BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une fonction prolongée en 0 et sa solution unique

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = -2$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = x^2 - 4 + \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

On donne $\sqrt{2{,}2} < 1{,}49$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{1+x} - 3.$$

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$ par la quantité conjuguée $\sqrt{1+x} + 1$. Vérifie d'abord que ce dénominateur ne s'annule pas lorsque $x > 0$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

L'écriture a un sens. On a $1 + x > 1$, donc $\sqrt{1+x} > 1$ et $\sqrt{1+x} - 1 \neq 0$.

Quantité conjuguée. Comme $\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right) = (1+x) - 1 = x$:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \\ &= \frac{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x} \\ &= \sqrt{1+x} + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4 + \sqrt{1+x} + 1 \\ &= x^2 + \sqrt{1+x} - 3. \end{aligned}$$

2. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x>0$, l'écriture de la question 1 fait disparaître la forme $\dfrac{0}{0}$. Compare ensuite la limite trouvée à la valeur imposée $f(0)$.

CORRIGÉ

Limite à droite en 0. Pour tout $x>0$, $f(x)=x^2+\sqrt{1+x}-3$ (question 1). Lorsque x tend vers 0 par la droite, x^2 tend vers 0 et $1+x$ tend vers 1. La racine carrée est continue en 1, donc $\sqrt{1+x}$ tend vers 1. Par somme :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0+1-3=-2.$$

Comparaison avec $f(0)$. Cette limite est égale à la valeur imposée $f(0)=-2$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-2=f(0)$: f est continue à droite en 0.

3. 0,75 pts

Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$, puis qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle.

INDICE

Sur $]0,+\infty[$, l'écriture de la question 1 est faite de fonctions usuelles ; en 0, borne gauche de l'intervalle, seule la continuité à droite est demandée. Pour le sens de variation, vérifie que cette écriture reste vraie en 0, puis compare séparément a^2 et b^2, $\sqrt{1+a}$ et $\sqrt{1+b}$ pour $0\leq a<b$.

CORRIGÉ

Continuité sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x>0$, $f(x)=x^2+\sqrt{1+x}-3$ (question 1). La fonction $x\mapsto x^2-3$ est polynomiale, donc continue.

La fonction $x\mapsto 1+x$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$, donc $x\mapsto\sqrt{1+x}$ y est continue. Par somme, f est continue sur $]0,+\infty[$.

Continuité en 0. Le réel 0 est la borne gauche de l'intervalle, et f est continue à droite en 0 (question 2).

Une écriture valable sur tout l'intervalle. L'égalité $f(x)=x^2+\sqrt{1+x}-3$ vaut aussi pour $x=0$, car $0+1-3=-2=f(0)$.

Stricte croissance. Soit a et b deux réels tels que $0\leq a<b$.

- Ils sont positifs, donc $a^2<b^2$.
- On a $1+a<1+b$, et la racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$: $\sqrt{1+a}<\sqrt{1+b}$.

En additionnant membre à membre, $f(a)<f(b)$.

Conclusion. f est continue sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle.

4. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Chaque terme de $x^2 + \sqrt{1+x} - 3$ a une limite connue en $+\infty$; regarde si une forme indéterminée apparaît.

CORRIGÉ

Lorsque x tend vers $+\infty$:

- x^2 tend vers $+\infty$;
- $1 + x$ tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{1+x}$ aussi, par composition.

Aucune forme indéterminée n'apparaît.

Conclusion. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$, et que $1 < \alpha < 2$.

INDICE

Travaille d'abord sur le segment $[1, 2]$ et vérifie une à une les hypothèses : continuité sur le segment, stricte monotonie, signes de $f(1)$ et de $f(2)$. Le point délicat : l'unicité est demandée sur tout $[0, +\infty[$, pas seulement sur $[1, 2]$.

CORRIGÉ

Hypothèses sur le segment $[1, 2]$.

- f est continue sur $[1, 2]$, car elle l'est sur $[0, +\infty[$ (question 3).
- f est strictement croissante sur $[1, 2]$ (question 3).
- $f(1) = 1 + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2} - 2 < 0$, car $\sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$.
- $f(2) = 4 + \sqrt{3} - 3 = 1 + \sqrt{3} > 0$.

Une unique solution dans $]1, 2[$. Les réels $f(1)$ et $f(2)$ sont de signes contraires. Le théorème des valeurs intermédiaires, pour une fonction continue et strictement monotone sur un segment, montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$.

Aucune autre solution dans $[0, +\infty[$. Soit $\beta \in [0, +\infty[$ tel que $\beta \neq \alpha$. Si $\beta < \alpha$, la stricte croissance de f donne $f(\beta) < f(\alpha) = 0$; si $\beta > \alpha$, elle donne $f(\beta) > 0$. Dans les deux cas, $f(\beta) \neq 0$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$, et $1 < \alpha < 2$.

6. `0,5 pts`

En utilisant l'encadrement donné de $\sqrt{2{,}2}$, montrer que $1{,}2 < \alpha < 1{,}25$.

INDICE

Calcule $f(1{,}25)$ exactement : $1 + 1{,}25$ est le carré d'un décimal simple. Pour $f(1{,}2)$, utilise la majoration de $\sqrt{2{,}2}$ donnée. Conclus ensuite avec la stricte croissance de f, et non avec les seules valeurs.

CORRIGÉ

Signe de $f(1{,}25)$. On a $1 + 1{,}25 = 2{,}25 = 1{,}5^2$, donc :

$$\begin{aligned} f(1{,}25) &= 1{,}5625 + 1{,}5 - 3 \\ &= 0{,}0625 > 0. \end{aligned}$$

Signe de $f(1{,}2)$. On a $f(1{,}2) = 1{,}44 + \sqrt{2{,}2} - 3 = \sqrt{2{,}2} - 1{,}56$. Comme $\sqrt{2{,}2} < 1{,}49$:

$$\begin{aligned} f(1{,}2) &< 1{,}49 - 1{,}56 \\ &= -0{,}07 < 0. \end{aligned}$$

Position de α. On sait que $f(\alpha) = 0$.

- Si l'on avait $\alpha \leq 1{,}2$, la croissance de f donnerait $f(\alpha) \leq f(1{,}2) < 0$.
- Si l'on avait $\alpha \geq 1{,}25$, elle donnerait $f(\alpha) \geq f(1{,}25) > 0$.

Ces deux cas sont exclus.

Conclusion. $1{,}2 < \alpha < 1{,}25$.

7. `0,5 pts`

Déterminer $f\big([0,\alpha]\big)$ et $f\big([0,+\infty[\big)$, puis donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x dans $[0,+\infty[$.

INDICE

f est continue et strictement croissante : l'image d'un segment se lit sur les images des bornes ; pour $[0,+\infty[$, utilise $f(0)$ et la limite de la question 4. Le signe découle de la comparaison de x avec α.

CORRIGÉ

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (question 3) : l'image d'un intervalle se lit sur les images ou les limites aux bornes.

Image de $[0,\alpha]$.

$$\begin{aligned} f\big([0,\alpha]\big) &= \big[f(0),f(\alpha)\big] \\ &= [-2,0]. \end{aligned}$$

Image de $[0,+\infty[$. La borne 0 donne $f(0)=-2$, valeur atteinte, et la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ (question 4). Donc :

$$f\big([0,+\infty[\big) = [-2,+\infty[\,.$$

Signe de $f(x)$. Soit $x\in[0,+\infty[$.

- Si $x<\alpha$, alors $f(x)<f(\alpha)=0$.
- Si $x>\alpha$, alors $f(x)>f(\alpha)=0$.

Conclusion. $f\big([0,\alpha]\big)=[-2,0]$ et $f\big([0,+\infty[\big)=[-2,+\infty[$. La fonction f est strictement négative sur $[0,\alpha[$, s'annule en α seulement, et est strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$.

8. `0,25 pts`

Montrer que $\alpha^2<3$ et que $\big(3-\alpha^2\big)^2=1+\alpha$.

INDICE

Écris $f(\alpha)=0$ avec l'expression de la question 1, puis isole la racine carrée. On ne peut élever au carré sans perte qu'en connaissant le signe des deux membres.

CORRIGÉ

Une égalité vérifiée par α. Comme $\alpha>0$, la question 1 s'applique : $f(\alpha)=0$ s'écrit $\alpha^2+\sqrt{1+\alpha}-3=0$, soit :

$$\sqrt{1+\alpha}=3-\alpha^2.$$

Signe. On a $\sqrt{1+\alpha}>0$, car $1+\alpha>0$. Donc $3-\alpha^2>0$, c'est-à-dire $\alpha^2<3$.

Élévation au carré. Deux réels égaux ont des carrés égaux, et $\big(\sqrt{1+\alpha}\big)^2=1+\alpha$.

Conclusion. $\alpha^2<3$ et $\big(3-\alpha^2\big)^2=1+\alpha$.

Exercice 2 3,5 pts

Bijection et réciproque avec une racine quatrième

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 3}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé, et $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe de f.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = 2 - \frac{6}{x^4 + 3},$$

puis que f est strictement croissante sur I.

INDICE

Réduis $2 - \dfrac{6}{x^4+3}$ au même dénominateur. Pour le sens de variation, suis les étapes $x \mapsto x^4 + 3$, puis l'inverse, en précisant à chaque fois le signe des quantités comparées.

CORRIGÉ

Écriture de $f(x)$. Soit $x \in I$. On a $x^4 + 3 \geq 3 > 0$, et :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{6}{x^4+3} &= \frac{2x^4 + 6 - 6}{x^4 + 3} \\ &= \frac{2x^4}{x^4 + 3} = f(x). \end{aligned}$$

Stricte croissance. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. La fonction $t \mapsto t^4$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $3 \leq a^4 + 3 < b^4 + 3$.

Ces deux nombres sont strictement positifs, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{6}{a^4 + 3} > \frac{6}{b^4 + 3}.$$

En retranchant de 2, on obtient $f(a) < f(b)$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) = 2 - \dfrac{6}{x^4+3}$, et f est strictement croissante sur I.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

INDICE

Avec l'écriture de la question 1, la limite en $+\infty$ se lit directement. Pour la bijection, cite les deux hypothèses du théorème sur I, puis calcule $J = f(I)$: une borne de J est atteinte, l'autre ne l'est pas.

CORRIGÉ

Limite en $+\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, x^4+3 tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{6}{x^4+3}$ tend vers 0. Avec la question 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$$

Hypothèses du théorème de la bijection.

- f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I : elle est continue sur I.
- f est strictement croissante sur I (question 1).

Intervalle image. La fonction f réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$. La borne 0 de I donne $f(0) = 0$, valeur atteinte ; la limite 2 en $+\infty$ n'est pas atteinte. Ainsi :

$$J = [0, 2[\,.$$

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, et f réalise une bijection de I sur $J = [0, 2[$.

3. `0,75 pts`

Montrer que, pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{3x}{2-x}}.$$

INDICE

Fixe $x \in J$ et cherche le réel $y \in I$ tel que $f(y) = x$: isole y^4. Le point délicat : pour $a > 0$, l'équation $y^4 = a$ a deux solutions réelles, et seule la condition $y \in I$ permet de choisir.

CORRIGÉ

Soit $x \in J = [0, 2[$ et $y \in I$. On cherche à quelle condition $f(y) = x$.

Isoler y^4. Comme $y^4 + 3 > 0$ et $2 - x > 0$:

$$\begin{aligned} & f(y) = x \\ \iff & 2y^4 = x\left(y^4 + 3\right) \\ \iff & y^4(2 - x) = 3x \\ \iff & y^4 = \frac{3x}{2-x}. \end{aligned}$$

Choix de la solution. Posons $a = \dfrac{3x}{2-x}$; on a $a \geq 0$, car $x \geq 0$ et $2 - x > 0$.

- Si $a > 0$, l'équation $y^4 = a$ a exactement deux solutions réelles, $\sqrt[4]{a}$ et $-\sqrt[4]{a}$; la condition $y \geq 0$ ne retient que $\sqrt[4]{a}$.
- Si $a = 0$, la seule solution est $y = 0 = \sqrt[4]{0}$.

Dans les deux cas, l'unique antécédent de x dans I est $\sqrt[4]{a}$.

Conclusion. Pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{3x}{2-x}}.$$

4. 0,5 pts

Calculer $f^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{p}}{q}$, où p est un entier naturel sans facteur carré autre que 1 et q un entier naturel non nul, puis vérifier le résultat en calculant son image par f.

INDICE

Vérifie que $\frac{6}{7}$ appartient à J, puis remplace dans l'expression de la question 3. Pour simplifier, utilise $\sqrt[4]{c^2} = \sqrt{c}$, valable pour $c \geq 0$.

CORRIGÉ

Appartenance à J. On a $0 \leq \frac{6}{7} < 2$, donc $\frac{6}{7} \in J$.

Calcul. On calcule d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{3 \times \frac{6}{7}}{2 - \frac{6}{7}} &= \frac{18}{7} \times \frac{7}{8} \\ &= \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour tout $c \geq 0$, $(\sqrt{c})^4 = c^2$ et $\sqrt{c} \geq 0$, donc $\sqrt[4]{c^2} = \sqrt{c}$. D'après la question 3, puis avec $c = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) &= \sqrt{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Vérification. On a $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) &= \frac{2 \times \frac{9}{4}}{\frac{9}{4} + 3} \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{4}{21} = \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. $f^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$, soit $p = 6$ et $q = 2$; et l'on vérifie que $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{6}{7}$.

5. 0,5 pts

Justifier que f^{-1} est continue sur J, puis calculer $\lim\limits_{x \to 2^-} f^{-1}(x)$.

INDICE

Écris f^{-1} comme la racine quatrième de $u : x \mapsto \dfrac{3x}{2-x}$, et vérifie que u est continue et positive sur J. Pour la limite, cherche d'abord celle de $u(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, en suivant le signe du dénominateur.

CORRIGÉ

Continuité. Posons $u(x) = \dfrac{3x}{2-x}$ pour tout $x \in J$. La fonction u est rationnelle, de dénominateur non nul sur $J = [0, 2[$: elle est continue sur J, et elle y est positive.

La racine quatrième d'une fonction continue et positive sur un intervalle est continue sur cet intervalle : f^{-1} est continue sur J. On peut aussi invoquer directement la continuité de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

Limite à gauche en 2. Lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures, $3x$ tend vers 6 et $2 - x$ tend vers 0 en restant strictement positif : $u(x)$ tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \sqrt[4]{t} = +\infty$, on conclut par la limite d'une fonction composée.

Conclusion. f^{-1} est continue sur J, et $\lim\limits_{x \to 2^-} f^{-1}(x) = +\infty$.

6. 0,5 pts

Donner le sens de variation de f^{-1} sur J. Expliquer comment obtenir la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} à partir de $\mathcal{C}_f$, et interpréter graphiquement le résultat de la question 5.

INDICE

La réciproque d'une fonction continue strictement monotone garde son sens de variation. Pour les courbes, pense à la droite d'équation $y = x$; une limite infinie en un réel se traduit par une asymptote.

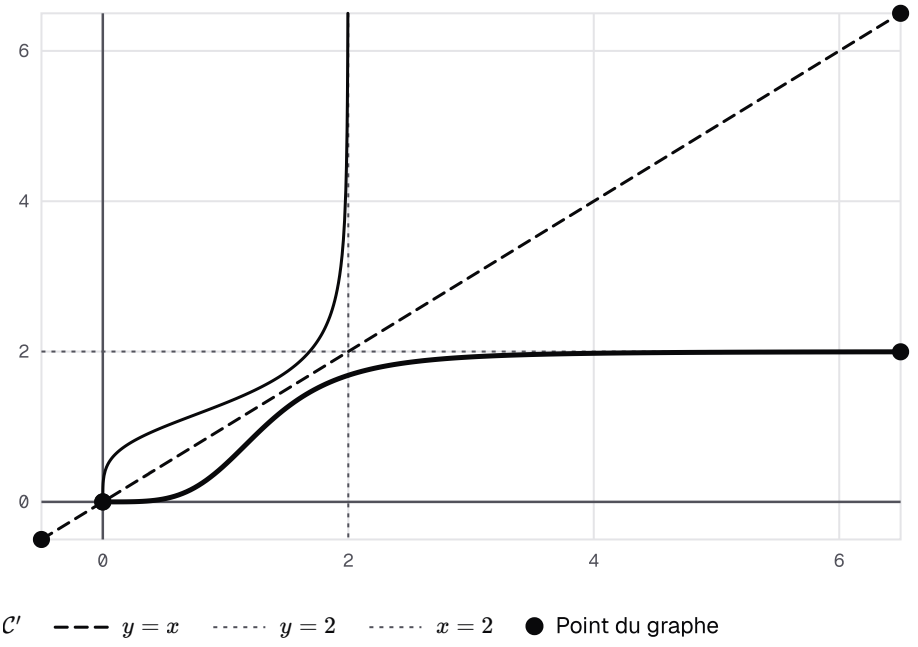
CORRIGÉ

Sens de variation. La fonction f est continue et strictement croissante sur I ; sa réciproque f^{-1} est donc strictement croissante sur $J = [0, 2[$. De plus $f^{-1}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f^{-1}(x) = +\infty$ (question 5).

Courbe de f^{-1}. Le repère étant orthonormé, $\mathcal{C}'$ est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Interprétation de la question 5. La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}'$. C'est la symétrique de la droite d'équation $y = 2$, asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (question 2).

Conclusion. f^{-1} est strictement croissante sur J ; $\mathcal{C}'$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$, et admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.



Courbes de f et de sa réciproque, symétriques par rapport à y = x : l'asymptote y = 2 de l'une devient l'asymptote x = 2 de l'autre.

7. `0,25 pts`

Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(x) \leq 1$.

INDICE

Les réels $f^{-1}(x)$ et 1 sont dans I : applique-leur f, qui y conserve l'ordre. Il reste à calculer $f(1)$.

CORRIGÉ

Soit $x \in J$. Les réels $f^{-1}(x)$ et 1 appartiennent à I, où f est strictement croissante. Une fonction strictement croissante conserve l'ordre dans les deux sens : pour tous réels a et b de I, $a \leq b$ équivaut à $f(a) \leq f(b)$.

Calcul de $f(1)$. $f(1) = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Résolution.

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x) \leq 1 \\ \iff\ & f\big(f^{-1}(x)\big) \leq f(1) \\ \iff\ & x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions dans J est $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 3 4,25 pts

Écart entre deux arctangentes voisines

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \arctan(x+1) - \arctan x.$$

On rappelle que, pour tous réels a et b tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a-b)$ soient définis :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

1. 0,5 pts

Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ en nommant les limites composées.

INDICE

$x \mapsto \arctan(x+1)$ est la composée de $x \mapsto x+1$ suivie d'$\arctan$. Pour chaque limite, donne d'abord celle de $x+1$, puis celle d'$\arctan$ en cette valeur.

CORRIGÉ

Continuité. Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $\arctan$ sont continues sur $\mathbb{R}$; leur composée $x \mapsto \arctan(x+1)$ l'est donc aussi. Différence de deux fonctions continues, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \arctan y = \dfrac{\pi}{2}$. Par la limite d'une fonction composée, $\arctan(x+1)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$; $\arctan x$ aussi. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Limite en $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} \arctan y = -\dfrac{\pi}{2}$. Par composition, $\arctan(x+1)$ et $\arctan x$ tendent vers $-\dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Conclusion. g est continue sur $\mathbb{R}$, et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ valent toutes deux 0.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $0 < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

La minoration vient de la stricte croissance d'$\arctan$. Pour la majoration, sépare trois cas qui recouvrent $\mathbb{R}$: $x \geq 0$, $x \leq -1$ et $-1 < x < 0$. Dans le dernier cas, compare $x+1$ à 1 et x à -1.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Minoration. On a $x < x+1$ et $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\arctan x < \arctan(x+1)$, c'est-à-dire $g(x) > 0$.

Majoration. Pour tout réel t, $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan t < \dfrac{\pi}{2}$. On distingue trois cas, qui couvrent $\mathbb{R}$.

- Si $x \geq 0$: $\arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$ et $\arctan x \geq \arctan 0 = 0$, donc $g(x) < \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $x \leq -1$: $x+1 \leq 0$, donc $\arctan(x+1) \leq 0$; et $\arctan x > -\dfrac{\pi}{2}$. Donc $g(x) < 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $-1 < x < 0$: $x+1 < 1$ donne $\arctan(x+1) < \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, et $x > -1$ donne $\arctan x > \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, par imparité d'$\arctan$. Donc $g(x) < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $0 < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x :

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

INDICE

Pose $a = \arctan(x+1)$ et $b = \arctan x$, puis calcule $\tan(a-b)$ grâce au rappel. Le point délicat : pour passer de $\tan\big(g(x)\big)$ à $g(x)$, il faut savoir que $g(x)$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; c'est le rôle de la question 2.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Posons $a = \arctan(x+1)$ et $b = \arctan x$. Ces réels appartiennent à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan a = x+1$ et $\tan b = x$.

Calcul de $\tan\big(g(x)\big)$. D'après la question 2, $a - b = g(x)$ appartient à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\tan(a-b)$ est défini. De plus $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$. Le rappel donne :

$$\begin{aligned}\tan\big(g(x)\big) &= \frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x} \\ &= \frac{1}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Retour à $g(x)$. Comme $g(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\arctan\Big(\tan\big(g(x)\big)\Big) = g(x)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$.

4. 0,5 pts

Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

INDICE

Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ de deux manières : avec la définition de g, puis avec la question 3. L'imparité d'$\arctan$ sert dans le premier calcul.

CORRIGÉ

Avec la définition de g. La fonction $\arctan$ est impaire, donc :

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Avec la question 3. On a $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux expressions de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont égales : $2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

5. 0,75 pts

On note h la restriction de g à l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Montrer que h réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = \left]0, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right]$.

INDICE

Avec la question 3, suis successivement les variations de $x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ sur I, puis de l'inverse, puis d'$\arctan$. Pour l'image, utilise $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ (question 4) et la limite en $+\infty$ (question 1).

CORRIGÉ

Stricte décroissance. Soit a et b deux réels tels que $-\frac{1}{2} \leq a < b$. Alors $0 \leq a + \frac{1}{2} < b + \frac{1}{2}$, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ pour tout réel t :

$$\frac{3}{4} \leq a^2 + a + 1 < b^2 + b + 1.$$

Ces nombres sont strictement positifs, donc $\dfrac{1}{a^2 + a + 1} > \dfrac{1}{b^2 + b + 1}$. La fonction $\arctan$ étant strictement croissante, la question 3 donne $h(a) > h(b)$.

Continuité. h est continue sur I, comme restriction de g (question 1).

Intervalle image. Le théorème de la bijection s'applique. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ (question 1), limite non atteinte, et $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ (question 4). Donc :

$$h(I) = \left]0, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right] = J.$$

Conclusion. h réalise une bijection de I sur $J = \left]0, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right]$.

6. 0,5 pts

Déterminer $h^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Vérifie d'abord que $\frac{\pi}{4}$ appartient à J. Résous ensuite $h(x)=\frac{\pi}{4}$ pour $x\in I$ avec la question 3 ; l'une des solutions de l'équation du second degré obtenue est à écarter.

CORRIGÉ

Appartenance à J. On a $\frac{4}{3}>1$ et $\arctan$ est strictement croissante, donc $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)>\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. Comme de plus $\frac{\pi}{4}>0$, on a $\frac{\pi}{4}\in J$.

Résolution. Soit $x\in I$. Comme $\frac{\pi}{4}=\arctan 1$ et qu'$\arctan$ est injective, la question 3 donne :

$$\begin{aligned} & h(x)=\frac{\pi}{4} \\ \iff & \frac{1}{x^2+x+1}=1 \\ \iff & x(x+1)=0. \end{aligned}$$

Les solutions réelles de cette dernière équation sont 0 et -1 ; seul 0 appartient à I, car $-1<-\frac{1}{2}$.

Contrôle. $h(0)=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$.

Conclusion. $h^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

7. 0,5 pts

L'équation $g(x)=\frac{\pi}{3}$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier.

INDICE

Majore $g(x)$ sur tout $\mathbb{R}$ à l'aide de $x^2+x+1\geq\frac{3}{4}$, puis compare $\frac{4}{3}$ à $\sqrt{3}$ en élevant au carré deux nombres positifs.

CORRIGÉ

Majoration de g. Soit x un réel. On a $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$, donc $0<\frac{1}{x^2+x+1}\leq\frac{4}{3}$. Par la question 3 et la croissance d'$\arctan$, $g(x)\leq\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

Comparaison avec $\frac{\pi}{3}$. On a $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}<3=\left(\sqrt{3}\right)^2$, et les réels $\frac{4}{3}$ et $\sqrt{3}$ sont positifs, donc $\frac{4}{3}<\sqrt{3}$. Par stricte croissance d'$\arctan$, $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g(x)<\frac{\pi}{3}$: l'équation $g(x)=\frac{\pi}{3}$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 4 pts

Trois racines d'un polynôme et l'image d'un segment

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,75 pts

Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$. En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.

INDICE

Compare les signes de deux valeurs consécutives. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique sur chaque segment, à condition de nommer la continuité de P sur ce segment.

CORRIGÉ

Valeurs.

- $P(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$;
- $P(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$;
- $P(0) = 1$;
- $P(1) = 1 - 3 + 1 = -1$;
- $P(2) = 8 - 6 + 1 = 3$.

Hypothèses. P est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur les segments $[-2, -1]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$. De plus :

- $P(-2) \times P(-1) = -3 < 0$;
- $P(0) \times P(1) = -1 < 0$;
- $P(1) \times P(2) = -3 < 0$.

Conclusion. Sur chacun de ces segments, les valeurs aux bornes sont non nulles et de signes contraires. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.

2. 0,5 pts

Montrer que P admet exactement trois racines réelles, notées $r_1 < r_2 < r_3$, avec $-2 < r_1 < -1$, $0 < r_2 < 1$ et $1 < r_3 < 2$.

INDICE

Les trois intervalles de la question 1 sont deux à deux disjoints. Combien de racines réelles un polynôme de degré 3 peut-il avoir au plus ?

CORRIGÉ

Trois racines distinctes. Les intervalles $]-2,-1[$, $]0,1[$ et $]1,2[$ sont deux à deux disjoints : la question 1 fournit trois racines distinctes de P.

Pas d'autre racine. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines réelles.

Conclusion. P admet exactement trois racines réelles, une dans chacun de ces intervalles. Rangées dans l'ordre croissant, ce sont $r_1 < r_2 < r_3$, avec $-2 < r_1 < -1$, $0 < r_2 < 1$ et $1 < r_3 < 2$.

3. 0,5 pts

En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Sur un intervalle où P ne s'annule pas, P ne peut pas changer de signe : sinon, le théorème des valeurs intermédiaires fournirait une racine de plus. Une valeur calculée dans chaque intervalle donne alors le signe.

CORRIGÉ

Signe constant entre deux racines. Soit K l'un des intervalles $]-\infty,r_1[$, $]r_1,r_2[$, $]r_2,r_3[$ et $]r_3,+\infty[$. La fonction P est continue sur K et ne s'y annule pas (question 2).

Supposons que P prenne sur K deux valeurs $P(u) < 0$ et $P(v) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur le segment d'extrémités u et v, inclus dans K, donnerait une racine de P dans K : c'est impossible. Donc P garde un signe constant sur K, celui de n'importe laquelle de ses valeurs sur K.

Une valeur dans chaque intervalle.

- $-2 \in]-\infty,r_1[$ et $P(-2) = -1 < 0$.
- $0 \in]r_1,r_2[$ et $P(0) = 1 > 0$.
- $1 \in]r_2,r_3[$ et $P(1) = -1 < 0$.
- $2 \in]r_3,+\infty[$ et $P(2) = 3 > 0$.

Conclusion.

- $P(x) < 0$ si $x \in]-\infty,r_1[\cup]r_2,r_3[$;
- $P(x) > 0$ si $x \in]r_1,r_2[\cup]r_3,+\infty[$;
- $P(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{r_1,r_2,r_3\}$.

4. 0,5 pts

Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que $0 < r_2 < \frac{1}{2}$. Combien d'étapes de dichotomie à partir de $[0,1]$ faut-il pour obtenir un intervalle d'amplitude au plus 10^{-3} ?

INDICE

D'après la question 2, r_2 est la seule racine de P dans $[0,1]$. Compare les signes de $P(0)$ et de $P\left(\frac{1}{2}\right)$. À chaque étape de dichotomie, l'amplitude est divisée par 2 : après n étapes, elle vaut $\frac{1}{2^n}$.

CORRIGÉ

La seule racine dans $[0,1]$. D'après la question 2, $r_1 < 0$ et $r_3 > 1$: r_2 est l'unique racine de P dans $[0,1]$.

Signe de $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8}.$$

Ainsi $P\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < P(0)$. Comme P est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que P s'annule dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, et ce ne peut être qu'en r_2. Donc $0 < r_2 < \frac{1}{2}$: c'est la première étape de la dichotomie, qui donne un intervalle d'amplitude $\frac{1}{2}$.

Nombre d'étapes. Après n étapes à partir de $[0,1]$, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$. Elle est inférieure ou égale à 10^{-3} si et seulement si $2^n \geq 1000$. Comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$, cela équivaut à $n \geq 10$.

Conclusion. $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ et $0 < r_2 < \frac{1}{2}$. Il faut au moins 10 étapes de dichotomie, et 10 suffisent, pour obtenir un intervalle d'amplitude au plus 10^{-3}.

5. 0,5 pts

Montrer que $r_2 = \dfrac{1 + r_2^3}{3}$. En déduire que $\dfrac{1}{3} < r_2 < \dfrac{3}{8}$.

INDICE

Traduis $P(r_2) = 0$. Pour la minoration, utilise le signe de r_2 ; pour la majoration, l'encadrement de la question 4 et la stricte croissance de $t \mapsto t^3$.

CORRIGÉ

L'égalité. L'égalité $P(r_2) = 0$ s'écrit $r_2^3 - 3r_2 + 1 = 0$, soit $3r_2 = 1 + r_2^3$. Donc :

$$r_2 = \frac{1 + r_2^3}{3}.$$

Minoration. Comme $r_2 > 0$, on a $r_2^3 > 0$, donc $r_2 > \dfrac{1}{3}$.

Majoration. On a $0 < r_2 < \dfrac{1}{2}$ (question 4), et $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $r_2^3 < \dfrac{1}{8}$. Ainsi :

$$r_2 < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$

Conclusion. $r_2 = \dfrac{1 + r_2^3}{3}$ et $\dfrac{1}{3} < r_2 < \dfrac{3}{8}$. Cet encadrement a pour amplitude $\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24}$: il est plus fin que celui de la question 4.

6. `0,75 pts`

Vérifier que, pour tout réel x :

$$P(x) - 3 = (x+1)^2(x-2),$$
$$P(x) + 1 = (x-1)^2(x+2).$$

En déduire $P\big([-1,2]\big)$.

INDICE

Développe les deux produits. Pour l'image, attention : $P(-1) = P(2)$, et P n'est pas monotone sur $[-1,2]$. Montre que $-1 \leq P(x) \leq 3$ sur ce segment, puis utilise que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, avec deux valeurs atteintes.

CORRIGÉ

Les deux identités. Soit x un réel. En développant :

$$\begin{aligned}(x+1)^2(x-2) &= \left(x^2+2x+1\right)(x-2)\\ &= x^3 - 3x - 2 = P(x) - 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+2) &= \left(x^2-2x+1\right)(x+2)\\ &= x^3 - 3x + 2 = P(x) + 1.\end{aligned}$$

Majoration. Pour tout réel $x \leq 2$, $(x+1)^2 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$, donc $P(x) - 3 \leq 0$.

Minoration. Pour tout réel $x \geq -2$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $x + 2 \geq 0$, donc $P(x) + 1 \geq 0$.

Première inclusion. Tout $x \in [-1,2]$ vérifie $-2 \leq x \leq 2$, donc $-1 \leq P(x) \leq 3$. Ainsi $P\big([-1,2]\big) \subset [-1,3]$.

Seconde inclusion. P est continue sur l'intervalle $[-1,2]$; l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc $P\big([-1,2]\big)$ est un intervalle. Il contient $P(1) = -1$ et $P(-1) = 3$, donc tous les réels compris entre -1 et 3 : $[-1,3] \subset P\big([-1,2]\big)$.

Conclusion. $P\big([-1,2]\big) = [-1,3]$. Le minimum -1 est atteint en 1, le maximum 3 en -1 et en 2.

Remarque. Les images des bornes, $P(-1) = P(2) = 3$, ne suffisaient pas : P n'est pas monotone sur ce segment, puisque $P(-1) > P(1)$ et $P(1) < P(2)$.

7. 0,5 pts

On pose $g(x) = \sqrt{P(x)}$. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $g(x)$ existe, justifier que g est continue sur chacun des deux intervalles dont D est la réunion, puis montrer que le maximum de g sur $[r_1, r_2]$ vaut $\sqrt{3}$.

INDICE

$g(x)$ existe exactement lorsque $P(x) \geq 0$: lis-le sur le signe de la question 3. Pour le maximum, utilise la première identité de la question 6, valable sur $[r_1, r_2]$.

CORRIGÉ

Ensemble D. $g(x)$ existe si et seulement si $P(x) \geq 0$. D'après la question 3 :

$$D = [r_1, r_2] \cup [r_3, +\infty[\,.$$

Continuité. Sur chacun des intervalles $[r_1, r_2]$ et $[r_3, +\infty[$, P est continue (fonction polynôme) et positive. La racine carrée d'une fonction continue et positive sur un intervalle est continue sur cet intervalle : g est continue sur $[r_1, r_2]$ et sur $[r_3, +\infty[$.

Majoration. Soit $x \in [r_1, r_2]$. Alors $x \leq r_2 < 1 < 2$; par la question 6, $P(x) - 3 = (x+1)^2(x-2) \leq 0$. Ainsi $0 \leq P(x) \leq 3$, et $g(x) \leq \sqrt{3}$, car la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

Valeur atteinte. On a $r_1 < -1 < r_2$ et $g(-1) = \sqrt{P(-1)} = \sqrt{3}$.

Conclusion. $D = [r_1, r_2] \cup [r_3, +\infty[$; g est continue sur chacun de ces deux intervalles ; le maximum de g sur $[r_1, r_2]$ vaut $\sqrt{3}$, atteint en -1.

Exercice 5 4 pts

Une racine cubique en 8 et des puissances rationnelles

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(8) = \dfrac{1}{12}$ et, pour tout réel $x \geq 0$ tel que $x \neq 8$:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}.$$

On rappelle que, pour tous réels A et B, $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$. La calculatrice n'est pas autorisée.

1. 0,5 pts

Pour tout réel $x \geq 0$ tel que $x \neq 8$, établir l'égalité :

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}.$$

INDICE

Pose $A = \sqrt[3]{x}$ et $B = 2$: alors $A^3 = x$ et $B^3 = 8$. Utilise le rappel, après avoir vérifié que $A - 2 \neq 0$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 0$ tel que $x \neq 8$. Posons $A = \sqrt[3]{x}$: alors $A \geq 0$ et $A^3 = x$.

Factorisation du dénominateur. Le rappel, avec $B = 2$, donne :

$$\begin{aligned} x - 8 &= A^3 - 2^3 \\ &= (A - 2)\left(A^2 + 2A + 4\right). \end{aligned}$$

Simplification. Si l'on avait $A = 2$, on aurait $x = A^3 = 8$; donc $A - 2 \neq 0$. De plus $A^2 + 2A + 4 = (A + 1)^2 + 3 > 0$. On remplace $x - 8$ par sa factorisation, puis on simplifie par $A - 2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A - 2}{x - 8} \\ &= \frac{1}{A^2 + 2A + 4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \geq 0$ tel que $x \neq 8$, $f(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}$.

2. 0,75 pts

On pose, pour tout $x \geq 0$:

$$u(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4.$$

Montrer que f est continue en 8, puis que $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ pour tout $x \geq 0$, et enfin que f est continue sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Cherche la limite de $\sqrt[3]{x}$ quand x tend vers 8, puis celle de $f(x)$ avec l'écriture de la question 1 ; compare-la à $f(8)$. Pour la continuité sur l'intervalle, vois u comme une composée : la racine cubique, suivie d'une fonction polynôme.

CORRIGÉ

Continuité en 8. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc en 8, où elle vaut 2. Pour $x \neq 8$, la question 1 donne $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$. Lorsque x tend vers 8, $\sqrt[3]{x}$ tend vers 2, donc $u(x)$ tend vers $4 + 4 + 4 = 12$, et :

$$\lim_{x \to 8} f(x) = \frac{1}{12} = f(8).$$

Donc f est continue en 8.

L'égalité pour tout $x \geq 0$. Elle vaut aussi en 8, puisque $u(8) = 4 + 4 + 4 = 12$ et $f(8) = \dfrac{1}{12}$.

Continuité sur $[0, +\infty[$. La fonction u est la composée de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, continue sur $[0, +\infty[$, suivie de la fonction polynôme $t \mapsto t^2 + 2t + 4$, continue sur $\mathbb{R}$: u est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, $u(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^2 + 3 > 0$; la fonction f, inverse de u, est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Conclusion. f est continue en 8 ; pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$; et f est continue sur $[0, +\infty[$.

3. 0,75 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déterminer $f\big([0,+\infty[\big)$.

INDICE

Compare d'abord $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ pour $0\leq a<b$, puis $u(a)$ et $u(b)$, deux réels strictement positifs. Pour l'image, une borne est atteinte et l'autre ne l'est pas.

CORRIGÉ

Stricte décroissance. Soit a et b deux réels tels que $0\leq a<b$. La racine cubique est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc $0\leq\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$.

Deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés : $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2<\left(\sqrt[3]{b}\right)^2$. En ajoutant membre à membre $2\sqrt[3]{a}+4<2\sqrt[3]{b}+4$, on obtient $u(a)<u(b)$. Ces deux réels sont strictement positifs, donc :

$$f(a)=\frac{1}{u(a)}>\frac{1}{u(b)}=f(b).$$

Limite en $+\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt[3]{x}$ tend vers $+\infty$, donc $u(x)$ aussi, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Image. f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, avec $f(0)=\dfrac{1}{u(0)}=\dfrac{1}{4}$, valeur atteinte ; la limite 0 en $+\infty$ n'est pas atteinte. Donc :

$$f\big([0,+\infty[\big)=\left]0,\frac{1}{4}\right].$$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, et $f\big([0,+\infty[\big)=\left]0,\dfrac{1}{4}\right]$.

4. 0,5 pts

Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation $f(x)=\dfrac{1}{19}$.

INDICE

Avec la question 2, pose $t=\sqrt[3]{x}$: l'équation devient une équation du second degré en t. Le point délicat : t est positif, ce qui écarte une racine.

CORRIGÉ

Soit $x\geq 0$ et $t=\sqrt[3]{x}$; alors $t\geq 0$. D'après la question 2, $f(x)=\dfrac{1}{19}$ équivaut à $u(x)=19$, et :

$$\begin{aligned} & u(x)=19 \\ \iff\ & t^2+2t-15=0 \\ \iff\ & (t-3)(t+5)=0. \end{aligned}$$

Choix de la racine. Les solutions réelles sont $t=3$ et $t=-5$. Comme $t\geq 0$, seule $t=3$ convient : $\sqrt[3]{x}=3$, soit $x=3^3=27$.

Contrôle. Avec la définition, $f(27)=\dfrac{3-2}{27-8}=\dfrac{1}{19}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $[0,+\infty[$ est $\{27\}$.

5. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$x^{\frac{2}{3}} f(x) = \frac{1}{1 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}}.$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} f(x)$.

INDICE

Pour $x > 0$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$. Divise le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{2}{3}}$, avec les règles de calcul sur les puissances rationnelles.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

Écriture avec des puissances. On a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$. Par la question 2 :

$$x^{\frac{2}{3}} f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4}.$$

Division par $x^{\frac{2}{3}} > 0$. Les règles de calcul sur les puissances rationnelles donnent $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$ et $\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$. En divisant le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{2}{3}}$, on obtient l'égalité demandée.

Limite en $+\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ tend vers $+\infty$; donc $x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ tend vers 0, et $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2$ aussi. Le dénominateur tend vers 1.

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $x^{\frac{2}{3}} f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} f(x) = 1$.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$0 < \frac{1}{4} - f(x) < \frac{\sqrt[3]{x}}{8}.$$

En déduire que $\frac{19}{80} < f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \left[0, 10^{-3}\right]$.

INDICE

Avec $t = \sqrt[3]{x} > 0$, réduis $\frac{1}{4} - \frac{1}{t^2 + 2t + 4}$ au même dénominateur, puis compare le résultat à $\frac{t}{8}$ en multipliant par un réel strictement positif bien choisi.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$ et $t = \sqrt[3]{x}$; alors $t > 0$ et $t^2 + 2t + 4 > 0$.

Réduction au même dénominateur. Par la question 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - f(x) &= \frac{t^2 + 2t + 4 - 4}{4\left(t^2 + 2t + 4\right)} \\ &= \frac{t(t+2)}{4\left(t^2 + 2t + 4\right)}. \end{aligned}$$

Ce quotient est strictement positif, car $t > 0$: $\frac{1}{4} - f(x) > 0$.

Comparaison avec $\frac{t}{8}$. On multiplie les deux membres par le réel strictement positif $\frac{8\left(t^2 + 2t + 4\right)}{t}$, ce qui conserve l'ordre :

$$\begin{aligned} & \frac{t(t+2)}{4\left(t^2 + 2t + 4\right)} < \frac{t}{8} \\ \iff\ & 2(t+2) < t^2 + 2t + 4 \\ \iff\ & 0 < t^2. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie, car $t \neq 0$. Donc $\frac{1}{4} - f(x) < \frac{\sqrt[3]{x}}{8}$.

Encadrement près de 0. Si $0 < x \leq 10^{-3}$, la croissance de la racine cubique donne $\sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{10^{-3}} = 10^{-1}$. Donc :

$$\frac{1}{4} - f(x) < \frac{10^{-1}}{8} = \frac{1}{80},$$

soit $f(x) > \frac{1}{4} - \frac{1}{80} = \frac{19}{80}$; de plus $f(x) < \frac{1}{4}$. Enfin $f(0) = \frac{1}{4}$, et $\frac{19}{80} < \frac{1}{4}$.

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $0 < \frac{1}{4} - f(x) < \frac{\sqrt[3]{x}}{8}$; et $\frac{19}{80} < f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \left[0, 10^{-3}\right]$.

7. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-\frac{1}{4}}{\sqrt[3]{x}}$, en nommant les deux limites composées.

INDICE

La question 6 donne une écriture de $\dfrac{1}{4}-f(x)$ en fonction de $t=\sqrt[3]{x}$. Cherche d'abord la limite de t quand x tend vers 0 par la droite, puis celle de la fonction de t obtenue.

CORRIGÉ

Soit $x>0$ et $t=\sqrt[3]{x}>0$.

Écriture en fonction de t. En divisant par t le résultat de la question 6 :

$$\frac{f(x)-\frac{1}{4}}{\sqrt[3]{x}}=v(t),$$

où v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(t)=-\frac{t+2}{4\left(t^2+2t+4\right)}.$$

Les deux limites.

- Lorsque x tend vers 0 par la droite, $\sqrt[3]{x}$ tend vers $\sqrt[3]{0}=0$, par continuité de la racine cubique en 0.
- Le dénominateur de la fonction rationnelle v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, car $t^2+2t+4=(t+1)^2+3$: v est continue en 0, et $\lim\limits_{t\to 0} v(t)=v(0)=-\dfrac{2}{16}=-\dfrac{1}{8}$.

Par la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-\frac{1}{4}}{\sqrt[3]{x}}=-\frac{1}{8}.$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $-\dfrac{1}{8}$.

Remarque. Le quotient $\dfrac{\frac{1}{4}-f(x)}{\sqrt[3]{x}}$ tend donc vers $\dfrac{1}{8}$ quand x tend vers 0 par la droite. Soit c un réel tel que $c<\dfrac{1}{8}$: ce quotient est strictement supérieur à c dès que $x>0$ est assez proche de 0 ; pour ces réels x, $\dfrac{1}{4}-f(x)>c\sqrt[3]{x}$, car $\sqrt[3]{x}>0$. Le coefficient $\dfrac{1}{8}$ de la question 6 ne peut donc pas être remplacé par un coefficient plus petit.