BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Application	8

Exercice 1

Continuité en un point de raccordement

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{18} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1.

Calcule $f(2)$, puis $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$. Que peux-tu en conclure à gauche de 2 ?

INDICE

Pour $x \leq 2$, seule la première ligne de l'accolade sert : c'est une fonction affine. Quelle propriété des fonctions affines donne sa limite en 2 ?

2.

Montre que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{6}$.

INDICE

En 2, le quotient prend la forme « $\dfrac{0}{0}$ ». Multiplie en haut et en bas par $\sqrt{x+7}+3$ pour faire apparaître une différence de carrés. Le point délicat : la simplification par $x-2$ n'est permise que parce que $x > 2$.

3.

Conclus sur la continuité de f en 2, en citant la propriété utilisée.

INDICE

Tu disposes maintenant de la valeur $f(2)$ et des deux limites latérales. Compare chacune à $f(2)$, puis cherche la propriété qui relie la continuité en un point à la continuité des deux côtés.

Exercice 2

Prolonger une fraction rationnelle

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6}.$$

1.

Détermine l'ensemble de définition D_h de h.

INDICE

Cherche les réels qui annulent le dénominateur : c'est un trinôme du second degré, dont tu peux calculer le discriminant.

2.

Montre que h admet une limite finie en -3. Définis ensuite, sur $]-\infty, 2[$, le prolongement par continuité g de h en -3.

INDICE

Le numérateur s'annule aussi en -3 : factorise-le par $x + 3$ avec l'identité $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$. Simplifie, puis calcule la limite de la fraction obtenue. Pour g, écris une accolade à deux lignes.

3.

La fonction h peut-elle être prolongée par continuité en 2 ? Justifie.

INDICE

Reprends la forme simplifiée et regarde ce que deviennent son numérateur et son dénominateur quand x tend vers 2. Le point délicat : le signe de $x - 2$ dépend du côté.

Exercice 3

Continuité sur un intervalle, étage par étage

On considère les fonctions u, v et w définies par :

$$u(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10},$$
$$v(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}{2x - 1},$$
$$w(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 - 6x + 10}\right).$$

1.

Montre que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout réel x, puis que u est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris le trinôme sous forme canonique. Pour passer à la racine, la quantité placée dessous doit être positive sur tout $\mathbb{R}$, pas seulement en quelques points.

2.

Détermine l'ensemble de définition de v, et justifie que v est continue sur chacun des intervalles qui le composent.

INDICE

Le numérateur est $u(x)$, déjà étudié. Le seul obstacle est le dénominateur : trouve où il s'annule. Applique ensuite la règle du quotient sur chaque intervalle où il ne s'annule pas.

3.

Justifie que w est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

w est une composée : repère la fonction intérieure et la fonction extérieure. Vérifie que les valeurs de la fonction intérieure restent dans un intervalle où la fonction extérieure est continue.

Exercice 4

Trois limites par composition

Calcule les limites suivantes. À chaque fois, nomme les deux limites que tu composes.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}}$$

INDICE

La fonction intérieure est la fraction sous la racine : trouve sa limite en $+\infty$ en factorisant par x en haut et en bas. Vérifie ensuite que la racine carrée est continue en la limite trouvée.

2.

$$\lim_{x \to +\infty} 3x \sin \frac{2}{x}$$

INDICE

Pose $X = \dfrac{2}{x}$: quand x tend vers $+\infty$, vers quoi tend X ? Exprime ensuite $3x$ à l'aide de X ; tu dois retrouver une limite usuelle de première année.

3.

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

INDICE

Cherche d'abord la limite à droite en 1 de la fraction : le numérateur tend vers 2, et le dénominateur tend vers 0 en restant positif. Compose ensuite avec le comportement de $\sqrt{y}$ quand y tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Une équation et les valeurs intermédiaires

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$.

1.

Justifie que q est continue sur $[1, 2]$, puis calcule $q(1)$ et $q(2)$.

INDICE

Quelle famille de fonctions usuelles est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Pour les valeurs, remplace puissance par puissance.

2.

Quelle est la nature de l'image $q([1, 2])$? Montre qu'elle contient l'intervalle $[2, 8]$.

INDICE

Le théorème de l'image d'un intervalle par une fonction continue te dit quelle forme a $q([1, 2])$. Cette image contient $q(1)$ et $q(2)$; or un intervalle contient tout ce qui est compris entre deux de ses points.

3.

Montre que l'équation $x^3 - x^2 + 2x = 5$ admet au moins une solution dans $]1, 2[$.

INDICE

Ton outil : le théorème des valeurs intermédiaires, pour $k = 5$. Contrôle ses deux hypothèses. Explique ensuite pourquoi la solution trouvée n'est ni 1 ni 2.

4.

Montre que cette solution est unique.

INDICE

Étudie le sens de variation de q : calcule $q'(x)$ et trouve son signe grâce au discriminant. Une fonction strictement croissante ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 6

Images d'intervalles par une fonction homographique

Soit f la fonction définie sur $I =]-3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

1.

Montre que, pour tout $x \in I$, $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$. Déduis-en que f est continue et strictement croissante sur I.

INDICE

Réduis $2 - \dfrac{7}{x+3}$ au même dénominateur. Pour le sens de variation, pars de deux réels $-3 < a < b$ et compare $\dfrac{7}{a+3}$ et $\dfrac{7}{b+3}$; attention au sens de l'inégalité quand on passe aux inverses.

2.

Calcule $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Sers-toi de l'écriture $2 - \dfrac{7}{x+3}$. En -3 à droite, le dénominateur $x+3$ tend vers 0 : précise son signe.

3.

Détermine $f(I)$, $f\left([0, +\infty[\right)$ et $f\left(]-3, 2]\right)$.

INDICE

Pour une fonction continue strictement croissante, une borne fermée donne une valeur et une borne ouverte donne une limite. Calcule $f(0)$ et $f(2)$, et garde les crochets ouverts du côté des limites.

4.

Justifie que f réalise une bijection de I sur $f(I)$, puis donne $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$.

INDICE

Les deux hypothèses du théorème de la bijection sont déjà établies à la question 1. Pour l'expression, pars de $2 - \dfrac{7}{y+3} = x$ avec $y \in I$ et isole $y+3$. Le point délicat : contrôle que le résultat appartient bien à I.

Exercice 7

Racines n-ièmes et puissances rationnelles

1.

Écris sous la forme d'un entier ou d'une fraction :

- $A = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{4}$;
- $B = \dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$;
- $C = 81^{\frac{3}{4}}$;
- $D = 32^{-\frac{2}{5}}$.

INDICE

Regroupe d'abord sous une même racine, pour le produit et le quotient. Pour une puissance rationnelle, prends la racine avant la puissance : $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$ pour $x > 0$. Un exposant négatif donne un inverse.

2.

Pour $x > 0$, simplifie $E = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}$.

INDICE

Écris chaque racine comme une puissance rationnelle de x, ce qui est permis car $x > 0$. Additionne et soustrais ensuite les exposants, sur un dénominateur commun.

3.

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $x^5 = -243$, $x^4 = \dfrac{625}{16}$, $x^6 = -1$ et $x^3 = 10$.

INDICE

Regarde d'abord la parité de l'exposant, puis le signe du second membre. Avec un exposant impair et un second membre négatif, la solution s'écrit avec un signe moins devant la racine d'un nombre positif.

Exercice 8

Valeurs d'arctangente

1.

Calcule $\arctan(-1)$ et $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$.

INDICE

La fonction $\arctan$ est impaire. Il reste à reconnaître deux valeurs remarquables de la tangente dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2.

On admet que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Déduis-en $\arctan\left(\sqrt{2} - 1\right)$, puis $\arctan\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

INDICE

Pour conclure $\theta = \arctan x$, il faut deux faits : θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan\theta = x$. Pour la seconde valeur, remarque que $1 - \sqrt{2}$ est l'opposé de $\sqrt{2} - 1$.

3.

Calcule $\arctan\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)$, $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$ et $\arctan(\tan 2)$.

INDICE

L'égalité $\arctan(\tan x) = x$ n'est permise que si x appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sinon, ajoute ou retranche π, ce qui ne change pas la tangente, jusqu'à y revenir. Pour 2, compare avec $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.