BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Entraînement	6

Exercice 1

Une solution unique, puis encadrée par dichotomie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + x - 4.$$

1.

Justifie que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour la continuité, reconnais une famille usuelle. Pour la stricte croissance, vois f comme la somme de $x \mapsto 2x^3$ et de $x \mapsto x - 4$.

CORRIGÉ

Continuité. f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Stricte croissance. Les fonctions $x \mapsto 2x^3$ et $x \mapsto x - 4$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors $2a^3 < 2b^3$ et $a - 4 < b - 4$; en additionnant membre à membre :

$$f(a) < f(b).$$

Conclusion. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1 < \alpha < 2$.

INDICE

Rédige en trois temps sur $[1, 2]$: continuité, stricte monotonie, signes de $f(1)$ et $f(2)$. L'unicité est demandée sur tout $\mathbb{R}$: la stricte croissance sur $\mathbb{R}$ empêche deux réels distincts d'avoir la même image.

CORRIGÉ

Existence dans $[1, 2]$. Sur $[1, 2]$, f est continue et strictement croissante (question 1). De plus :

$$f(1) = 2 + 1 - 4 = -1,$$
$$f(2) = 16 + 2 - 4 = 14.$$

Donc $f(1) \times f(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, dans son cas strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$, et $\alpha \in \,]1, 2[$ puisque $f(1) \neq 0$ et $f(2) \neq 0$.

Unicité dans $\mathbb{R}$. Soit β un réel tel que $f(\beta) = 0$. Si $\beta \neq \alpha$, la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$ donne $f(\beta) \neq f(\alpha)$, ce qui contredit $f(\beta) = 0 = f(\alpha)$. Donc $\beta = \alpha$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $1 < \alpha < 2$.

3.

Déduis-en le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Compare x à α, puis applique f, qui conserve l'ordre. Rappelle-toi que $f(\alpha) = 0$.

CORRIGÉ

On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(\alpha) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$, soit $f(x) < 0$.
- Si $x = \alpha$, alors $f(x) = 0$.
- Si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$, soit $f(x) > 0$.

Conclusion. $f(x)$ est strictement négatif pour $x \in]-\infty, \alpha[$, nul pour $x = \alpha$ et strictement positif pour $x \in]\alpha, +\infty[$.

4.

Par deux étapes de dichotomie à partir de $[1, 2]$, détermine un intervalle d'amplitude $0{,}25$ qui contient α.

INDICE

Calcule f au milieu $1{,}5$ et regarde son signe : d'après la question 3, il situe α par rapport à $1{,}5$. Recommence avec le nouvel intervalle. Le point délicat : $f(m) > 0$ place α à gauche de m.

CORRIGÉ

D'après la question 3, $f(x) > 0$ si et seulement si $x > \alpha$: le signe de f au milieu de l'intervalle situe α.

Première étape. Le milieu de $[1, 2]$ est $1{,}5$ et :

$$\begin{aligned} f(1{,}5) &= 2 \times 3{,}375 \\ &\quad + 1{,}5 - 4 \\ &= 4{,}25. \end{aligned}$$

Ainsi $f(1{,}5) > 0$, donc $\alpha < 1{,}5$: $1 < \alpha < 1{,}5$.

Deuxième étape. Le milieu de $[1, 1{,}5]$ est $1{,}25$ et :

$$\begin{aligned} f(1{,}25) &= 2 \times 1{,}953125 \\ &\quad + 1{,}25 - 4 \\ &= 1{,}15625. \end{aligned}$$

Ainsi $f(1{,}25) > 0$, donc $\alpha < 1{,}25$: $1 < \alpha < 1{,}25$.

Conclusion. L'intervalle $]1, 1{,}25[$ contient α ; son amplitude vaut $\dfrac{2-1}{2^2} = 0{,}25$.

Exercice 2

Bijection et réciproque d'un trinôme

Soit $I =]-\infty, -3]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = x^2 + 6x + 5.$$

1.

Vérifie que, pour tout $x \in I$, $f(x) = (x+3)^2 - 4$, puis montre que f est strictement décroissante sur I.

INDICE

Développe $(x+3)^2 - 4$. Pour le sens de variation, prends $a < b \leq -3$ et regarde les signes de $a+3$ et $b+3$. Le point délicat : élever au carré deux nombres négatifs renverse leur ordre.

CORRIGÉ

Forme canonique. Soit $x \in I$. En développant, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donc :

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 4 &= x^2 + 6x + 5 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Sens de variation. Soient a et b dans I tels que $a < b$. Alors $a + 3 < b + 3 \leq 0$, donc $-(a+3) > -(b+3) \geq 0$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :

$$(a+3)^2 > (b+3)^2.$$

En retranchant 4 aux deux membres, $f(a) > f(b)$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) = (x+3)^2 - 4$, et f est strictement décroissante sur I.

2.

Montre que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que tu préciseras.

INDICE

Vérifie les deux hypothèses du théorème de la bijection. Pour J : I est fermé en -3 et ouvert du côté de $-\infty$, d'où une valeur d'un côté et une limite de l'autre, rangées selon la décroissance.

CORRIGÉ

Hypothèses du théorème de la bijection. f est une fonction polynôme, donc continue sur l'intervalle I, et elle y est strictement décroissante (question 1). Donc f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Calcul de J. On a $f(-3) = -4$ et :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$

L'image de l'intervalle I par une fonction continue et strictement décroissante est donc :

$$\begin{aligned} J &= \left[f(-3), \lim_{x \to -\infty} f(x) \right[\\ &= [-4, +\infty[. \end{aligned}$$

Conclusion. f réalise une bijection de I sur $J = [-4, +\infty[$.

3.

Détermine $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

INDICE

Pour $x \in J$ et $y \in I$, résous $f(y) = x$, c'est-à-dire $(y+3)^2 = x + 4$. Deux candidats apparaissent : garde celui qui respecte $y \leq -3$.

CORRIGÉ

Soient $x \in J$ et $y \in I$. D'après la question 1, l'équation $f(y) = x$ équivaut à :

$$(y+3)^2 = x + 4.$$

Comme $x + 4 \geq 0$, cette égalité équivaut à $y + 3 = \sqrt{x+4}$ ou $y + 3 = -\sqrt{x+4}$.

Or $y \in I$ impose $y + 3 \leq 0$. La première égalité donnerait $y + 3 \geq 0$: elle n'est compatible que si $x = -4$, cas où elle coïncide avec la seconde. Il reste $y + 3 = -\sqrt{x+4}$, soit $y = -3 - \sqrt{x+4}$, qui appartient bien à I.

Conclusion. Pour tout $x \in [-4, +\infty[$:

$$f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x+4}.$$

4.

Calcule $f^{-1}(5)$, et contrôle ton résultat en calculant une image par f.

INDICE

Remplace x par 5 dans l'expression trouvée. Pour contrôler, calcule l'image du résultat par f : tu dois retrouver 5, et le résultat doit appartenir à I.

CORRIGÉ

D'après la question 3, avec $x = 5 \in J$:

$$f^{-1}(5) = -3 - \sqrt{9} = -6.$$

Contrôle. $-6 \in I$ et $f(-6) = 36 - 36 + 5 = 5$.

Conclusion. $f^{-1}(5) = -6$.

Exercice 3

Relations entre arctangentes

1.

Montre que, pour tout réel $x > 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

INDICE

Pose $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et vise $\theta = \arctan \frac{1}{x}$. Deux faits sont à établir : situer θ, puis calculer $\tan \theta$ grâce à $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Posons $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan x$; il s'agit de montrer que $\theta = \arctan \frac{1}{x}$.

Encadrement de θ. La fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $0 = \arctan 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. Par suite $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; en particulier $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Calcul de $\tan \theta$. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \neq 0$, donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\tan t}.$$

Avec $t = \arctan x$, qui appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan \theta = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x}.$$

Conclusion. θ est le réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{x}$, donc $\theta = \arctan \frac{1}{x}$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

2.

Déduis-en la valeur de $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x < 0$.

INDICE

Si $x < 0$, alors $-x > 0$: applique la question 1 au réel $-x$, puis utilise l'imparité de $\arctan$.

CORRIGÉ

Soit $x < 0$. Alors $-x > 0$ et $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$. La question 1, appliquée au réel $-x$, puis l'imparité de $\arctan$ donnent :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \arctan(-x) \\ &\quad + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\arctan x - \arctan\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x < 0$:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

3.

Montre que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

INDICE

Pose $a = \arctan\dfrac{1}{2}$ et $b = \arctan\dfrac{1}{3}$. Encadre d'abord $a + b$ grâce à la croissance de $\arctan$ et à $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Calcule ensuite $\tan(a+b)$ par la formule d'addition.

CORRIGÉ

Posons $a = \arctan\dfrac{1}{2}$ et $b = \arctan\dfrac{1}{3}$; il s'agit de montrer que $a + b = \dfrac{\pi}{4}$.

Encadrement de $a + b$. On a $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$ et $\arctan$ est strictement croissante, donc $0 < b < a < \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi $0 < a + b < \dfrac{\pi}{2}$.

Calcul de $\tan(a+b)$. On a $\tan a = \dfrac{1}{2}$, $\tan b = \dfrac{1}{3}$ et $\tan a \tan b = \dfrac{1}{6} \neq 1$. D'après la formule d'addition :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $a + b$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(a+b) = 1$, donc $a + b = \arctan 1$, c'est-à-dire :

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

4.

Déduis des questions 1 et 3 la valeur de $\arctan 2 + \arctan 3$.

INDICE

La question 1 relie $\arctan 2$ à $\arctan \dfrac{1}{2}$, et $\arctan 3$ à $\arctan \dfrac{1}{3}$. Additionne les deux égalités obtenues.

CORRIGÉ

D'après la question 1, appliquée à $x = 2$ puis à $x = 3$:

$$\arctan 2 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2},$$
$$\arctan 3 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3}.$$

En additionnant, puis avec la question 3 :

$$\begin{aligned} &\arctan 2 + \arctan 3 \\ &= \pi - \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3} \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 4

Indéterminations avec des racines n-ièmes

Calcule les trois limites suivantes.

1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)$$

INDICE

C'est une forme « $+\infty-\infty$ ». Pose $A=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$ et $B=x$, et utilise $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$. Pour le dénominateur, divise par x^2 et étudie $\dfrac{A}{x}$.

CORRIGÉ

C'est une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ». Soit $x>0$; posons $A=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$ et $B=x$.

Expression conjuguée. On a $A>0$ et $B>0$, donc $A^2+AB+B^2>0$. Comme $A^3-B^3=2x^2$, l'identité $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$ donne, après division du numérateur et du dénominateur par $x^2>0$:

$$\begin{aligned}A-B&=\frac{2x^2}{A^2+AB+B^2}\\&=\frac{2}{\left(\frac{A}{x}\right)^2+\frac{A}{x}+1}.\end{aligned}$$

Limite de $\dfrac{A}{x}$. Comme $x>0$:

$$\frac{A}{x}=\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2}{x^3}}=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}.$$

Or $1+\dfrac{2}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, et la racine cubique est continue en 1 : par composition, $\dfrac{A}{x}$ tend vers 1.

Conclusion. Par opérations sur les limites :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)\\&=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$$

INDICE

Pose $A=\sqrt[4]{1+x}$ pour $x\geq -1$: alors $A^4-1=x$. Factorise A^4-1 par $A-1$; le quotient se simplifie dès que $x\neq 0$.

CORRIGÉ

Soit $x\geq -1$ tel que $x\neq 0$; posons $A=\sqrt[4]{1+x}$.

Simplification. On a $A\geq 0$, $A^4=1+x$, et $A\neq 1$ car $x\neq 0$. De plus $A^3+A^2+A+1\geq 1>0$. Comme $x=A^4-1$ et $A^4-1=(A-1)\left(A^3+A^2+A+1\right)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\\&=\frac{A-1}{A^4-1}\\&=\frac{1}{A^3+A^2+A+1}.\end{aligned}$$

Limite de A. La fonction $x\mapsto\sqrt[4]{1+x}$ est continue en 0 et vaut 1 en 0 : A tend vers 1 quand x tend vers 0.

Conclusion. Par opérations sur les limites :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}\\&=\frac{1}{1+1+1+1}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$$

INDICE

Les deux termes tendent vers $+\infty$. Mets en facteur la plus petite puissance, $x^{\frac{1}{2}}$, et calcule l'exposant restant avec les règles des puissances rationnelles.

CORRIGÉ

Les deux termes tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ». Soit $x>0$.

Factorisation. D'après les règles de calcul sur les puissances rationnelles, $x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{6}}$. Donc :

$$x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left(\sqrt[6]{x}-1\right).$$

Passage à la limite. Quand x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ et $\sqrt[6]{x}$ tendent vers $+\infty$, donc $\sqrt[6]{x}-1$ aussi.

Conclusion. Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)=+\infty.$$

Exercice 5

Choisir un paramètre pour raccorder deux formules

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ m\sqrt{x+8} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1.

Montre que, quel que soit m, f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Sur chacun de ces intervalles ouverts, une seule formule sert. Pour le quotient, vérifie que le dénominateur ne s'annule pas ; pour la racine, que $x+8$ reste positif.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 1[$**.** Pour tout $x < 1$, $f(x)$ est le quotient de x^2+2x-3 par $x-1$: deux fonctions polynômes, et le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc f est continue sur $]-\infty, 1[$.

Sur $]1, +\infty[$**.** Pour tout $x > 1$, $f(x) = m\sqrt{x+8}$. La fonction $x \mapsto x+8$ est continue et strictement positive sur cet intervalle, donc $x \mapsto \sqrt{x+8}$ y est continue, ainsi que son produit par la constante m.

Conclusion. Quel que soit m, f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

2.

Calcule $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

INDICE

En 1 et à droite de 1, c'est la seconde ligne qui sert. À gauche, factorise le numérateur : 1 en est une racine évidente.

CORRIGÉ

Valeur en 1**.** D'après la seconde ligne, $f(1) = m\sqrt{9} = 3m$.

Limite à droite. Pour $x \geq 1$, $f(x) = m\sqrt{x+8}$, et la fonction $x \mapsto m\sqrt{x+8}$ est continue en 1. Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3m$: f est continue à droite en 1, pour tout m.

Limite à gauche. Pour $x < 1$, $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ et $x-1 \neq 0$, donc $f(x) = x+3$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$.

Conclusion. $f(1) = 3m$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3m$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$.

3.

Détermine la valeur de m pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

D'après la question 1, tout se joue en 1. La continuité à droite est acquise : écris la condition de continuité à gauche, puis résous-la en m.

CORRIGÉ

D'après la question 1, f est continue en tout réel différent de 1. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en 1, c'est-à-dire à droite et à gauche en 1.

À droite. La continuité à droite en 1 a lieu pour tout m (question 2).

À gauche. La continuité à gauche en 1 s'écrit $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$, soit $4 = 3m$.

Conclusion. f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$m = \frac{4}{3}.$$

Exercice 6

Le théorème des valeurs intermédiaires sur une fonction auxiliaire

1.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$. Montre qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

INDICE

Introduis la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$: un réel c tel que $f(c) = c$ en est un zéro. Regarde ses signes en 0 et en 1. Le point délicat : ces inégalités sont larges, prévois le cas où l'une des valeurs est nulle.

CORRIGÉ

Posons, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il s'agit de trouver $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$.

Continuité. g est continue sur $[0,1]$, comme différence des fonctions continues f et $x \mapsto x$.

Signes aux bornes. $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$.

Théorème des valeurs intermédiaires. Appliqué à g, continue sur le segment $[0,1]$, et à la valeur 0, il fournit un réel $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. Les cas $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$ sont inclus : c vaut alors 0 ou 1.

Conclusion. Il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

2.

Déduis-en que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

INDICE

Applique la question 1 à la fonction $\cos$. Il faut vérifier que $\cos x$ reste entre 0 et 1 pour $x \in [0,1]$: sers-toi des variations de $\cos$ sur $[0,\pi]$ et de l'inégalité $1 < \dfrac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Hypothèses de la question 1. La fonction $\cos$ est continue sur $[0,1]$. Elle est décroissante sur $[0,\pi]$, qui contient $[0,1]$; donc, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0 = 1.$$

De plus $0 < 1 < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\cos 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \cos x \leq 1$.

Conclusion. La question 1, appliquée à $\cos$, fournit un réel $c \in [0,1]$ tel que $\cos c = c$: l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

3.

Soit u une fonction continue sur $[0,2]$ telle que $u(0)=u(2)$. Montre qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $u(c+1)=u(c)$.

INDICE

Introduis la fonction $x\mapsto u(x+1)-u(x)$ sur $[0,1]$, et calcule la somme de ses valeurs en 0 et en 1. Deux réels de somme nulle sont de signes contraires, ou tous deux nuls.

CORRIGÉ

Posons, pour tout $x\in[0,1]$, $w(x)=u(x+1)-u(x)$; on cherche un zéro de w dans $[0,1]$.

Continuité. Soit $x\in[0,1]$: x et $x+1$ appartiennent à $[0,2]$, donc $w(x)$ est bien défini. La fonction $x\mapsto u(x+1)$ est continue sur $[0,1]$, comme composée de $x\mapsto x+1$ et de u ; donc w est continue sur $[0,1]$.

Valeurs aux bornes.

$$\begin{aligned} w(0)+w(1) &= u(1)-u(0) \\ &\quad + u(2)-u(1) \\ &= u(2)-u(0)=0. \end{aligned}$$

Donc $w(1)=-w(0)$: 0 est compris entre $w(0)$ et $w(1)$.

Théorème des valeurs intermédiaires. Appliqué à w sur le segment $[0,1]$, il fournit un réel $c\in[0,1]$ tel que $w(c)=0$.

Conclusion. Il existe $c\in[0,1]$ tel que $u(c+1)=u(c)$.