BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Entraînement	6

Exercice 1

Une solution unique, puis encadrée par dichotomie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + x - 4.$$

1.

Justifie que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour la continuité, reconnais une famille usuelle. Pour la stricte croissance, vois f comme la somme de $x \mapsto 2x^3$ et de $x \mapsto x - 4$.

2.

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1 < \alpha < 2$.

INDICE

Rédige en trois temps sur $[1, 2]$: continuité, stricte monotonie, signes de $f(1)$ et $f(2)$. L'unicité est demandée sur tout $\mathbb{R}$: la stricte croissance sur $\mathbb{R}$ empêche deux réels distincts d'avoir la même image.

3.

Déduis-en le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Compare x à α, puis applique f, qui conserve l'ordre. Rappelle-toi que $f(\alpha) = 0$.

4.

Par deux étapes de dichotomie à partir de $[1, 2]$, détermine un intervalle d'amplitude $0{,}25$ qui contient α.

INDICE

Calcule f au milieu $1{,}5$ et regarde son signe : d'après la question 3, il situe α par rapport à $1{,}5$. Recommence avec le nouvel intervalle. Le point délicat : $f(m) > 0$ place α à gauche de m.

Exercice 2

Bijection et réciproque d'un trinôme

Soit $I =]-\infty, -3]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = x^2 + 6x + 5.$$

1.

Vérifie que, pour tout $x \in I$, $f(x) = (x+3)^2 - 4$, puis montre que f est strictement décroissante sur I.

INDICE

Développe $(x+3)^2 - 4$. Pour le sens de variation, prends $a < b \leq -3$ et regarde les signes de $a+3$ et $b+3$. Le point délicat : élever au carré deux nombres négatifs renverse leur ordre.

2.

Montre que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que tu préciseras.

INDICE

Vérifie les deux hypothèses du théorème de la bijection. Pour J : I est fermé en -3 et ouvert du côté de $-\infty$, d'où une valeur d'un côté et une limite de l'autre, rangées selon la décroissance.

3.

Détermine $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

INDICE

Pour $x \in J$ et $y \in I$, résous $f(y) = x$, c'est-à-dire $(y+3)^2 = x + 4$. Deux candidats apparaissent : garde celui qui respecte $y \leq -3$.

4.

Calcule $f^{-1}(5)$, et contrôle ton résultat en calculant une image par f.

INDICE

Remplace x par 5 dans l'expression trouvée. Pour contrôler, calcule l'image du résultat par f : tu dois retrouver 5, et le résultat doit appartenir à I.

Exercice 3

Relations entre arctangentes

1.

Montre que, pour tout réel $x > 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

INDICE

Pose $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et vise $\theta = \arctan \frac{1}{x}$. Deux faits sont à établir : situer θ, puis calculer $\tan \theta$ grâce à $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$.

2.

Déduis-en la valeur de $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour tout réel $x < 0$.

INDICE

Si $x < 0$, alors $-x > 0$: applique la question 1 au réel $-x$, puis utilise l'imparité de $\arctan$.

3.

Montre que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

INDICE

Pose $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{3}$. Encadre d'abord $a + b$ grâce à la croissance de $\arctan$ et à $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Calcule ensuite $\tan(a + b)$ par la formule d'addition.

4.

Déduis des questions 1 et 3 la valeur de $\arctan 2 + \arctan 3$.

INDICE

La question 1 relie $\arctan 2$ à $\arctan \frac{1}{2}$, et $\arctan 3$ à $\arctan \frac{1}{3}$. Additionne les deux égalités obtenues.

Exercice 4

Indéterminations avec des racines n-ièmes

Calcule les trois limites suivantes.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right)$$

INDICE

C'est une forme « $+\infty - \infty$ ». Pose $A = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$ et $B = x$, et utilise $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$. Pour le dénominateur, divise par x^2 et étudie $\dfrac{A}{x}$.

2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1 + x} - 1}{x}$$

INDICE

Pose $A = \sqrt[4]{1 + x}$ pour $x \geq -1$: alors $A^4 - 1 = x$. Factorise $A^4 - 1$ par $A - 1$; le quotient se simplifie dès que $x \neq 0$.

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \right)$$

INDICE

Les deux termes tendent vers $+\infty$. Mets en facteur la plus petite puissance, $x^{\frac{1}{2}}$, et calcule l'exposant restant avec les règles des puissances rationnelles.

Exercice 5

Choisir un paramètre pour raccorder deux formules

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ m\sqrt{x + 8} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1.

Montre que, quel que soit m, f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Sur chacun de ces intervalles ouverts, une seule formule sert. Pour le quotient, vérifie que le dénominateur ne s'annule pas ; pour la racine, que $x + 8$ reste positif.

2.

Calcule $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

INDICE

En 1 et à droite de 1, c'est la seconde ligne qui sert. À gauche, factorise le numérateur : 1 en est une racine évidente.

3.

Détermine la valeur de m pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

D'après la question 1, tout se joue en 1. La continuité à droite est acquise : écris la condition de continuité à gauche, puis résous-la en m.

Exercice 6

Le théorème des valeurs intermédiaires sur une fonction auxiliaire

1.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$. Montre qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

INDICE

Introduis la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$: un réel c tel que $f(c) = c$ en est un zéro. Regarde ses signes en 0 et en 1. Le point délicat : ces inégalités sont larges, prévois le cas où l'une des valeurs est nulle.

2.

Déduis-en que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

INDICE

Applique la question 1 à la fonction $\cos$. Il faut vérifier que $\cos x$ reste entre 0 et 1 pour $x \in [0,1]$: sers-toi des variations de $\cos$ sur $[0,\pi]$ et de l'inégalité $1 < \dfrac{\pi}{2}$.

3.

Soit u une fonction continue sur $[0,2]$ telle que $u(0) = u(2)$. Montre qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $u(c+1) = u(c)$.

INDICE

Introduis la fonction $x \mapsto u(x+1) - u(x)$ sur $[0,1]$, et calcule la somme de ses valeurs en 0 et en 1. Deux réels de somme nulle sont de signes contraires, ou tous deux nuls.