BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limites, continuité et fonctions réciproques	Application	8

Exercice 1

Continuité en un point de raccordement

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{18} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1.

Calcule $f(2)$, puis $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$. Que peux-tu en conclure à gauche de 2 ?

INDICE

Pour $x \leq 2$, seule la première ligne de l'accolade sert : c'est une fonction affine. Quelle propriété des fonctions affines donne sa limite en 2 ?

CORRIGÉ

Valeur en 2. Comme $2 \leq 2$, on utilise la première ligne de l'accolade :

$$f(2) = \frac{2+1}{18} = \frac{1}{6}.$$

Limite à gauche. Pour tout $x < 2$, $f(x) = \dfrac{x+1}{18}$. La fonction affine $x \mapsto \dfrac{x+1}{18}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 2. Donc :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{6}.$$

Conclusion. $f(2) = \dfrac{1}{6}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$: f est continue à gauche en 2.

2.

Montre que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{6}$.

INDICE

En 2, le quotient prend la forme « $\dfrac{0}{0}$ ». Multiplie en haut et en bas par $\sqrt{x+7}+3$ pour faire apparaître une différence de carrés. Le point délicat : la simplification par $x-2$ n'est permise que parce que $x > 2$.

CORRIGÉ

Expression conjuguée. Soit $x > 2$. Posons $s = \sqrt{x+7}$: alors $s^2 = x+7$ et $s+3 > 0$. Multiplions numérateur et dénominateur par $s+3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(s-3)(s+3)}{(x-2)(s+3)} \\ &= \frac{s^2-9}{(x-2)(s+3)} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+3}. \end{aligned}$$

La dernière simplification est permise car $x - 2 \neq 0$. Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}$.

Passage à la limite. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+7}$ est continue en 2, donc $\sqrt{x+7}+3$ tend vers $\sqrt{9}+3 = 6$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{6}$.

3.

Conclus sur la continuité de f en 2, en citant la propriété utilisée.

INDICE

Tu disposes maintenant de la valeur $f(2)$ et des deux limites latérales. Compare chacune à $f(2)$, puis cherche la propriété qui relie la continuité en un point à la continuité des deux côtés.

CORRIGÉ

Continuité à droite. D'après la question 2, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{6} = f(2)$: f est continue à droite en 2.

Continuité à gauche. D'après la question 1, f est continue à gauche en 2.

Propriété utilisée. En un point intérieur à l'ensemble de définition, être continue équivaut à être continue des deux côtés de ce point. Or 2 est intérieur à $\mathbb{R}$.

Conclusion. f est continue à droite et à gauche en 2, donc f est continue en 2.

Exercice 2

Prolonger une fraction rationnelle

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6}.$$

1.

Détermine l'ensemble de définition D_h de h.

INDICE

Cherche les réels qui annulent le dénominateur : c'est un trinôme du second degré, dont tu peux calculer le discriminant.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $h(x)$ existe si et seulement si $x^2 + x - 6 \neq 0$.

Racines du dénominateur. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$. Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3,$$
$$x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Conclusion. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

2.

Montre que h admet une limite finie en -3. Définis ensuite, sur $]-\infty, 2[$, le prolongement par continuité g de h en -3.

INDICE

Le numérateur s'annule aussi en -3 : factorise-le par $x+3$ avec l'identité $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$. Simplifie, puis calcule la limite de la fraction obtenue. Pour g, écris une accolade à deux lignes.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit $x \in D_h$. D'après l'identité $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, avec $a=x$ et $b=3$:

$$\begin{aligned} &x^3+27 \\ &=(x+3)\left(x^2-3x+9\right). \end{aligned}$$

De plus, d'après la question 1 :

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

Comme $x \neq -3$, on simplifie par $x+3$. Pour tout $x \in D_h$:

$$h(x)=\frac{x^2-3x+9}{x-2}.$$

Limite en -3. La fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+9}{x-2}$ est définie en -3, donc continue en -3. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3} h(x) &= \frac{9+9+9}{-5} \\ &= -\frac{27}{5}. \end{aligned}$$

Prolongement. Cette limite est finie. L'intervalle $]-\infty, 2[$ contient -3, et h y est définie sauf en -3. Le prolongement par continuité de h en -3 est la fonction g définie sur $]-\infty, 2[$ par :

$$g(x)=\begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq -3 \\ -\dfrac{27}{5} & \text{si } x=-3 \end{cases}$$

D'après la factorisation, on a aussi $g(x)=\dfrac{x^2-3x+9}{x-2}$ pour tout $x \in]-\infty, 2[$.

Conclusion. h admet en -3 la limite finie $-\dfrac{27}{5}$, et g est son prolongement par continuité en -3.

3.

La fonction h peut-elle être prolongée par continuité en 2 ? Justifie.

INDICE

Reprends la forme simplifiée et regarde ce que deviennent son numérateur et son dénominateur quand x tend vers 2. Le point délicat : le signe de $x-2$ dépend du côté.

CORRIGÉ

D'après la question 2, pour tout $x \in D_h$, $h(x) = \dfrac{x^2-3x+9}{x-2}$.

Numérateur et dénominateur. Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers $4-6+9=7>0$ et le dénominateur $x-2$ tend vers 0.

Limites latérales.

- À droite de 2, $x-2>0$, donc $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = +\infty$.
- À gauche de 2, $x-2<0$, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$.

Conclusion. h n'admet pas de limite finie en 2 : elle ne peut pas être prolongée par continuité en 2.

Exercice 3

Continuité sur un intervalle, étage par étage

On considère les fonctions u, v et w définies par :

$$u(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10},$$
$$v(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}{2x - 1},$$
$$w(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 - 6x + 10}\right).$$

1.

Montre que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout réel x, puis que u est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris le trinôme sous forme canonique. Pour passer à la racine, la quantité placée dessous doit être positive sur tout $\mathbb{R}$, pas seulement en quelques points.

CORRIGÉ

Signe du trinôme. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la forme canonique :

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$$
$$\geq 1.$$

En particulier, $x^2 - 6x + 10 > 0$.

Continuité de u. Posons $P(x) = x^2 - 6x + 10$ pour tout réel x. La fonction polynôme P est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or, si une fonction est continue et positive sur un intervalle, sa racine carrée est continue sur cet intervalle. Donc $u = \sqrt{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 10 > 0$, et u est continue sur $\mathbb{R}$.

2.

Détermine l'ensemble de définition de v, et justifie que v est continue sur chacun des intervalles qui le composent.

INDICE

Le numérateur est $u(x)$, déjà étudié. Le seul obstacle est le dénominateur : trouve où il s'annule. Applique ensuite la règle du quotient sur chaque intervalle où il ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $u(x)$ existe (question 1), et $2x-1=0$ si et seulement si $x=\dfrac{1}{2}$. Donc :

$$D_v = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Continuité. Posons $I_1 = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ et $I_2 = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Sur chacun de ces deux intervalles :

- u est continue (question 1) ;
- $x \mapsto 2x-1$ est continue, comme fonction affine, et ne s'annule pas.

D'après la propriété du quotient de deux fonctions continues, v est donc continue sur I_1 et sur I_2.

Conclusion. $D_v = I_1 \cup I_2$, et v est continue sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

3.

Justifie que w est continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

w est une composée : repère la fonction intérieure et la fonction extérieure. Vérifie que les valeurs de la fonction intérieure restent dans un intervalle où la fonction extérieure est continue.

CORRIGÉ

On a $w = \cos \circ u$.

- La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ (question 1).
- La fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, qui contient l'ensemble $u(\mathbb{R})$ des valeurs de u.

D'après la continuité d'une composée, $\cos \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. w est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Trois limites par composition

Calcule les limites suivantes. À chaque fois, nomme les deux limites que tu composes.

1.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}}$$

INDICE

La fonction intérieure est la fraction sous la racine : trouve sa limite en $+\infty$ en factorisant par x en haut et en bas. Vérifie ensuite que la racine carrée est continue en la limite trouvée.

CORRIGÉ

Fonction intérieure. Pour $x > 0$, posons $u(x) = \dfrac{4x+1}{x+2}$; on a $u(x) > 0$. En divisant numérateur et dénominateur par x :

$$u(x) = \frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 4$.

Fonction extérieure. La racine carrée est continue en 4, donc $\lim\limits_{y\to 4} \sqrt{y} = \sqrt{4} = 2$.

Conclusion. Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}} = 2$.

2.

$$\lim_{x\to+\infty} 3x \sin\frac{2}{x}$$

INDICE

Pose $X = \dfrac{2}{x}$: quand x tend vers $+\infty$, vers quoi tend X ? Exprime ensuite $3x$ à l'aide de X ; tu dois retrouver une limite usuelle de première année.

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour $x > 0$, posons $X = \dfrac{2}{x}$. Alors $X > 0$ et $3x = \dfrac{6}{X}$, donc :

$$3x \sin\frac{2}{x} = 6 \times \frac{\sin X}{X}.$$

Les deux limites composées.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, avec $\dfrac{2}{x} \neq 0$ pour tout $x > 0$;
- $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (limite usuelle).

La condition $\dfrac{2}{x} \neq 0$ sert vraiment : la fonction $X \mapsto \dfrac{\sin X}{X}$ n'est pas définie en 0.

Conclusion. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x \sin\dfrac{2}{x} = 6$.

3.

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

INDICE

Cherche d'abord la limite à droite en 1 de la fraction : le numérateur tend vers 2, et le dénominateur tend vers 0 en restant positif. Compose ensuite avec le comportement de $\sqrt{y}$ quand y tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Fonction intérieure. Pour $x > 1$, posons $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; on a $u(x) > 0$. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif. Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = +\infty$.

Fonction extérieure. $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

Conclusion. Par composition, $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = +\infty$.

Exercice 5

Une équation et les valeurs intermédiaires

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$.

1.

Justifie que q est continue sur $[1, 2]$, puis calcule $q(1)$ et $q(2)$.

INDICE

Quelle famille de fonctions usuelles est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Pour les valeurs, remplace puissance par puissance.

CORRIGÉ

Continuité. q est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1, 2]$.

Valeurs.

$$q(1) = 1 - 1 + 2 = 2,$$
$$q(2) = 8 - 4 + 4 = 8.$$

Conclusion. q est continue sur $[1, 2]$, $q(1) = 2$ et $q(2) = 8$.

2.

Quelle est la nature de l'image $q([1, 2])$? Montre qu'elle contient l'intervalle $[2, 8]$.

INDICE

Le théorème de l'image d'un intervalle par une fonction continue te dit quelle forme a $q([1, 2])$. Cette image contient $q(1)$ et $q(2)$; or un intervalle contient tout ce qui est compris entre deux de ses points.

CORRIGÉ

Nature de l'image. q est continue sur le segment $[1, 2]$. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : $q([1, 2])$ est un segment.

Inclusion. Ce segment contient $q(1) = 2$ et $q(2) = 8$. Un intervalle qui contient deux réels contient tous les réels compris entre eux. Donc $[2, 8] \subset q([1, 2])$.

Conclusion. $q([1, 2])$ est un segment, et il contient l'intervalle $[2, 8]$.

3.

Montre que l'équation $x^3 - x^2 + 2x = 5$ admet au moins une solution dans $]1, 2[$.

INDICE

Ton outil : le théorème des valeurs intermédiaires, pour $k = 5$. Contrôle ses deux hypothèses. Explique ensuite pourquoi la solution trouvée n'est ni 1 ni 2.

CORRIGÉ

Hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires.

- q est continue sur $[1, 2]$ (question 1) ;
- 5 est compris entre $q(1) = 2$ et $q(2) = 8$.

Le théorème donne un réel $c \in [1, 2]$ tel que $q(c) = 5$.

La solution n'est pas une borne. $q(1) = 2 \neq 5$ et $q(2) = 8 \neq 5$, donc $c \neq 1$ et $c \neq 2$: $c \in]1, 2[$.

Conclusion. L'équation $x^3 - x^2 + 2x = 5$ admet au moins une solution dans $]1, 2[$.

4.

Montre que cette solution est unique.

INDICE

Étudie le sens de variation de q : calcule $q'(x)$ et trouve son signe grâce au discriminant. Une fonction strictement croissante ne prend jamais deux fois la même valeur.

CORRIGÉ

Signe de q'. q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $q'(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Le discriminant de ce trinôme vaut :

$$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0.$$

Son coefficient dominant 3 est positif, donc $q'(x) > 0$ pour tout réel x. Ainsi q est strictement croissante sur $[1, 2]$.

Unicité. La fonction $x \mapsto q(x) - 5$ est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$; elle vaut -3 en 1 et 3 en 2. Une fonction continue et strictement monotone sur un segment, de signes contraires aux bornes, s'y annule exactement une fois : ici, en un point de $]1, 2[$.

Conclusion. La solution de $x^3 - x^2 + 2x = 5$ dans $]1, 2[$ est unique.

Exercice 6

Images d'intervalles par une fonction homographique

Soit f la fonction définie sur $I =]-3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

1.

Montre que, pour tout $x \in I$, $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$. Déduis-en que f est continue et strictement croissante sur I.

INDICE

Réduis $2 - \dfrac{7}{x+3}$ au même dénominateur. Pour le sens de variation, pars de deux réels $-3 < a < b$ et compare $\dfrac{7}{a+3}$ et $\dfrac{7}{b+3}$; attention au sens de l'inégalité quand on passe aux inverses.

CORRIGÉ

Écriture réduite. Soit $x \in I$. Alors $x + 3 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{7}{x+3} &= \frac{2(x+3) - 7}{x+3} \\ &= \frac{2x-1}{x+3} = f(x). \end{aligned}$$

Continuité. f est une fonction rationnelle, continue sur son ensemble de définition, donc sur l'intervalle I qui y est inclus.

Stricte croissance. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors $0 < a + 3 < b + 3$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\dfrac{7}{a+3} > \dfrac{7}{b+3}$. Par suite :

$$\begin{aligned} f(a) &= 2 - \frac{7}{a+3} \\ &< 2 - \frac{7}{b+3} = f(b). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$; f est continue et strictement croissante sur I.

2.

Calcule $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Sers-toi de l'écriture $2 - \dfrac{7}{x+3}$. En -3 à droite, le dénominateur $x + 3$ tend vers 0 : précise son signe.

CORRIGÉ

On utilise l'écriture $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$ de la question 1.

En -3 à droite. Quand x tend vers -3 par valeurs supérieures, $x + 3$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc $\dfrac{7}{x+3}$ tend vers $+\infty$.

En $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{7}{x+3}$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3.

Détermine $f(I)$, $f\left([0,+\infty[\right)$ et $f\left(]-3,2]\right)$.

INDICE

Pour une fonction continue strictement croissante, une borne fermée donne une valeur et une borne ouverte donne une limite. Calcule $f(0)$ et $f(2)$, et garde les crochets ouverts du côté des limites.

CORRIGÉ

f est continue et strictement croissante sur I, donc sur tout intervalle inclus dans I. Une borne fermée a pour image une valeur de f, une borne ouverte une limite de f.

Image de I. Les deux bornes de I sont ouvertes ; d'après la question 2 :

$$f(I) =]-\infty, 2[\,.$$

Image de $[0,+\infty[$. On a $f(0) = -\dfrac{1}{3}$, et la limite de f en $+\infty$ vaut 2 :

$$f\left([0,+\infty[\right) = \left[-\frac{1}{3}, 2\right[\,.$$

Image de $]-3,2]$. On a $f(2) = \dfrac{3}{5}$, et la limite de f en -3 à droite vaut $-\infty$:

$$f\left(]-3,2]\right) = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right]\,.$$

Conclusion. $f(I) =]-\infty, 2[$, $f\left([0,+\infty[\right) = \left[-\dfrac{1}{3}, 2\right[$ et $f\left(]-3,2]\right) = \left]-\infty, \dfrac{3}{5}\right]$.

4.

Justifie que f réalise une bijection de I sur $f(I)$, puis donne $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$.

INDICE

Les deux hypothèses du théorème de la bijection sont déjà établies à la question 1. Pour l'expression, pars de $2 - \dfrac{7}{y+3} = x$ avec $y \in I$ et isole $y+3$. Le point délicat : contrôle que le résultat appartient bien à I.

CORRIGÉ

Bijection. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I (question 1). D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I) =]-\infty, 2[$ (question 3).

Expression de la réciproque. Soit $x \in]-\infty, 2[$ et $y \in I$. On a $2 - x \neq 0$ et $y + 3 \neq 0$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} & f(y) = x \\ \iff & \frac{7}{y+3} = 2 - x \\ \iff & y + 3 = \frac{7}{2-x} \\ \iff & y = \frac{7}{2-x} - 3. \end{aligned}$$

Ce réel y vérifie $y + 3 = \dfrac{7}{2-x} > 0$, car $2 - x > 0$: il appartient bien à I.

Conclusion. f réalise une bijection de I sur $]-\infty, 2[$ et, pour tout $x \in]-\infty, 2[$:

$$f^{-1}(x) = \frac{7}{2-x} - 3.$$

Exercice 7

Racines n-ièmes et puissances rationnelles

1.

Écris sous la forme d'un entier ou d'une fraction :

- $A = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{4}$;
- $B = \dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$;
- $C = 81^{\frac{3}{4}}$;
- $D = 32^{-\frac{2}{5}}$.

INDICE

Regroupe d'abord sous une même racine, pour le produit et le quotient. Pour une puissance rationnelle, prends la racine avant la puissance : $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$ pour $x > 0$. Un exposant négatif donne un inverse.

CORRIGÉ

Tous les nombres sous les racines sont strictement positifs.

- $A = \sqrt[3]{54 \times 4} = \sqrt[3]{216} = 6$, car $6^3 = 216$.
- $B = \sqrt[4]{\dfrac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$, car $2^4 = 16$.
- $C = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$, car $3^4 = 81$.
- $D = \dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{32}\right)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$, car $2^5 = 32$.

Conclusion. $A = 6$, $B = 2$, $C = 27$ et $D = \dfrac{1}{4}$.

2.

Pour $x > 0$, simplifie $E = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}$.

INDICE

Écris chaque racine comme une puissance rationnelle de x, ce qui est permis car $x > 0$. Additionne et soustrais ensuite les exposants, sur un dénominateur commun.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Chaque racine s'écrit comme une puissance rationnelle de x :

- $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$;
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;
- $\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$.

Donc :

$$\begin{aligned} E &= x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \\ &= x^{\frac{4+3-1}{6}} \\ &= x^{1} = x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $E = x$.

3.

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $x^5 = -243$, $x^4 = \dfrac{625}{16}$, $x^6 = -1$ et $x^3 = 10$.

INDICE

Regarde d'abord la parité de l'exposant, puis le signe du second membre. Avec un exposant impair et un second membre négatif, la solution s'écrit avec un signe moins devant la racine d'un nombre positif.

CORRIGÉ

- **Équation $x^5 = -243$.** L'exposant 5 est impair : une unique solution, $-\sqrt[5]{243} = -3$, car $3^5 = 243$.
- **Équation $x^4 = \dfrac{625}{16}$.** L'exposant 4 est pair et $\dfrac{625}{16} > 0$: deux solutions opposées, $\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}} = \dfrac{5}{2}$ et $-\dfrac{5}{2}$, car $5^4 = 625$ et $2^4 = 16$.
- **Équation $x^6 = -1$.** L'exposant 6 est pair, donc $x^6 \geq 0$ pour tout réel x : aucune solution.
- **Équation $x^3 = 10$.** L'exposant 3 est impair : une unique solution, $\sqrt[3]{10}$.

Conclusion. Les ensembles de solutions sont $\{-3\}$, $\left\{-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$, $\varnothing$ et $\{\sqrt[3]{10}\}$.

Exercice 8

Valeurs d'arctangente

1.

Calcule $\arctan(-1)$ et $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$.

INDICE

La fonction $\arctan$ est impaire. Il reste à reconnaître deux valeurs remarquables de la tangente dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

CORRIGÉ

Valeurs remarquables. Les réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Donc $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Imparité. La fonction $\arctan$ est impaire.

Conclusion. $\arctan(-1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$ et $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

2.

On admet que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Déduis-en $\arctan\left(\sqrt{2} - 1\right)$, puis $\arctan\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

INDICE

Pour conclure $\theta = \arctan x$, il faut deux faits : θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan\theta = x$. Pour la seconde valeur, remarque que $1 - \sqrt{2}$ est l'opposé de $\sqrt{2} - 1$.

CORRIGÉ

Première valeur. Le réel $\frac{\pi}{8}$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Par définition de l'arctangente, $\arctan\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{\pi}{8}$.

Seconde valeur. On a $1 - \sqrt{2} = -\left(\sqrt{2} - 1\right)$, et $\arctan$ est impaire.

Conclusion. $\arctan\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{\pi}{8}$ et $\arctan\left(1 - \sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{8}$.

3.

Calcule $\arctan\left(\tan\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)\right)$ et $\arctan(\tan 2)$.

INDICE

L'égalité $\arctan(\tan x) = x$ n'est permise que si x appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sinon, ajoute ou retranche π, ce qui ne change pas la tangente, jusqu'à y revenir. Pour 2, compare avec $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Principe. Soit x un réel où la tangente est définie et k un entier. On a $\tan(x + k\pi) = \tan x$. Si de plus $x + k\pi$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\arctan(\tan x) = x + k\pi$.

- $\dfrac{5\pi}{6} - \pi = -\dfrac{\pi}{6}$, qui appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc $\arctan\left(\tan\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.
- $-\dfrac{7\pi}{5} + \pi = -\dfrac{2\pi}{5}$, et $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)\right) = -\dfrac{2\pi}{5}$.
- $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \dfrac{3\pi}{2}$, donc $-\dfrac{\pi}{2} < 2 - \pi < \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi $\arctan(\tan 2) = 2 - \pi$.

Conclusion. Les trois valeurs cherchées sont $-\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{2\pi}{5}$ et $2 - \pi$.