux produits. Pour l'image, attention : $P(-1) = P(2)$, et P n'est pas monotone sur $[-1, 2]$. Montre que $-1 \leq P(x) \leq 3$ sur ce segment, puis utilise que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, avec deux valeurs atteintes.

7. 0,5 pts

On pose $g(x) = \sqrt{P(x)}$. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $g(x)$ existe, justifier que g est continue sur chacun des deux intervalles dont D est la réunion, puis montrer que le maximum de g sur $[r_1, r_2]$ vaut $\sqrt{3}$.

INDICE

$g(x)$ existe exactement lorsque $P(x) \geq 0$: lis-le sur le signe de la question 3. Pour le maximum, utilise la première identité de la question 6, valable sur $[r_1, r_2]$.

Exercice 5 4 pts

Une racine cubique en 8 et des puissances rationnelles

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(8)=\dfrac{1}{12}$ et, pour tout réel $x\geq 0$ tel que $x\neq 8$:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}.$$

On rappelle que, pour tous réels A et B, $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Pour tout réel $x\geq 0$ tel que $x\neq 8$, établir l'égalité :

$$f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}.$$

INDICE

Pose $A=\sqrt[3]{x}$ et $B=2$: alors $A^3=x$ et $B^3=8$. Utilise le rappel, après avoir vérifié que $A-2\neq 0$.

2. 0,75 pts

On pose, pour tout $x\geq 0$:

$$u(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4.$$

Montrer que f est continue en 8, puis que $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ pour tout $x\geq 0$, et enfin que f est continue sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Cherche la limite de $\sqrt[3]{x}$ quand x tend vers 8, puis celle de $f(x)$ avec l'écriture de la question 1 ; compare-la à $f(8)$. Pour la continuité sur l'intervalle, vois u comme une composée : la racine cubique, suivie d'une fonction polynôme.

3. 0,75 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déterminer $f\big([0,+\infty[\big)$.

INDICE

Compare d'abord $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ pour $0\leq a<b$, puis $u(a)$ et $u(b)$, deux réels strictement positifs. Pour l'image, une borne est atteinte et l'autre ne l'est pas.

4. 0,5 pts

Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation $f(x)=\dfrac{1}{19}$.

INDICE

Avec la question 2, pose $t=\sqrt[3]{x}$: l'équation devient une équation du second degré en t. Le point délicat : t est positif, ce qui écarte une racine.

5. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$x^{\frac{2}{3}} f(x) = \frac{1}{1 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}}.$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} f(x)$.

INDICE

Pour $x > 0$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$. Divise le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{2}{3}}$, avec les règles de calcul sur les puissances rationnelles.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$0 < \frac{1}{4} - f(x) < \frac{\sqrt[3]{x}}{8}.$$

En déduire que $\frac{19}{80} < f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \left[0, 10^{-3}\right]$.

INDICE

Avec $t = \sqrt[3]{x} > 0$, réduis $\frac{1}{4} - \frac{1}{t^2 + 2t + 4}$ au même dénominateur, puis compare le résultat à $\frac{t}{8}$ en multipliant par un réel strictement positif bien choisi.

7. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - \frac{1}{4}}{\sqrt[3]{x}}$, en nommant les deux limites composées.

INDICE

La question 6 donne une écriture de $\frac{1}{4} - f(x)$ en fonction de $t = \sqrt[3]{x}$. Cherche d'abord la limite de t quand x tend vers 0 par la droite, puis celle de la fonction de t obtenue.