BURHAN

Limites, continuité et fonctions réciproques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/limites-et-continuite/cours

Chapitre	Semestre
Limites, continuité et fonctions réciproques	Semestre 1

Continuité en un point

Une courbe qui saute ?

Devine : Une valeur imposée

J'ouvre le chapitre par une question. Voici une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Sa courbe est-elle d'un seul tenant en 3 ? Choisis ce qui te semble juste.

A. Oui : g est continue en 3, puisque la valeur $g(3)$ existe et vaut 3.

Faux.

Avoir une valeur en 3 ne suffit pas. Il faut comparer cette valeur à la limite en 3 : c'est confondre « être définie » et « être continue ».

B. Non : sa limite en 3 vaut 2, et $g(3) = 3$.

Juste.

Pour $x \neq 3$, $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, donc $g(x) = x - 1$, qui tend vers 2. Or $2 \neq g(3)$: la courbe saute.

C. Oui : g est continue en 3, puisque sa limite en 3 existe et qu'elle est finie.

Faux.

La limite existe bien, mais elle doit **être égale** à $g(3) = 3$. Ici, elle vaut 2.

D. On ne peut rien dire : en 3, la fraction donne $\dfrac{0}{0}$, qui n'a pas de sens.

Faux.

$\dfrac{0}{0}$ est une forme indéterminée. Elle signale qu'il faut transformer l'expression, pas que la limite n'existe pas.

Indice 1

Factorise le numérateur : 3 en est une racine.

Indice 2

Pour $x \neq 3$, simplifie la fraction, puis calcule la limite en 3.

Indice 3

Compare la limite trouvée à la valeur imposée $g(3) = 3$.

Correction

Pour tout réel $x \neq 3$, on factorise : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, donc $g(x) = x - 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 3} g(x) = 2.$$

Comme $2 \neq 3 = g(3)$, la courbe de g saute en 3 : g n'est pas continue en 3.

Définition : Limite en un point : formulation par intervalles

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf peut-être en a, et soit ℓ un réel.

On dit que f **a pour limite** ℓ **en** a, et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, lorsque : pour tout intervalle ouvert J de centre ℓ, il existe un intervalle ouvert K de centre a tel que $f(x) \in J$ pour tout $x \in K \cap I$ avec $x \neq a$.

Exemple : La définition sur un cas simple

Cette définition précise ce que tu calculais en 1re année. Tu ne la manipuleras pas en exercice : elle sert à lire deux démonstrations.

Prends $f : x \mapsto 5x - 2$, $a = 1$ et $\ell = 3$. On vise $J =]3 - d, 3 + d[$, avec $d > 0$ aussi petit que tu veux. L'intervalle $K = \left]1 - \dfrac{d}{5}, 1 + \dfrac{d}{5}\right[$ convient. En effet, pour tout $x \in K$:

$$|f(x) - 3| = 5|x - 1| < d.$$

Donc $f(x) \in J$.

En clair : on rend $f(x)$ aussi proche de 3 qu'on veut, en prenant x assez proche de 1.

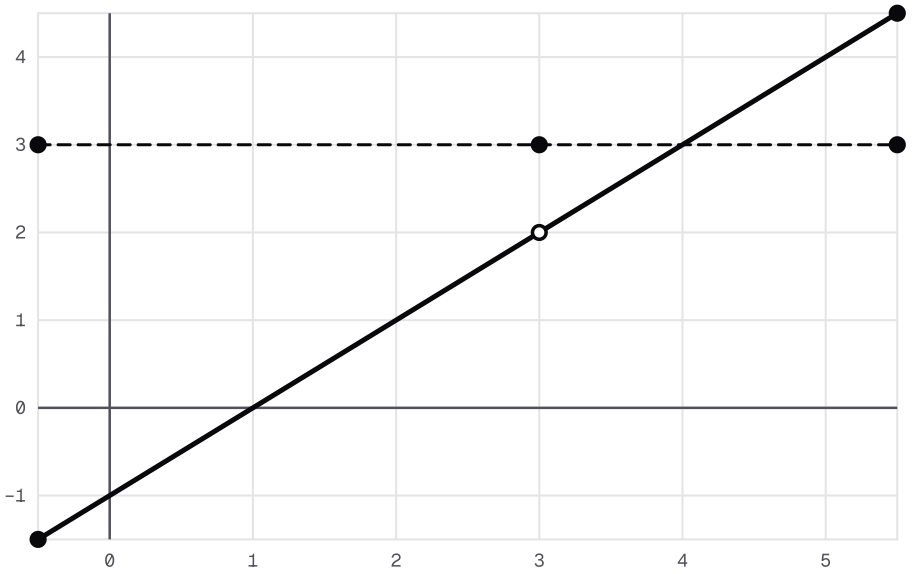
Continuité en un point

Un cas numérique. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x^2 + x - 1$. On a $\varphi(2) = 9$. Approche x de 2 :

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$2{,}01$	$2{,}1$
$\varphi(x)$	$8{,}12$	$8{,}9102$	$9{,}0902$	$9{,}92$

Les valeurs se resserrent autour de 9, la valeur en 2.

La limite **rejoint** la valeur : c'est cela, être continue en 2.



$\mathcal{C}_g$ $y = 3$ Point du graphe Point exclu du graphe

Retour à la fonction g de l'ouverture : la courbe arrive en 3 à la hauteur 2, mais la valeur imposée g(3) = 3 est placée plus haut.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 2 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Définition : Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple : Un raccordement

À un point de **raccordement**, une fonction change d'expression. On étudie alors chaque côté avec sa propre expression. Soit μ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mu(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $\mu(1) = 2$. À gauche de 1, $x^2 + 1$ tend vers 2. À droite, $4 - 2x$ tend aussi vers 2. Les deux côtés rejoignent $\mu(1)$: on s'attend à ce que μ soit continue en 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Pourquoi deux côtés qui se recollent suffisent-ils ? Les deux énoncés suivants répondent.

Définition : Continuité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a, a+h[$ avec $h > 0$, on dit que f est **continue à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-h, a]$ avec $h > 0$, on dit que f est **continue à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Propriété : Continuité et continuité latérale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition F02, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Étape 2. Or, d'après le cours de limites de 1re année, f a pour limite $f(a)$ en a si et seulement si ses limites à droite et à gauche en a existent et valent toutes deux $f(a)$.

Étape 3. D'après la définition F03, cela signifie exactement que f est continue à droite et à gauche en a. Les deux sens de l'équivalence sont donc établis.

Ce que dit la preuve

Vérifie

Une fonction ψ, définie sur $\mathbb{R}$, vérifie : $\lim\limits_{x \to 0^-} \psi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = 1$ et $\psi(0) = 4$. Que conclure en 0 ?

A. ψ est continue en 0, car ses deux limites latérales existent et sont égales entre elles.
Faux.
Les deux limites sont égales entre elles, mais pas à $\psi(0) = 4$. Chaque limite se compare à la valeur.

B. ψ est continue à droite en 0, mais pas à gauche, car la limite à droite est la seule qui compte.
Faux.
À droite comme à gauche, la limite vaut 1, et $1 \neq 4$: aucun des deux côtés n'est continu.

C. ψ n'est pas continue en 0, ni à droite ni à gauche.
Juste.
Les deux limites valent 1 et $\psi(0) = 4$: aucun côté n'est continu, donc ψ n'est pas continue en 0.

D. On ne peut pas conclure, car l'expression de ψ n'est pas donnée.
Faux.
La définition ne demande que les limites et la valeur : tout est donné.

Indice 1

Compare chaque limite latérale à la valeur $\psi(0)$.

Indice 2

La continuité à droite exige $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = \psi(0)$.

Indice 3

Conclus avec l'équivalence entre continuité et continuité des deux côtés.

Correction

Les deux limites latérales valent 1, et $\psi(0) = 4$. Comme $1 \neq 4$, ψ n'est continue ni à droite ni à gauche en 0.

Elle n'est donc pas continue en 0. Des limites égales entre elles ne suffisent pas : elles doivent égaler la valeur.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne calcule rien : elle enchaîne deux définitions et un fait de 1re année. Une limite en a vaut L exactement quand les deux limites latérales valent L.

D'où le réflexe pour une fonction définie par morceaux : chaque côté avec son expression, puis on recolle.

Exemple : Un seul côté ne suffit pas

Change l'expression de droite. Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$w(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $w(1) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} w(x) = 2$: w est continue à gauche en 1.

Mais $\lim\limits_{x \to 1^+} w(x) = 4$, et $4 \neq 2$. Donc w n'est pas continue à droite en 1, et elle n'est pas continue en 1 .

Raccordements, prolongement, continuité sur un intervalle

Boucher un trou

Devine

On considère, sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[\cup]0, +\infty[$, la fonction

$$s(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}.$$

Elle n'est pas définie en 0 : sa courbe a un **trou**. Quelle valeur donner à $s(0)$ pour le boucher ?

A. $s(0) = 0$, car le numérateur s'annule en 0

Faux.

Le numérateur s'annule en 0, mais le dénominateur aussi : on obtient la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, pas 0.

B. $s(0) = \frac{1}{2}$, après la quantité conjuguée

Faux.

Tu as sans doute écrit $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right) = x$. Or ce produit vaut $2x+1-1 = 2x$.

C. Aucune valeur : on ne divise pas par 0.

Faux.

On ne calcule pas $s(0)$ avec la formule : on cherche la limite en 0, qui existe ici.

D. $s(0) = 1$

Juste.

Avec la quantité conjuguée, $s(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$ pour $x \neq 0$, qui tend vers $\frac{2}{2} = 1$.

Indice 1

Multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{2x+1}+1$.

Indice 2

Le numérateur devient $(2x+1)-1 = 2x$; simplifie par x, qui n'est pas nul.

Indice 3

Calcule la limite de $\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$ en 0.

Correction

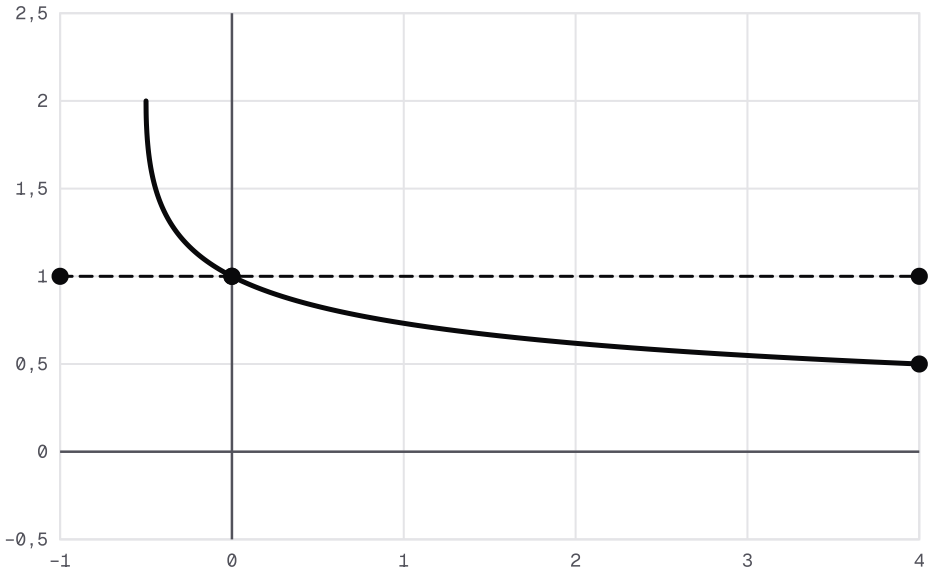
Soit x un réel non nul de l'ensemble de définition de s. Avec la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{(2x+1)-1}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} s(x) = \frac{2}{1+1} = 1$. On bouche le trou en posant $s(0) = 1$.

Pourquoi est-ce vrai ? Tu le sens déjà : la limite en 0 ignore ce qui se passe **exactement** en 0. Ajouter une valeur en ce point ne la change pas.

Si l'on choisit justement la limite comme valeur, les deux coïncident. L'énoncé suivant le dit pour toute fonction.



La courbe de s présente un trou en 0, à la hauteur 1 ; poser s(0) = 1 revient à y placer le point plein qui le bouche.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Propriété : Prolongement par continuité

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a. On l'appelle le **prolongement par continuité de f en a**.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \neq a$, on a $g(x) = f(x)$. Or la limite en a ne fait intervenir que les réels $x \neq a$ (F01). Donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Étape 2. Par définition, $g(a) = \ell$. Donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, et g est continue en a (F02).

Ce que dit la preuve

À toi

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 2. Quelle valeur en 2 donne son prolongement par continuité ?

A. 5

Juste.
Pour $x \neq 2$, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, donc la fonction vaut $x+3$, qui tend vers 5 : c'est la valeur du prolongement.

B. 0, la valeur du numérateur en 2
Faux.
En 2, le numérateur vaut 0, mais le dénominateur aussi : c'est la forme $\frac{0}{0}$, à lever par factorisation.

C. Aucune : la fonction n'est pas définie en 2, on ne peut rien y prolonger.
Faux.
C'est justement le rôle du prolongement : on définit une valeur en 2, égale à la limite.

Indice 1
Factorise le numérateur : 2 en est une racine.
Indice 2
$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.
Indice 3
Calcule la limite en 2 de l'expression simplifiée.

Correction
Pour tout réel $x \neq 2$, la fonction vaut $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3$. Sa limite en 2 vaut 5, un réel.

D'après la propriété du prolongement par continuité, on la prolonge en 2 en lui donnant la valeur 5.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux fonctions égales pour $x \neq a$ ont la même limite en a. Tu utilises ce principe à chaque simplification avant un calcul de limite. Après simplification par $x - a$, la nouvelle expression a la même limite que l'ancienne.

Exemple : Une limite finie est indispensable

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $t(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$.

- Pour $x > 0$, $t(x) = x + 1$, qui tend vers 1 en 0^+.
- Pour $x < 0$, $t(x) = x - 1$, qui tend vers -1 en 0^-.

Les limites latérales diffèrent : t n'a pas de limite en 0. Aucune valeur de $t(0)$ ne rendra t continue en 0.

D'un point à tout un intervalle

Définition : Continuité sur un intervalle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- f est **continue sur** $]a, b[$ lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$.
- f est **continue sur** $[a, b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

On définit de même la continuité sur $[a, b[$, sur $]a, b]$ et sur les intervalles non bornés.

Méthode : continuité en un point de raccordement ou en une borne

1. **La valeur.** Calcule $f(a)$ avec l'expression qui s'applique en a lui-même.
2. **Les limites.** Calcule la limite à droite en a, et la limite à gauche s'il existe des réels à gauche. Chacune se calcule avec l'expression de son côté. Si une question précédente a établi un encadrement, sers-t'en. **Petit rappel** : si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ près de a, et si u et v ont la même limite ℓ en a, alors f tend vers ℓ en a.
3. **La comparaison.** Chaque limite est-elle égale à $f(a)$?
4. **La phrase de conclusion.** Écris l'égalité, puis : « donc f est continue à droite en a ». Pour la continuité en a, il faut les deux côtés.

Exemple : Coin examen : rédaction modèle

Soit v la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$v(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rédaction attendue. Soit $x > 0$. On a $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ et $x^2 > 0$, donc :

$$x - x^2 \leq v(x) \leq x + x^2.$$

Or $x - x^2$ et $x + x^2$ tendent vers 0 en 0^+. Par encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} v(x) = 0 = v(0).$$

Conclusion. v est continue à droite en 0.

Une question de continuité en un point figure dans 9 des 16 sujets consultés, pour $0{,}25$ à $0{,}5$ point.

À toi : Quelle rédaction ?

Soit z définie sur $[0, +\infty[$ par

$$z(x) = \begin{cases} 1 + x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Quelle rédaction prouve correctement que z est continue à droite en 0 ?

A. $z(0) = 1$, et z est définie à droite de 0 par une expression simple, donc z est continue à droite en 0.

Faux.
Calculer la valeur ne suffit pas : il faut la limite à droite, puis la comparer à $z(0)$.

B. Quand x tend vers 0^+, $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $\cos 0 = 1$ et x tend vers 0, donc $z(x)$ tend vers $1 + 0 \times 1 = 1 = z(0)$.

Faux.
$\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, pas vers 0, et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite. Le résultat est juste, le raisonnement ne l'est pas.

C. Pour $x > 0$, $\left|x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq x$, donc $1 - x \leq z(x) \leq 1 + x$. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} z(x) = 1 = z(0)$.

Juste.
L'encadrement contourne l'absence de limite du cosinus. La conclusion compare bien la limite à droite à $z(0)$.

D. Pour $x > 0$, $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$, donc $z(x) \leq 1 + x$, qui tend vers 1. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} z(x) = 1 = z(0)$.

Faux.
Une seule inégalité ne suffit pas : il faut encadrer $z(x)$ des deux côtés par deux fonctions de même limite.

Indice 1
Pense à un encadrement : le cosinus est compris entre -1 et 1.
Indice 2
Multiplie l'encadrement du cosinus par $x > 0$, puis ajoute 1.
Indice 3
Conclus en comparant la limite à droite à la valeur $z(0)$.

Correction
Soit $x > 0$. Comme $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$, on a $-x \leq x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$, donc :

$$1 - x \leq z(x) \leq 1 + x.$$

Les deux bornes tendent vers 1 en 0^+. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} z(x) = 1 = z(0)$: z est continue à droite en 0.

Fonctions usuelles et opérations

Les fonctions de référence

Devine

D'après toi, sur quels intervalles la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-9}$ est-elle continue ?

A. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est un quotient de deux polynômes, eux-mêmes continus.

Faux.

Le dénominateur s'annule en -3 et en 3 : la fonction n'y est pas définie.

B. Sur $]-\infty, -3[$, sur $]-3, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Juste.

Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Ici, on exclut -3 et 3.

C. Sur $\mathbb{R}$ privé de 9, la valeur qui annule le dénominateur.

Faux.

On ne résout pas $x = 9$ mais $x^2 = 9$, qui a deux solutions : -3 et 3.

D. Sur $]-3, 3[$ seulement.

Faux.

Les intervalles extérieurs sont aussi inclus dans l'ensemble de définition : la fonction y est continue.

Indice 1

Cherche d'abord où le dénominateur s'annule.

Indice 2

Résous $x^2 - 9 = 0$: il y a deux solutions.

Indice 3

Découpe $\mathbb{R}$ privé de ces valeurs en intervalles.

Correction

L'équation $x^2 - 9 = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 3$. La fonction est rationnelle, définie sur $\mathbb{R}$ privé de -3 et 3.

Elle est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -3[$, $]-3, 3[$ et $]3, +\infty[$: c'est l'énoncé suivant.

Propriété : Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\tan$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Remarque

Ce résultat est admis. Il prolonge un acquis de 1re année : en un point de son domaine, une fonction usuelle a pour limite sa valeur. Tu l'utilises comme point de départ de toute justification de continuité.

Additionner, multiplier, diviser

Exemple : Un cas numérique

Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$: ce sont des fonctions usuelles. Que fait leur somme en 0 ? Quand x tend vers 0, $x^3 + \sin x$ tend vers $0 + 0 = 0$, sa valeur en 0.

Pourquoi est-ce vrai ? La limite d'une somme est la somme des limites : c'est un résultat de 1re année. La propriété suivante généralise cette remarque.

Propriété : Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel.

- Les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Démonstration

Étape 1. Soit $a \in I$. Par hypothèse et par la définition F02, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, avec des limites latérales si a est une borne de I qui lui appartient.

Étape 2. D'après les opérations sur les limites de 1re année, $f + g$ a pour limite $f(a) + g(a)$ en a. Il en va de même pour λf et $f \times g$, et pour $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$, car $g(a) \neq 0$.

Étape 3. Si f est positive, la limite de $\sqrt{f}$ en a est $\sqrt{f(a)}$, d'après la limite de $\sqrt{u}$ vue en 1re année.

Conclusion. Chaque fonction a pour limite sa valeur en tout point de I : elle est continue sur I.

Vérifie : Une étape de la preuve

À l'étape 2 de la preuve, la limite de $\dfrac{f}{g}$ en a vaut $\dfrac{f(a)}{g(a)}$. Quelle hypothèse le permet ?

A. $f(a) \neq 0$, car on ne peut pas mettre 0 au numérateur d'une fraction.
Faux.

Un numérateur nul ne pose aucun problème : $\frac{0}{g(a)} = 0$. C'est le dénominateur qui compte.

B. f est positive sur I, comme pour la racine carrée de l'étape 3.

Faux.

La positivité sert à la racine carrée, à l'étape 3, pas au quotient.

C. Aucune : la continuité de f et de g en a suffit à elle seule.

Faux.

Sans condition sur le dénominateur, $\frac{f(a)}{g(a)}$ peut ne pas exister : l'exemple qui suit le montre.

D. $g(a) \neq 0$, car g ne s'annule pas sur I.

Juste.

La limite d'un quotient est le quotient des limites seulement si la limite du dénominateur n'est pas nulle.

Indice 1

Relis l'étape 2 : quelle opération sur les limites est utilisée pour le quotient ?

Indice 2

La limite d'un quotient de 1re année a une condition.

Indice 3

Elle porte sur le dénominateur.

Correction

L'étape 2 utilise la limite d'un quotient, vue en 1re année. Elle exige que la limite du dénominateur, ici $g(a)$, soit non nulle. C'est vrai, car g ne s'annule pas sur I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque opération sur les fonctions continues vient de l'opération correspondante sur les limites, vue en 1re année. La preuve ne fait que traduire ces opérations, point par point, puis conclut en tout point de I.

Exemple : Pourquoi la condition sur le dénominateur ?

Prends $g : x \mapsto 3x - 3$ sur $I = [0, 2]$: g est continue sur I. Mais g s'annule en 1, et $\frac{1}{g}$ n'est même pas définie en 1. Sur I, ce quotient ne peut donc pas être continu.

Sans la condition « g ne s'annule pas sur I », la propriété serait fausse. Sur $[1{,}5, 2]$, en revanche, $\frac{1}{g}$ est continue.

Limite d'une fonction composée

Deux étages

Devine : Une racine au-dessus d'une fraction

Que vaut, selon toi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2+3}}$?

A. 2

Juste.

La fraction tend vers $\dfrac{4}{1} = 4$, et $\sqrt{y}$ tend vers $\sqrt{4} = 2$ quand y tend vers 4.

B. $+\infty$, car le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$

Faux.

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$, mais leur quotient tend vers 4. La racine de 4 n'est pas infinie.

C. 4, le quotient des coefficients de x^2

Faux.

4 est la limite de la fraction. Il reste à prendre la racine.

D. On ne peut pas savoir : c'est une forme indéterminée.

Faux.

La forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ se lève en factorisant par x^2 : la fraction tend vers 4.

Indice 1

Calcule d'abord la limite de la fraction, sans la racine.

Indice 2

Factorise numérateur et dénominateur par x^2.

Indice 3

Prends ensuite la racine de la limite trouvée.

Correction

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{4x^2+1}{x^2+3} = \frac{4+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}.$$

Ce quotient tend vers 4 en $+\infty$. Puis $\sqrt{y}$ tend vers 2 quand y tend vers 4. La limite cherchée vaut 2.

Deux étages. Dans l'activité, tu as d'abord calculé la limite de l'**intérieur**, la fraction. Puis tu as regardé ce que fait l'**extérieur**, la racine, près de cette limite. On note u la fonction intérieure et f la fonction extérieure : l'expression est $f\big(u(x)\big)$.

Pourquoi est-ce vrai ? Si $u(x)$ s'approche de b autant qu'on veut, $f\big(u(x)\big)$ s'approche de la limite de f en b. Une seule situation demande une précaution.

Théorème : Limite d'une fonction composée

Soit u et f deux fonctions, et a, b, ℓ des réels ou $\pm\infty$. On suppose que $f \circ u$ est définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f\big(u(x)\big) = \ell$.

Lorsque b est un réel, on suppose de plus que $u(x) \neq b$ pour tout x assez proche de a (et différent de a si a est réel), ou que f est continue en b (et alors $\ell = f(b)$).

Le résultat reste vrai pour des limites à droite ou à gauche.

Démonstration

Idée de la preuve. On traite le cas où a, b et ℓ sont réels ; les cas infinis suivent le même schéma, avec des intervalles $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, A[$, et ne sont pas détaillés.

Étape 1. Soit J un intervalle ouvert de centre ℓ. Comme f a pour limite ℓ en b, il existe un intervalle ouvert L de centre b tel que $f(y) \in J$ pour tout $y \in L$ avec $y \neq b$ (F01).

Étape 2. Comme u a pour limite b en a, il existe un intervalle ouvert K de centre a tel que $u(x) \in L$ pour tout $x \in K$ avec $x \neq a$.

Étape 3. Dans le premier cas, quitte à réduire K, on a aussi $u(x) \neq b$ pour tout $x \in K$ avec $x \neq a$, donc $f\big(u(x)\big) \in J$. Dans le second cas, si $u(x) = b$, alors $f\big(u(x)\big) = f(b) = \ell \in J$, car f est continue en b. Dans les deux cas, $f\big(u(x)\big) \in J$ pour tout $x \in K$ avec $x \neq a$: donc $\lim\limits_{x \to a} f\big(u(x)\big) = \ell$.

Étapes omises : les cas infinis, la restriction aux x du domaine de $f \circ u$ et les limites à droite ou à gauche.

L'idée de la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : si l'intérieur tend vers b et si l'extérieur tend vers ℓ en b, la composée tend vers ℓ. Si b est un réel, il faut en plus que f soit continue en b, ou que $u(x)$ évite b près de a.

La preuve part de la cible, un intervalle autour de ℓ. Elle remonte à l'étage du milieu, autour de b, puis au départ, autour de a.

Vérifie

Dans l'esquisse, à quel endroit l'hypothèse « $u(x) \neq b$, ou f continue en b » est-elle utilisée ?

A. À l'étape 1, pour trouver l'intervalle L autour de b.

Faux.

L'étape 1 n'utilise que la limite de f en b, pour des $y \neq b$.

B. À l'étape 2, pour trouver l'intervalle K autour de a.

Faux.
L'étape 2 n'utilise que la limite de u en a.

C. À l'étape 3.

Juste.
L'étape 1 ne dit rien de $f(b)$. À l'étape 3, il faut soit écarter le cas $u(x) = b$, soit savoir que $f(b) = \ell$.

D. Nulle part : elle n'est là que par prudence, le théorème resterait vrai sans elle.

Faux.
Sans elle, le théorème devient faux : l'exemple qui suit le montre.

Indice 1
Repère l'étape où l'on passe de « $u(x)$ proche de b » à « $f\big(u(x)\big)$ proche de ℓ ».
Indice 2
L'étape 1 garantit $f(y) \in J$ seulement pour $y \neq b$.
Indice 3
Que se passe-t-il si $u(x) = b$?

Correction
L'étape 1 donne $f(y) \in J$ pour $y \in L$, mais seulement si $y \neq b$. À l'étape 3, si $u(x)$ peut valoir b, il faut une autre raison : la continuité de f en b, qui donne $f(b) = \ell \in J$. Sinon, on exige $u(x) \neq b$.

Exemple : Sans la condition, tout s'écroule

Prends la fonction nulle $u : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \neq 0 \\ 5 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x \to 2} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$. Pourtant, pour tout réel x, $f\big(u(x)\big) = f(0) = 5$: la limite en 2 vaut 5, pas 1.

Ici $u(x) = b$ partout, et f n'est pas continue en 0.

Méthode et rédaction

Méthode : calculer une limite par composition

1. **Repérer les deux étages.** Écris l'expression sous la forme $f\big(u(x)\big)$: u à l'intérieur, f à l'extérieur.
2. **Étage intérieur.** Cherche b, la limite de $u(x)$ quand x tend vers a.
3. **Étage extérieur.** Cherche ℓ, la limite de $f(y)$ quand y tend vers b. Si b est un réel, vérifie que f est continue en b, ou que $u(x) \neq b$ près de a.

4. **Rédiger.** Nomme les deux limites, puis conclus « par composition ». On peut aussi poser $y = u(x)$ et rédiger avec ce changement de variable.

Exemple : Exemple guidé

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x + 1}{6x}\right)$.

- **Intérieur.** Pour tout $x > 0$, $u(x) = \dfrac{\pi x + 1}{6x} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{6x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \dfrac{\pi}{6}$.
- **Extérieur.** $\sin$ est continue en $\dfrac{\pi}{6}$, et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.
- **Rédaction.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \dfrac{\pi}{6}$, et $\sin$ est continue en $\dfrac{\pi}{6}$. Par composition, la limite cherchée vaut $\dfrac{1}{2}$.

Attention : La condition oubliée

Quand la limite intérieure b est un réel, ne compose pas les limites les yeux fermés. Si f n'est pas continue en b, vérifie que $u(x)$ reste différent de b près de a. Sinon, la conclusion peut être fausse, comme dans le contre-exemple ci-dessus. Avec une fonction usuelle continue en b, la condition est automatique.

Continuité d'une composée

Une chaîne de deux fonctions

Devine

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Choisis la réponse **et** sa raison.

A. Non : une racine carrée n'est définie que pour $x \geq 0$, donc pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Faux.
La condition porte sur l'expression sous la racine, pas sur x. Ici, cette expression est positive pour tout réel x.

B. Non : elle n'est pas continue en 3, où l'expression $x^2 - 6x + 10$ atteint son minimum.

Faux.
Un minimum n'est pas une discontinuité. En 3, l'expression vaut 1, et la racine y est continue.

C. Oui, car la racine carrée d'un polynôme est toujours continue sur $\mathbb{R}$.

Faux.
La raison est fausse : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ n'est même pas définie sur $]-3, 3[$.

D. Oui : sous la racine, $(x-3)^2 + 1 \geq 1$.

Juste.

Le polynôme est continu sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$, où la racine carrée est continue.

Indice 1
Mets $x^2 - 6x + 10$ sous forme canonique.
Indice 2
$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$.
Indice 3
Sur quel intervalle la racine carrée est-elle continue ?

Correction
Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1$. Le polynôme est continu sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$, inclus dans $[0, +\infty[$ où la racine carrée est continue.

La composée est donc continue sur $\mathbb{R}$: c'est l'énoncé suivant.

Une chaîne de deux maillons. Quand x s'approche de a, $f(x)$ s'approche de $f(a)$. Puis g, continue en $f(a)$, envoie ces valeurs près de $g\big(f(a)\big)$.

Pourquoi est-ce vrai ? C'est la limite d'une composée, dans le cas confortable où la fonction extérieure est continue.

Propriété : Continuité d'une composée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

En un point : si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration
Étape 1. En un point. Soit a tel que f est continue en a et g continue en $b = f(a)$. Comme g est continue en b, elle est définie sur un intervalle ouvert L contenant b (F02). Comme $f(x)$ tend vers b, $f(x) \in L$ pour x assez proche de a : $g \circ f$ est définie au voisinage de a.

Étape 2. On applique F09 avec la fonction intérieure f, la fonction extérieure g et la limite $g(b)$; la continuité de g en b remplit sa condition. Donc $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g(b) = (g \circ f)(a)$: $g \circ f$ est continue en a.

Étape 3. Sur l'intervalle. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$. Si b est intérieur à J, l'étape 2 s'applique, avec une limite latérale si a est une borne de I. Si b est la borne gauche de J, alors $f(x) \geq b$ pour tout $x \in I$, car $f(I) \subset J$. Soit V un intervalle ouvert de centre $g(b)$. Comme g est continue à droite en b, il existe $h > 0$ tel que $g(y) \in V$ pour tout $y \in [b, b+h[$. Comme f est continue en a, il existe un intervalle ouvert K de centre a tel que $f(x) \in [b, b+h[$ pour tout $x \in K \cap I$. Donc $g\big(f(x)\big) \in V$: $g \circ f$ est continue en a. Le cas de la borne droite est symétrique.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La continuité d'une composée est un cas particulier de la limite d'une fonction composée (F09) : la continuité de g rend sa condition automatique. Aux bornes, la preuve utilise que $f(x)$ reste du bon côté.

En exercice, le point qu'on oublie le plus souvent est l'inclusion $f(I) \subset J$.

Vérifie

Pour justifier la continuité de $x \mapsto \sqrt{2 - \sin x}$ sur $\mathbb{R}$, quelle inclusion vérifies-tu ?

A. $\sin(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$, puisque le sinus est la fonction placée sous la racine

Faux.
La fonction intérieure n'est pas $\sin$ mais $x \mapsto 2 - \sin x$. D'ailleurs $\sin$ prend des valeurs négatives.

B. Les valeurs de $x \mapsto 2 - \sin x$ sont dans $[0, +\infty[$.

Juste.
Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$. L'inclusion est vraie, et la continuité d'une composée conclut.

C. Aucune : la racine carrée est continue, donc toute racine d'une fonction continue l'est.

Faux.
La racine carrée n'est continue que sur $[0, +\infty[$. Il faut vérifier que l'intérieur y reste.

D. $\mathbb{R} \subset [0, +\infty[$

Faux.
Cette inclusion est fausse, et ce n'est pas la question : on regarde les **valeurs** de la fonction intérieure, pas les réels x.

Indice 1
Repère la fonction intérieure et la fonction extérieure.
Indice 2
Intérieure : $x \mapsto 2 - \sin x$; extérieure : la racine carrée.
Indice 3
Encadre $2 - \sin x$ à partir de $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Correction
La fonction $x \mapsto 2 - \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, 3] \subset [0, +\infty[$. La racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$. D'après la continuité d'une composée, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple : L'inclusion n'est pas un détail

Prends $f : x \mapsto 7 - 2x$, continue sur $\mathbb{R}$, et g la racine carrée, continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > \frac{7}{2}$, $f(x) < 0$: la composée $g \circ f$ n'y est même pas définie. L'inclusion $f(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$ est fausse.

Sur $I = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$, en revanche, $f(I) = [0, +\infty[$: la composée y est continue.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Toutes les valeurs entre deux

Une fonction continue ne saute pas. Si elle prend deux valeurs, elle prend aussi toutes les valeurs comprises entre elles. L'ensemble de ses valeurs sur un intervalle n'a donc pas de trou : c'est encore un intervalle. Reste à savoir **lequel**.

Devine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, étudiée sur $[-1, 2]$. On a $f(-1) = -1$ et $f(2) = -1$. Devine l'ensemble $f([-1, 2])$ des valeurs prises par f.

A. $[-1, 3]$

Juste.

f croît sur $[-1, 0]$ jusqu'à $f(0) = 3$, puis décroît sur $[0, 2]$ jusqu'à $f(2) = -1$. Le minimum vaut -1 et le maximum 3.

B. $\{-1\}$, car $f(-1) = f(2)$

Faux.

Les extrémités ne disent pas tout : entre -1 et 2, la fonction monte, puis redescend.

C. $[-1, 2]$, l'intervalle de départ

Faux.

$[-1, 2]$ est l'intervalle de départ. L'image se lit sur l'axe des ordonnées.

D. $[-1, 3[$, car le maximum est une limite

Faux.

Sur un segment, le maximum est **atteint**, ici en 0 : la borne 3 est incluse.

Indice 1

Étudie les variations de f : $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Indice 2

$f'(x) = 3x(x - 2)$ s'annule en 0 et en 2. Calcule $f(0)$.

Indice 3

L'image d'un segment va du minimum au maximum de f.

Correction

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x(x - 2)$: f est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $[0, 2]$.

Ainsi le maximum est $f(0) = 3$, et le minimum est $f(-1) = f(2) = -1$. Donc $f([-1, 2]) = [-1, 3]$.

Le théorème

Tableau de variations de f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 sur [-1, 3], avec f'(x) = 3x(x - 2).

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

Théorème : Image d'un intervalle, d'un segment

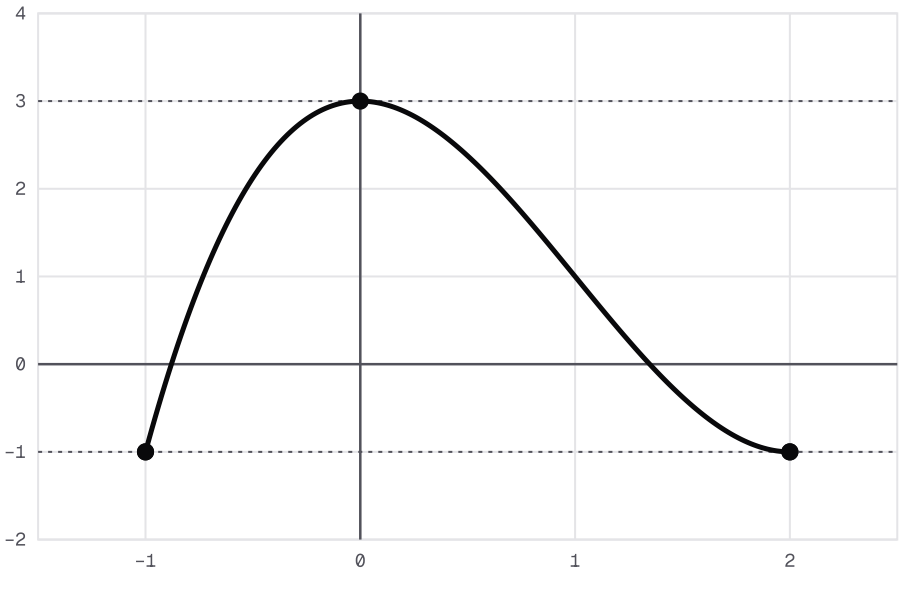
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- L'image $f(I)$ de l'intervalle I est un intervalle.
- Si $I = [a, b]$ est un segment, $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.

Remarque

Ce résultat est admis. Sa preuve repose sur une propriété des nombres réels qui n'est pas étudiée cette année. Dans ce cours, le théorème des valeurs intermédiaires se **déduit** de ce résultat.

Le piège des extrémités



Courbe de la fonction f sur le segment [-1, 2] : les deux extrémités ont la même ordonnée.

Attention : Les extrémités ne suffisent pas

Sans monotonie, l'image de $[a, b]$ n'est pas forcément l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. Sur la courbe ci-dessus, $f(-1) = f(2) = -1$, et pourtant f atteint 3 en 0. Pour une image, cherche le minimum et le maximum de f sur le segment, dans le tableau de variations.

À toi

Avec la même fonction f et son tableau de variations, que vaut $f([1, 3])$? On donne $f(1) = 1$.

A. $[1, 3]$, l'intervalle d'extrémités $f(1)$ et $f(3)$

Faux.

C'est l'intervalle d'extrémités $f(1)$ et $f(3)$. Or f descend jusqu'à -1 en 2.

B. $[-1, 1]$, de la valeur en 2 à la valeur en 1

Faux.

Tu as oublié la remontée sur $[2, 3]$, jusqu'à $f(3) = 3$.

C. $[-1, 3]$

Juste.

Le minimum est atteint en 2, où $f(2) = -1$. Le maximum vaut $f(3) = 3$, plus grand que $f(1) = 1$.

D. $]-1, 3[$

Faux.

Sur un segment, le minimum et le maximum sont atteints : les crochets sont fermés.

Indice 1

Repère dans le tableau où f change de sens de variation sur $[1, 3]$.

Indice 2

Lis $f(2)$: c'est le minimum.

Indice 3

Compare $f(1)$ et $f(3)$ pour trouver le maximum.

Correction

Sur $[1, 3]$, f décroît de $f(1) = 1$ à $f(2) = -1$, puis croît jusqu'à $f(3) = 3$. Le minimum vaut -1, le maximum 3. D'après le théorème de l'image d'un segment, $f([1, 3]) = [-1, 3]$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Combien de passages par zéro ?

Devine

Soit f la fonction définie sur $[-3, 3]$ par $f(x) = x^3 - 5x + 1$. On a $f(-3) = -11$, $f(0) = 1$, $f(1) = -3$ et $f(3) = 13$. Combien de fois la courbe de f coupe-t-elle l'axe des abscisses sur $[-3, 3]$?

A. Une seule fois : le signe passe de négatif à positif entre -3 et 3.

Faux.

Les valeurs données montrent trois changements de signe, pas un seul.

B. Deux fois, une sur $[-3, 0]$ et une sur $[1, 3]$.

Faux.

Compte les changements de signe entre valeurs consécutives : -11, puis 1, puis -3, puis 13.

C. Aucune garantie : il faudrait tracer la courbe point par point.

Faux.

La continuité de f suffit : chaque changement de signe donne au moins une racine, sans tracer.

D. Trois fois.

Juste.

Le signe change sur $[-3, 0]$, sur $[0, 1]$ et sur $[1, 3]$. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : il y en a exactement trois.

Indice 1

Regarde les signes de $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$, dans l'ordre.

Indice 2

Chaque changement de signe d'une fonction continue donne au moins une racine.

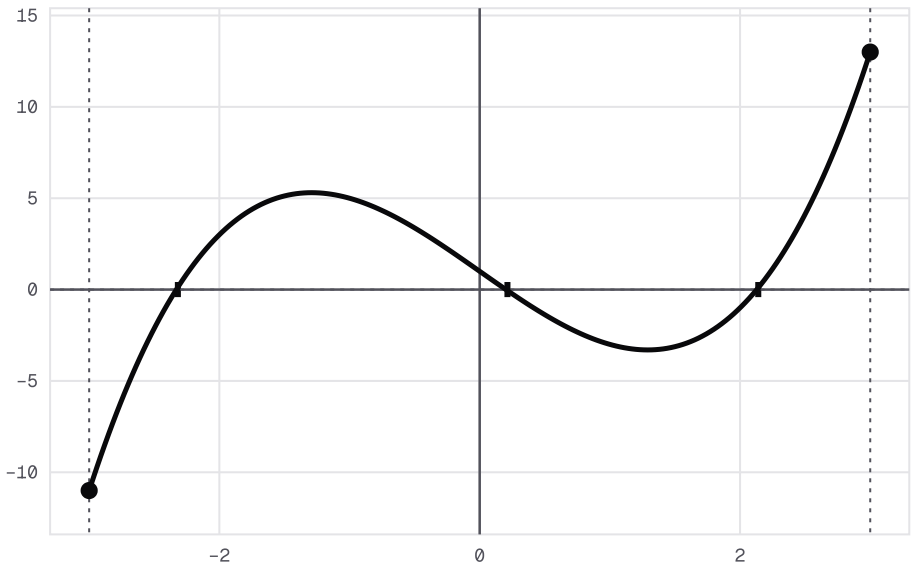
Indice 3

Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines réelles.

Correction

Les signes sont $-$, $+$, $-$, $+$: trois changements de signe, donc au moins trois racines, une dans chacun des intervalles $]-3, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, 3[$.

Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : il y en a exactement trois. La courbe ci-dessous le confirme.



Courbe de f ------ Droite y = 0, et verticales x = a, x = b Intervalle contenant une solution, sur la droite y = k

Le théorème des valeurs intermédiaires pour f(x) = x^3 - 5x + 1 sur [-3, 3], avec k = 0 : trois solutions.

a = −3, b = 3, k = 0.

f(a) ≈ −11 et f(b) ≈ 13.

Solutions de f(x) = k détectées, liste non exhaustive : x ∈ [−2,3300587396 ; −2,3300587395] ; x ∈ [0,2016396757 ; 0,2016396758] ; x ∈ [2,1284190638 ; 2,1284190639].

Le théorème

Une nuit d'hiver à Ifrane, le thermomètre affiche -4 degrés à minuit et 6 degrés à midi. La température varie sans saut : à un instant au moins, elle a valu exactement 0. Personne ne sait à quelle heure, mais c'est certain.

Pourquoi est-ce vrai ? Pense à l'image d'un segment : les valeurs prises forment un intervalle, donc un ensemble sans trou.

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration

Étape 1. La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$. D'après F11, son image $f([a, b])$ est un intervalle.

Étape 2. Cet intervalle contient $f(a)$ et $f(b)$. Or un intervalle qui contient deux réels contient tous les réels compris entre eux. Donc $k \in f([a, b])$.

Conclusion. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : une fonction continue sur $[a, b]$ prend, au moins une fois, chaque valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

La preuve tient dans une propriété des intervalles : ils contiennent tous les réels situés entre deux de leurs éléments. Le théorème donne l'existence de c, jamais son emplacement exact, ni le nombre de solutions.

Vérifie

Dans la preuve du TVI, à quoi sert l'hypothèse « f continue sur $[a, b]$ » ?

A. À garantir que la solution c est unique dans $[a, b]$, puisque la courbe ne saute pas.

Faux.
Le TVI ne donne jamais l'unicité : la courbe ci-dessus coupe l'axe trois fois.

B. À dire que $f([a, b])$ est un intervalle.

Juste.
C'est l'étape 1. Tout le reste découle de ce que $f([a, b])$ est un intervalle.

C. À garantir que $f(a) \neq f(b)$, sinon aucun k ne serait compris entre les deux.

Faux.
Rien n'empêche $f(a) = f(b)$. Dans ce cas, $k = f(a)$, et $c = a$ convient.

D. À rien : seul compte le fait que k soit entre $f(a)$ et $f(b)$.

Faux.
Sans continuité, $f([a, b])$ peut avoir un trou, et k peut tomber dedans.

Indice 1
Repère dans la preuve l'étape où un énoncé du chapitre est cité.
Indice 2
L'étape 1 cite l'image d'un segment. Quelle est son hypothèse ?
Indice 3
Ce résultat exige une fonction continue sur un intervalle.

Correction
La continuité sert uniquement à l'étape 1 : par le théorème de l'image d'un intervalle, $f([a, b])$ est un intervalle. L'étape 2 utilise ensuite une propriété des intervalles. Sans continuité, l'argument tombe.

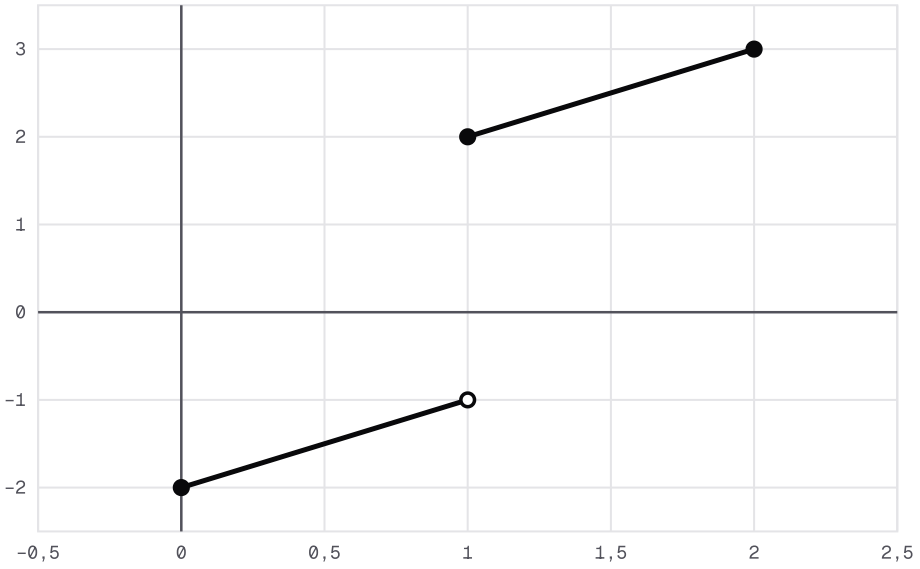
Attention : La continuité sur tout le segment

Des signes contraires aux bornes ne prouvent rien à eux seuls. Prends la fonction ρ définie sur $[0, 2]$ par

$$\rho(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Elle vaut -2 en 0 et 3 en 2, mais elle ne s'annule jamais : en 1, elle saute de -1 à 2.

Avant d'appliquer le TVI, justifie toujours la continuité sur **tout** $[a, b]$.



$\mathcal{C}_\rho$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Courbe de ρ sur [0, 2] : elle passe du dessous au-dessus de l'axe des abscisses en sautant en 1, sans jamais le toucher.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ –1.

Le cas des signes contraires

Le cas qui sert le plus. Très souvent, on cherche une solution de $f(x) = 0$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 se trouve entre les deux.

Pourquoi est-ce vrai ? C'est le TVI avec $k = 0$. Il reste un détail : expliquer pourquoi la solution n'est pas une borne.

Propriété : Cas f(a) × f(b) < 0

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Démonstration

Étape 1. Comme $f(a) \times f(b) < 0$, les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires. Donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Étape 2. D'après F12 avec $k = 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Étape 3. Or $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$. Donc $c \neq a$ et $c \neq b$, c'est-à-dire $c \in]a, b[$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ajoute un seul argument au TVI : comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, la solution n'est ni a ni b. D'où l'intervalle **ouvert** $]a, b[$ dans la conclusion.

À toi

L'équation $x^3 + 2x = 4$ admet-elle une solution dans $]1, 2[$? Choisis la bonne justification.

A. Oui : $\sigma : x \mapsto x^3 + 2x - 4$ est continue sur $[1, 2]$, et $\sigma(1) \times \sigma(2) = -8 < 0$.

Juste.

Continuité, signes contraires aux bornes : les deux hypothèses du théorème sont vérifiées.

B. Oui : $1^3 + 2 \times 1 = 3$ et $2^3 + 2 \times 2 = 12$, et 4 est entre 3 et 12, ce qui suffit.

Faux.

Les calculs sont justes, mais il manque la continuité : sans elle, « 4 est entre 3 et 12 » ne prouve rien.

C. Non : $x^3 + 2x$ ne vaut 4 ni en 1, ni en 2, donc pas entre les deux.

Faux.

Le TVI cherche une solution **entre** les bornes, pas sur les bornes.

D. Oui : σ est continue sur $[1, 2]$, avec $\sigma(1) = -1$ et $\sigma(2) = 8$; il existe donc $c \in [1, 2]$ tel que $\sigma(c) = 0$, et c'est terminé.

Faux.

La conclusion porte sur $[1, 2]$: il reste à exclure les bornes, avec $\sigma(1) \neq 0$ et $\sigma(2) \neq 0$, pour obtenir $]1, 2[$.

Indice 1

Ramène l'équation à la forme $\sigma(x) = 0$.

Indice 2

Pose $\sigma(x) = x^3 + 2x - 4$ et calcule $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$.

Indice 3

N'oublie pas de citer la continuité de σ sur $[1, 2]$, puis d'exclure les bornes.

Correction

Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sigma(x) = x^3 + 2x - 4$.

Continuité. σ est un polynôme, donc elle est continue sur $[1, 2]$.

Signes aux bornes. $\sigma(1) = -1$ et $\sigma(2) = 8$, donc $\sigma(1) \times \sigma(2) < 0$.

Conclusion. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\sigma(x) = 0$, c'est-à-dire $x^3 + 2x = 4$, admet au moins une solution dans $]1, 2[$.

Exemple : Un encadrement plus fin

Avec la même fonction σ : $\sigma(1{,}1) = -0{,}469$ et $\sigma(1{,}2) = 0{,}128$. Ces valeurs se calculent à la main. Le produit est négatif, donc une solution se trouve dans $]1{,}1, 1{,}2[$.

En resserrant l'intervalle, on **localise** la solution. La section sur la dichotomie rend cette idée systématique.

Une unique solution α

Une seule solution

Devine

Une fonction f est continue et **strictement croissante** sur $[0, 4]$, avec $f(0) = -2$ et $f(4) = 5$. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle dans $]0, 4[$?

A. Au moins deux, comme pour la courbe de la section précédente.

Faux.
Cette courbe-là montait, descendait, puis remontait. Une fonction strictement croissante ne re-descend jamais.

B. Aucune, car $f(0) \neq 0$ et $f(4) \neq 0$: les bornes ne sont pas solutions.

Faux.
Les bornes ne sont pas des solutions, mais la fonction passe par 0 entre elles.

C. Exactement une.

Juste.
Le TVI en donne au moins une, et une courbe qui monte toujours ne repasse jamais par 0.

D. On ne peut pas savoir sans l'expression de f.

Faux.
Les hypothèses suffisent : continuité, stricte monotonie, signes aux bornes.

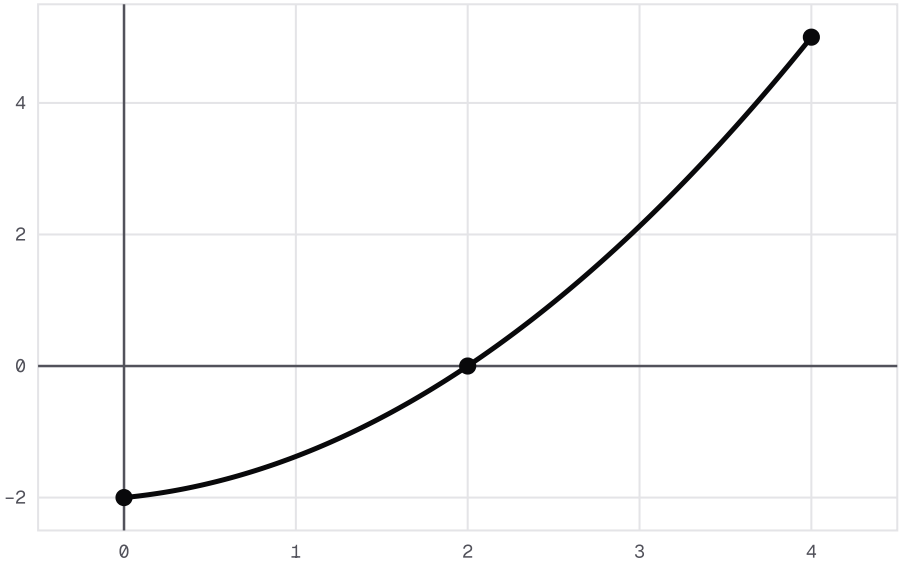
Indice 1
Le TVI s'applique-t-il ? Vérifie ses hypothèses.
Indice 2
Une fonction strictement croissante peut-elle revenir à une valeur déjà prise ?
Indice 3
Une fois passée par 0, la courbe reste au-dessus.

Correction
f est continue sur $[0, 4]$ et $f(0) \times f(4) < 0$: le TVI donne au moins une solution.

> Comme f est strictement croissante, deux réels distincts ont des images distinctes : la courbe ne peut pas revenir à 0. Il y a donc exactement une solution.

Une fonction strictement croissante ne revient jamais en arrière. Imagine deux solutions distinctes $c_1 < c_2$: que dirait la stricte croissance de $f(c_1)$ et de $f(c_2)$?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve ci-dessous répond par l'absurde. Quand elle est unique, cette solution reçoit un nom réservé : α.



Un exemple de fonction continue et strictement croissante sur [0, 4], de -2 à 5 : sa courbe ne croise l'axe des abscisses qu'une seule fois.

Propriété : Unicité par stricte monotonie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a, b[$.

Démonstration

Étape 1. Existence. D'après F13, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Étape 2. Unicité. Supposons par l'absurde deux solutions $c_1 < c_2$. Si f est strictement croissante, $f(c_1) < f(c_2)$; si elle est strictement décroissante, $f(c_1) > f(c_2)$. Dans les deux cas, $f(c_1) \neq f(c_2)$, ce qui contredit $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

Conclusion. La solution existe et elle est unique.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : continue, strictement monotone sur $[a, b]$, et de signes contraires en a et en b : l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule, dans $]a, b[$.

La preuve de l'unicité se fait par l'absurde : on suppose deux solutions distinctes, puis on contredit une hypothèse. Aucune dérivée n'intervient.

Vérifie

À l'étape 2 de la preuve, on appelle les deux solutions c_1 et c_2, avec $c_1 < c_2$. Pourquoi a-t-on le droit de supposer $c_1 < c_2$?

A. Parce que f est croissante, donc ses solutions sont rangées dans le même ordre que leurs images.

Faux.
La preuve traite aussi le cas décroissant. Le choix $c_1 < c_2$ ne dépend pas du sens de variation.

B. Les deux solutions sont distinctes : on nomme c_1 la plus petite.

Juste.
Deux réels distincts sont toujours rangés dans un ordre. Nommer la plus petite c_1 ne fait perdre aucun cas.

C. On n'a pas ce droit : il faudrait traiter aussi le cas $c_1 > c_2$ dans une seconde partie.

Faux.
Ce cas se ramène au premier en échangeant les noms : le traiter à part ne prouverait rien de plus.

Indice 1
Deux réels distincts peuvent-ils être égaux ? Sont-ils comparables ?
Indice 2
Les noms c_1 et c_2 sont choisis par celui qui rédige.
Indice 3
Échanger les deux noms change-t-il la situation ?

Correction
Les deux solutions sont distinctes, donc l'une est strictement plus petite que l'autre. On la nomme c_1. Cette convention ne perd aucun cas : c'est un choix de noms, pas une hypothèse sur f.

Attention : Au moins une, ce n'est pas une seule

Le TVI garantit **au moins** une solution. Si la fonction n'est pas strictement monotone, les solutions peuvent être nombreuses, voire en nombre infini. La fonction γ définie sur $[0,3]$ par

$$\gamma(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

est continue et croissante au sens large. Elle change de signe sur $[0,3]$, et pourtant elle s'annule sur tout $[1,2]$.

Pour écrire « une unique solution », il faut un argument d'unicité : le plus souvent, la stricte monotonie sur tout l'intervalle.

Coin examen : la rédaction complète

Méthode : existence et unicité d'une solution

1. **Nommer la fonction.** Mets l'équation sous la forme $f(x) = 0$ et donne un nom à f.
2. **Continuité.** Justifie que f est continue sur $[a,b]$: fonctions usuelles, opérations, composées.
3. **Stricte monotonie.** Justifie que f est strictement monotone sur $[a,b]$, souvent par le signe de f'.
4. **Signes aux bornes.** Calcule $f(a)$ et $f(b)$, puis conclus que $f(a) \times f(b) < 0$. La calculatrice est interdite à l'épreuve : les valeurs utiles sont fournies par l'énoncé ou se calculent à la main.
5. **Conclure.** Écris : « par le théorème des valeurs intermédiaires et par la stricte monotonie, cette équation possède une seule solution α dans $]a,b[$ ».

Exemple : Rédaction modèle

Montrer que l'équation $2x^3 + x^2 + 4x - 9 = 0$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 9$.

Continuité. f est un polynôme, donc elle est continue sur $[1,2]$.

Stricte monotonie. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 2x + 4$. Pour $x \in [1,2]$, $6x^2$, $2x$ et 4 sont strictement positifs, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[1,2]$.

Signes aux bornes. $f(1) = -2$ et $f(2) = 19$, donc $f(1) \times f(2) < 0$.

Conclusion. Par le théorème des valeurs intermédiaires et par la stricte monotonie de f, l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]1,2[$.

Une question d'existence et d'unicité de ce type figure dans 15 des 16 sujets consultés, pour $0{,}5$ à $0{,}75$ point.

Trouve l'erreur

Un élève rédige : « Soit $f(x) = 2x^3 + x - 2$. On a $f(0) = -2$ et $f(1) = 1$. D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$. » Que reproches-tu à cette rédaction ?

A. Rien : les calculs de $f(0)$ et de $f(1)$ sont justes, et le théorème des valeurs intermédiaires est bien cité.

Faux.
Les calculs sont justes, mais deux hypothèses ne sont jamais vérifiées.

B. Il manque la continuité de f ; il faudrait aussi écrire $[0, 1]$ au lieu de $]0, 1[$, car le TVI donne une solution $c \in [a, b]$.

Faux.
La continuité manque bien, mais l'intervalle ouvert est juste ici, car $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$. Et l'unicité n'est toujours pas prouvée.

C. Le calcul de $f(1)$ est faux : il fallait trouver $f(1) = 3$, ce qui ne change pas la conclusion.

Faux.
$f(1) = 2 + 1 - 2 = 1$: le calcul est juste.

D. Il manque la continuité de f et sa stricte monotonie sur $[0, 1]$.

Juste.
La continuité justifie le TVI ; la stricte monotonie, ici $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, justifie l'unicité.

Indice 1
Relis les cinq étapes de la méthode et coche celles qui apparaissent.
Indice 2
Les étapes « continuité » et « stricte monotonie » sont-elles écrites ?
Indice 3
« Unique » exige un argument d'unicité : calcule $f'(x)$.

Correction
Il manque deux phrases : « f est un polynôme, donc continue sur $[0, 1]$ » et « pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ ».

Avec $f(0) \times f(1) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires, puis la stricte monotonie de f, donnent alors l'unique solution dans $]0, 1[$.

À toi : Ta rédaction

Montre que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$. On la note β. Rédige d'abord, puis compare.

Indice 1
Pose $g(x) = x^5 + 2x - 1$ et suis les cinq étapes de la méthode.
Indice 2

g est un polynôme, et $g'(x) = 5x^4 + 2$. Que dire de son signe ?

Indice 3

Calcule $g(0)$ et $g(1)$, puis conclus en nommant le théorème et l'intervalle ouvert.

Réponse

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^5 + 2x - 1$.

Continuité. g est un polynôme, donc elle est continue sur $[0, 1]$.

Stricte monotonie. Pour tout réel x, $g'(x) = 5x^4 + 2 > 0$: g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Signes aux bornes. $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$, donc $g(0) \times g(1) < 0$.

Conclusion. Par le théorème des valeurs intermédiaires et par la stricte monotonie de g, l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution β dans $]0, 1[$.

Tu sais maintenant rédiger la question la plus fréquente du chapitre.

Encadrer α par dichotomie

Couper en deux

Devine

On reprend la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + x^2 + 4x - 9$ et sa solution $\alpha \in]1, 2[$. On calcule $f(1{,}5) = 6$. Dans quelle moitié de $]1, 2[$ se trouve α ?

A. Dans $]1, 1{,}5[$.

Juste.

$f(1) = -2 < 0$ et $f(1{,}5) > 0$: le changement de signe a lieu entre 1 et $1{,}5$.

B. Dans $]1{,}5, 2[$, car $f(1{,}5) > 0$ et l'on garde le côté positif.

Faux.

On garde la moitié où f **change de signe**. Sur $[1{,}5, 2]$, f est positive aux deux bornes.

C. $\alpha = 1{,}5$, le milieu.

Faux.

$f(1{,}5) \neq 0$, donc $1{,}5$ n'est pas la solution.

D. On ne peut pas savoir sans calculer d'autres valeurs.

Faux.

Les signes de $f(1)$ et de $f(1{,}5)$ suffisent pour conclure.

Indice 1

Quel est le signe de $f(1)$?

Indice 2

Compare les signes de f aux bornes de chaque moitié.

Indice 3

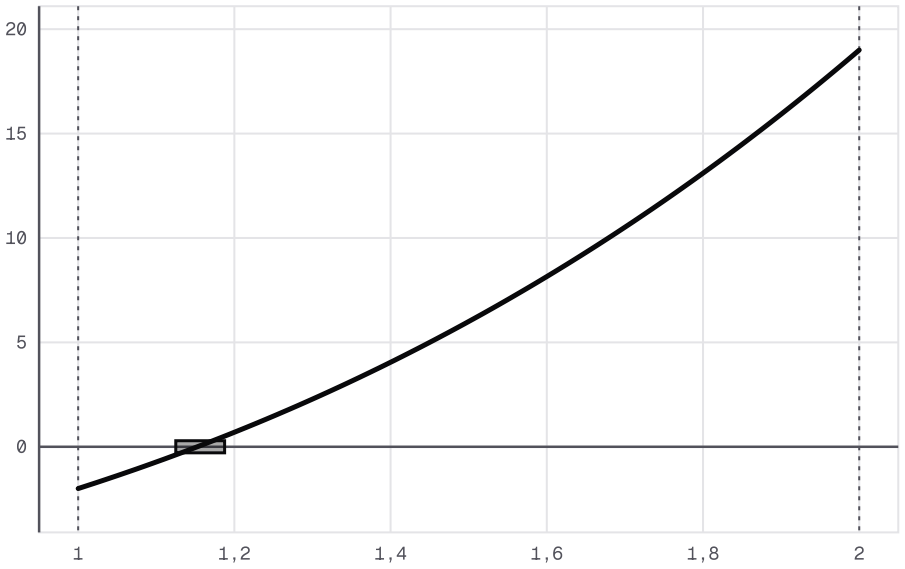
Garde la moitié où le produit des valeurs aux bornes est négatif.

Correction
$f(1) = -2$ et $f(1{,}5) = 6$ sont de signes contraires, et f est strictement croissante. Donc $\alpha \in]1, 1{,}5[$.

Méthode : la dichotomie

1. **Point de départ.** Un intervalle $[a_0, b_0]$ avec $f(a_0) \times f(b_0) < 0$, où α est l'unique solution.
2. **Couper en deux.** Pour l'intervalle courant $[a, b]$, calcule $f(m)$, où $m = \dfrac{a+b}{2}$ est le milieu.
3. **Garder la bonne moitié.** Si $f(m) = 0$, c'est fini : $\alpha = m$. Sinon, si $f(a) \times f(m) < 0$, garde $[a, m]$; sinon, garde $[m, b]$.
4. **Recommencer.** À chaque étape, la longueur est divisée par 2. Après n étapes, elle vaut $h = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Quatre étapes, puis à toi



Courbe de f ------ Verticales x = a et x = b Intervalle final, sur l'axe des abscisses

Intervalles successifs, bornes arrondies vers l'extérieur

Étape	Intervalle	Milieu m	Signe de f(m)
1	[1,0000 ; 2,0000]	m ≈ 1,5000	positif (+)
2	[1,0000 ; 1,5000]	m ≈ 1,2500	positif (+)
3	[1,0000 ; 1,2500]	m ≈ 1,1250	négatif (–)
4	[1,1250 ; 1,2500]	m ≈ 1,1875	positif (+)

Dichotomie pour f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 9 sur [1, 2] : quatre étapes.

a = 1, b = 2.

Une racine de f appartient à l'intervalle [1,1250 ; 1,1875].

Exemple : Les quatre premières étapes

Étape	Intervalle	Milieu m	Signe de $f(m)$
1	$[1,2]$	$1{,}5$	$+$
2	$[1,1{,}5]$	$1{,}25$	$+$
3	$[1,1{,}25]$	$1{,}125$	$-$
4	$[1{,}125,1{,}25]$	$1{,}1875$	$+$

Après quatre étapes, $1{,}125 < \alpha < 1{,}1875$. La longueur vaut $h = \dfrac{1}{2^4} = 0{,}0625$.

À toi

En partant de $[1,2]$, combien d'étapes faut-il au minimum pour obtenir $h \leq 0{,}01$?

A. 5, car $\dfrac{1}{2^5}$ s'écrit avec deux zéros après la virgule

Faux.

Après 5 étapes, $h = \dfrac{1}{32} = 0{,}03125$: c'est encore trop grand.

B. 6, car $2^6 = 64$ est proche de 100

Faux.

Proche ne suffit pas : $\dfrac{1}{64} = 0{,}015625 > 0{,}01$. Il faut $2^n \geq 100$.

C. 7

Juste.

Il faut $\dfrac{1}{2^n} \leq 0{,}01$, soit $2^n \geq 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$.

D. 100, une étape par centième

Faux.

On ne cherche pas $n \geq 100$, mais $2^n \geq 100$.

Indice 1

Écris la longueur après n étapes en fonction de n.

Indice 2

Il faut $\dfrac{1}{2^n} \leq 0{,}01$, c'est-à-dire $2^n \geq 100$.

Indice 3

Compare 2^6 et 2^7 à 100.

Correction

Après n étapes, $h = \dfrac{1}{2^n}$. La condition $h \leq 0{,}01$ équivaut à $2^n \geq 100$. Comme $2^6 = 64 < 100 \leq 128 = 2^7$, il faut au minimum 7 étapes.

Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Bornes atteintes, bornes approchées

Devine

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle vaut -1 en 0 et tend vers 2 en $+\infty$. Devine son image.

A. $[-1, 2]$, de la valeur en 0 à la limite en $+\infty$

Faux.

La valeur 2 est une limite, jamais atteinte : la borne 2 est exclue.

B. $[-1, 2[$

Juste.

Borne de gauche atteinte en 0, borne de droite approchée sans jamais être atteinte.

C. $]-1, 2[$, deux bornes ouvertes

Faux.

La valeur -1 est atteinte en 0 : la borne -1 est incluse.

D. $[-1, +\infty[$, puisque x tend vers $+\infty$
Faux.
x tend vers $+\infty$, mais les valeurs de la fonction restent sous 2.

Indice 1
La borne 0 appartient à l'intervalle de départ : la valeur en 0 est-elle atteinte ?
Indice 2
En $+\infty$, on ne peut parler que d'une limite.
Indice 3
Une fonction strictement croissante peut-elle atteindre sa limite en $+\infty$?

Correction
La fonction est strictement croissante. Elle atteint -1 en 0, puis ses valeurs augmentent en restant sous 2, sa limite en $+\infty$. Son image est $[-1, 2[$: c'est l'énoncé suivant.

Deux questions guident tout. Une valeur prise à une borne incluse est atteinte. Une limite, à une borne exclue ou infinie, ne l'est jamais.

Pourquoi est-ce vrai ? Si une fonction strictement croissante atteignait sa limite en un point, elle la dépasserait juste après ce point. L'énoncé suivant range ces réponses dans un tableau.

Propriété : Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b ($a < b$, a et b éventuellement infinis pour un intervalle ouvert de ce côté).

Intervalle I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \to a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)[$

Les limites aux bornes ouvertes existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; une borne infinie de $f(I)$ est alors ouverte.

Démonstration
Idée de la preuve. On traite f strictement croissante ; le cas décroissant est symétrique.

Étape 1. D'après F11, $f(I)$ est un intervalle.

Étape 2. Si $a \in I$, alors $f(a) < f(x)$ pour tout $x \in I$ tel que $x > a$: $f(a)$ est le plus petit élément de $f(I)$, borne gauche fermée. De même, si $b \in I$, $f(b)$ est le plus grand élément.

Étape 3. Si $b \notin I$, on admet qu'une fonction croissante sur I a une limite L, finie ou égale à $+\infty$, en b^-. Soit $x \in I$ et $x' \in I$ avec $x' > x$. Pour tout $x'' \in I$ tel que $x'' > x'$, on a $f(x') < f(x'')$; par passage à la limite quand x'' tend vers b^-, $f(x') \leq L$. Donc $f(x) < f(x') \leq L$: la valeur L n'est jamais atteinte. Pour tout réel $M < L$, la définition de la limite fournit $x \in I$ tel que $f(x) > M$: L est la borne droite, ouverte, de l'intervalle $f(I)$. Le cas $a \notin I$ est symétrique.

Étape omise : l'existence de la limite L, admise ici.

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : une borne fermée de I donne une valeur atteinte, donc une borne fermée de $f(I)$; une borne ouverte ou infinie donne une limite, jamais atteinte, donc une borne ouverte. Une fonction décroissante échange les bornes.

L'esquisse admet seulement l'existence de la limite aux bornes ouvertes.

À toi

La fonction $x \mapsto \sqrt{6-2x}$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$. Quelle est son image ?

A. $]-\infty, 0]$, l'intervalle de départ lu à l'envers

Faux.
Une racine carrée est toujours positive. Tu as recopié l'intervalle de départ à l'envers.

B. $]0, +\infty[$, car 0 est une borne

Faux.
La valeur 0 est atteinte en $x = 3$: la borne 0 est incluse.

C. $\left[0, \sqrt{6}\right]$, des valeurs en 3 et en 0

Faux.
$\sqrt{6}$ est la valeur en 0, mais 0 n'est pas une borne de l'intervalle de départ.

D. $[0, +\infty[$

Juste.
Elle vaut 0 en 3, borne incluse, et tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Décroissante : on lit la colonne de droite du tableau.

Indice 1
Calcule la valeur en 3, borne incluse.
Indice 2
Cherche la limite en $-\infty$: que devient $6 - 2x$?
Indice 3

Pour une fonction décroissante, la colonne « décroissante » du tableau s'applique.

Correction
En 3, la fonction vaut $\sqrt{0} = 0$. En $-\infty$, $6 - 2x$ tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{6-2x}$ aussi.

La fonction est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$, d'où l'image $[0, +\infty[$.

Exemple : Sans monotonie, le tableau ne s'applique pas

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $]-1, 2[$, mais elle n'y est pas monotone. Ses limites aux bornes valent 1 et 4. Le tableau donnerait $]1, 4[$: c'est faux. L'image est $[0, 4[$, car le minimum 0 est atteint en 0.

Théorème de la bijection

Une solution, et une seule

Devine

On regarde $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-1, 2]$. Combien de réels x de $[-1, 2]$ vérifient $x^2 = \dfrac{1}{4}$? Puis demande-toi : **pourquoi est-ce vrai** qu'une fonction continue et strictement monotone, elle, atteint chaque valeur une seule fois ?

A. Deux : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Juste.
Les deux réels sont dans $[-1, 2]$, et leur carré vaut $\dfrac{1}{4}$.

B. Un seul : $\dfrac{1}{2}$, car une racine carrée est positive.

Faux.
Une racine carrée est positive, mais x peut être négatif : $-\dfrac{1}{2}$ est aussi dans $[-1, 2]$.

C. Quatre : $\pm\dfrac{1}{2}$ et $\pm\dfrac{1}{4}$.

Faux.
$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$, pas $\dfrac{1}{4}$: seuls $\pm\dfrac{1}{2}$ conviennent.

D. Aucun.

Faux.
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{1}{2}$ est dans $[-1, 2]$.

Indice 1
Résous $x^2 = \dfrac{1}{4}$ dans $\mathbb{R}$.
Indice 2

Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et son opposé.

Indice 3

Vérifie que chacune est dans $[-1, 2]$.

Correction

Dans $\mathbb{R}$, $x^2 = \frac{1}{4}$ a deux solutions, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, toutes deux dans $[-1, 2]$. Il y en a deux parce que la fonction n'est pas monotone sur $[-1, 2]$. Pour une fonction continue et strictement monotone, le TVI donne l'existence et la stricte monotonie l'unicité : c'est le théorème suivant.

Théorème : Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors J est un intervalle et f est une **bijection** de I sur J : pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Démonstration

Idée de la preuve.

Étape 1. J est un intervalle. C'est F11, appliquée à la fonction continue f ; F15 précise ses bornes.

Étape 2. Existence. Par définition de $J = f(I)$, tout $y \in J$ s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$.

Étape 3. Unicité. Si $x \neq x'$ dans I, la stricte monotonie donne $f(x) \neq f(x')$, comme dans la preuve de F14.

Ce qui reste admis : l'image d'un intervalle (F11) et le calcul des bornes aux extrémités ouvertes (F15).

Ce que dit la preuve

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, chaque valeur de $J = f(I)$ a un antécédent, et un seul, dans I.

La preuve : l'existence vient de la définition de J, l'unicité de la stricte monotonie, comme à la section sur l'unicité. En exercice, le vrai travail consiste à calculer J.

À toi

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $I =]0, +\infty[$. Sur quel intervalle J réalise-t-elle une bijection ?

A. $J = [0, +\infty[$, puisque la fonction tend vers 0 en $+\infty$

Faux.

0 est une limite en $+\infty$, jamais atteinte : $\dfrac{1}{x} = 0$ n'a pas de solution.

B. $J =]-\infty, 0[$, car la fonction est décroissante

Faux.

Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$: les valeurs sont positives.

C. $J =]0, +\infty[$

Juste.

En 0^+, elle tend vers $+\infty$; en $+\infty$, vers 0. Les deux bornes de I sont exclues : celles de J aussi.

D. $J = \mathbb{R}$

Faux.

Les valeurs sont toutes strictement positives : J ne contient aucun négatif.

Indice 1

Calcule la limite en 0^+ et la limite en $+\infty$.

Indice 2

La fonction est décroissante : on lit la colonne « décroissante » du tableau de l'image.

Indice 3

Une limite n'est jamais atteinte : borne exclue.

Correction

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. La fonction est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc son image est $J =]0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur J.

Exemple **: En se restreignant aux réels positifs**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On étudie la fonction $x \mapsto x^n$ sur $I = [0, +\infty[$ et l'on vérifie les hypothèses du théorème de la bijection.

- **Continuité.** C'est une fonction polynôme, donc une fonction usuelle continue.
- **Stricte monotonie.** Sa dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$: la fonction est strictement croissante sur I.
- **Image.** Elle vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $J = [0, +\infty[$, d'après le tableau de l'image d'un intervalle.

Conclusion. $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Ce résultat servira pour la racine n-ième.

Fonction réciproque

Remonter d'une image à son antécédent

Devine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 18$, étudiée sur $I = [5, +\infty[$. Quel réel de I a pour image 2 par f ?

A. 2, puisqu'on cherche le réel associé à 2

Faux.

On cherche un antécédent de 2, pas 2 lui-même : $f(2) = 2$, mais $2 \notin I$.

B. $\dfrac{1}{2}$, l'inverse de 2

Faux.

C'est la confusion entre « réciproque » et « inverse » : on remonte de l'image à l'antécédent, on ne renverse pas une fraction.

C. 2 et 8, les deux solutions de $f(x) = 2$

Faux.

L'équation $f(x) = 2$ a bien deux solutions dans $\mathbb{R}$, mais seule 8 est dans $I = [5, +\infty[$.

D. 8

Juste.

$f(8) = 64 - 80 + 18 = 2$, et $8 \in I$.

Indice 1

Résous $x^2 - 10x + 18 = 2$, soit $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Indice 2

$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$.

Indice 3

Garde seulement la solution qui appartient à I.

Correction

L'équation $f(x) = 2$ équivaut à $(x - 2)(x - 8) = 0$, donc à $x = 2$ ou $x = 8$. Seul 8 est dans I.

Le réel cherché est 8 : on écrira $f^{-1}(2) = 8$.

Définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

La **fonction réciproque** de f, notée f^{-1}, est la fonction définie sur J qui associe à chaque $x \in J$ l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$. Ainsi :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

En particulier, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in I$, et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ pour tout $y \in J$.

Méthode : bijection et fonction réciproque

En clair : pour $x \in J$, $f^{-1}(x)$ est le seul antécédent de x par f qui appartienne à I.

1. **Hypothèses.** Montre que f est continue sur l'intervalle I et qu'elle y est strictement monotone.
2. **Image.** Calcule $J = f(I)$: valeurs de f aux bornes incluses, limites aux bornes exclues.
3. **Conclusion.** Écris : « d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J ».
4. **Expression.** Pour $x \in J$, résous l'équation $f(y) = x$, d'inconnue $y \in I$.
5. **Tri.** Ne garde que la solution située dans I. Elle donne $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Une rédaction modèle

Exemple : Rédaction modèle, avec tri des solutions

Soit f la fonction définie sur $I = [5, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 10x + 18$.

- **Hypothèses.** f est un polynôme, donc continue sur I, et $f'(x) = 2x - 10 > 0$ pour tout $x > 5$: f est strictement croissante sur I.
- **Image.** $f(5) = -7$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $J = [-7, +\infty[$.
- **Expression.** Soit $x \in J$ et $y \in I$. L'équation $f(y) = x$ équivaut à $(y-5)^2 = x + 7$, soit $y = 5 + \sqrt{x+7}$ ou $y = 5 - \sqrt{x+7}$.
- **Tri.** Si $x > -7$, la seconde valeur est strictement inférieure à 5 ; si $x = -7$, les deux valeurs valent 5.

Conclusion. Pour tout $x \in J$:

$$f^{-1}(x) = 5 + \sqrt{x+7}.$$

Remarque : $f(6) = -6$ et $f^{-1}(-6) = 6$. **Pourquoi est-ce vrai, et que deviennent les courbes ?** Les coordonnées s'échangent.

La bijection ou la réciproque figurent dans 5 des 16 sujets consultés ; l'expression explicite de la réciproque, dans 1 des 16 sujets consultés.

Attention : La réciproque n'est pas l'inverse

La notation f^{-1} désigne la fonction réciproque, jamais $\frac{1}{f}$. Avec la fonction ci-dessus, $f^{-1}(18) = 10$, alors que $\frac{1}{f(18)} = \frac{1}{162}$.

Pour obtenir $f^{-1}(x)$, on résout $f(y) = x$; on ne renverse aucune fraction.

Deux courbes symétriques

Propriété : Variations et courbe de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.
2. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Étape 1. Supposons f strictement croissante. Soit $y < y'$ dans J, et $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. Si l'on avait $x \geq x'$, la croissance de f donnerait $y = f(x) \geq f(x') = y'$: contradiction. Donc $x < x'$, et f^{-1} est strictement croissante. Le cas décroissant se traite de même, inégalités inversées.

Étape 2. Un point $M(x, y)$ est sur la courbe de f^{-1} si et seulement si $x \in J$ et $y = f^{-1}(x)$, c'est-à-dire $y \in I$ et $f(y) = x$ (F17). Cela équivaut à : $M'(y, x)$ est sur la courbe de f. Or, dans un repère orthonormé, M' est le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux réflexes de preuve. Pour le sens de variation, un raisonnement par l'absurde, comme pour l'unicité d'une solution. Pour la courbe, on traduit l'appartenance d'un point avec la définition de la réciproque, puis on reconnaît une symétrie.

Vérifie : Une étape de la preuve

À l'étape 1 de la preuve, f est strictement croissante, $y < y'$ dans J, et l'on suppose $x \geq x'$, avec $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. D'où vient la contradiction ?

A. De la continuité de f, qui interdit à la courbe de sauter entre x' et x.
Faux.
La continuité ne sert pas dans cette étape : seule la croissance de f est utilisée.

B. De la croissance de f, qui donnerait $y \geq y'$.
Juste.
$x \geq x'$ et f croissante donnent $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$, contraire à $y < y'$.

C. De la symétrie des deux courbes par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Faux.

La symétrie est le second point de la propriété : elle ne sert pas à prouver le premier.

D. De l'égalité $f^{-1} = \dfrac{1}{f}$, qui renverse l'ordre des valeurs.

Faux.

Cette égalité est fausse : la réciproque n'est pas l'inverse.

Indice 1

Que donne l'hypothèse $x \geq x'$ quand on applique f ?

Indice 2

f est croissante : $x \geq x'$ entraîne $f(x) \geq f(x')$.

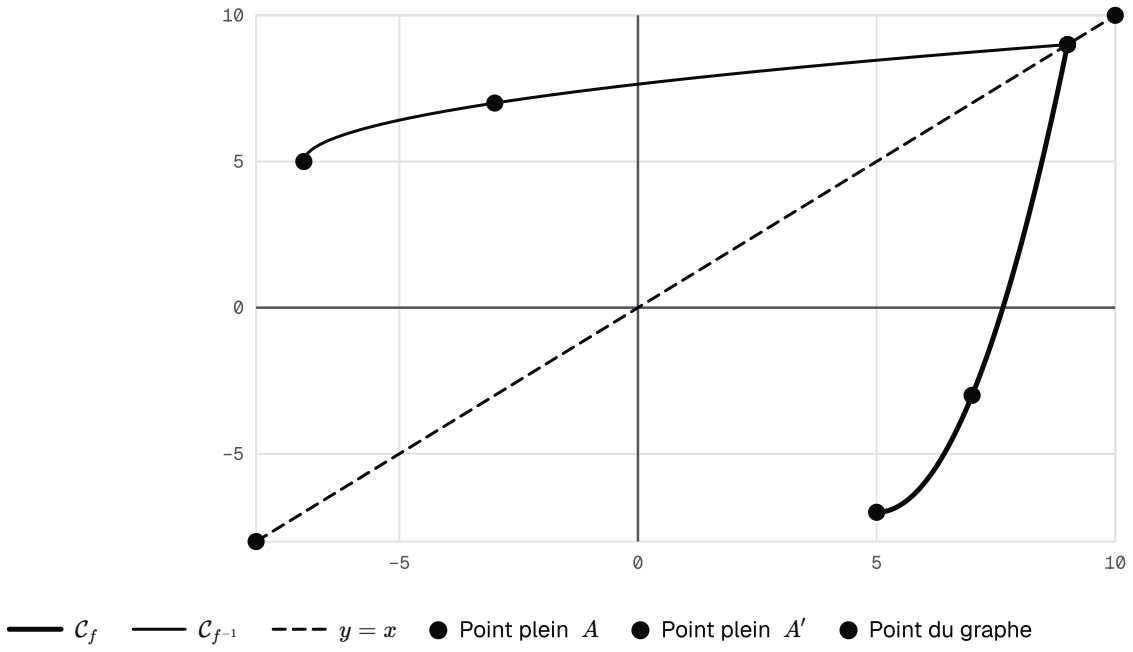
Indice 3

Or $f(x) = y$ et $f(x') = y'$.

Correction

Si $x \geq x'$, la croissance de f donne $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$. Cela contredit $y < y'$. Donc $x < x'$: f^{-1} est strictement croissante.

Sur la figure ci-dessous, le point $A(7, -3)$ de la courbe de f correspond au point $A'(-3, 7)$ de celle de f^{-1}.



Les courbes de f et de sa réciproque, symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Continuité de la réciproque

Propriété : Continuité de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $J = f(I)$.

Alors la fonction f^{-1} est continue sur J.

Remarque

Ce résultat est admis. Sa preuve demande des outils sur les fonctions monotones qui ne sont pas étudiés cette année. Sur la figure, tu le vois : le symétrique d'une courbe sans saut n'a pas de saut non plus.

Racine n-ième

Une nouvelle racine

Devine

Tu as vu que $x \mapsto x^4$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Quel est l'unique réel $y \geq 0$ tel que $y^4 = 81$?

A. 9, car $9^2 = 81$

Faux.

$9^2 = 81$, mais $9^4 = 6561$: tu as pris une racine carrée au lieu d'une racine quatrième.

B. -3

Faux.

$(-3)^4 = 81$, mais on cherche $y \geq 0$.

C. $\dfrac{81}{4}$, le quart de 81

Faux.

Une racine quatrième n'est pas une division par 4 : $\left(\dfrac{81}{4}\right)^4$ est bien plus grand que 81.

D. 3

Juste.

$3^4 = 81$ et $3 \geq 0$.

Indice 1

Cherche un entier dont la puissance quatrième vaut 81.

Indice 2

$81 = 9 \times 9$, et $9 = 3 \times 3$.

Indice 3

Vérifie la condition $y \geq 0$.

Correction

$3^4 = 81$ et $3 \geq 0$. Par bijection, c'est l'unique réel positif qui convient. On le note $\sqrt[4]{81}$: c'est la racine quatrième de 81.

Définition : Racine n-ième

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et son image est $[0, +\infty[$: d'après le théorème de la bijection (F16), elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction racine n-ième** et notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Exemple : Un cas numérique

On a $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt[3]{27} = 3$, car $2^3 = 8$ et $3^3 = 27$. Leur produit vaut 6. Or $8 \times 27 = 216$ et $6^3 = 216$, donc $\sqrt[3]{216} = 6$ aussi. Ainsi :

$$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \times 27}.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Deux réels positifs de même cube sont égaux : c'est l'idée de la preuve qui suit.

Calculer avec les racines

Propriété : Règles de calcul sur les racines n-ièmes

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$, et x, y deux réels positifs.

- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$.
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ et, si $y > 0$, $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$ et $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Chaque égalité relie deux réels positifs. D'après F20, deux réels positifs sont égaux dès qu'ils ont la même puissance n-ième (ou np-ième).

Étape 1, détaillée pour le produit. $\left(\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = xy$, et $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} \geq 0$. Donc $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

Étapes omises : le quotient, la racine d'une racine et la puissance se traitent de la même façon. La comparaison découle de la stricte croissance de la racine n-ième (F18).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour prouver une égalité entre racines n-ièmes, on élève les deux membres à la puissance n. Deux réels **positifs** de même puissance n-ième sont égaux, par bijection. Vérifie toujours que les deux membres sont positifs.

À toi

Simplifie $\sqrt[4]{48}$.

A. $2\sqrt[4]{3}$

Juste.
$48 = 16 \times 3$ et $\sqrt[4]{16} = 2$, donc $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$.

B. $4\sqrt[4]{3}$, car $48 = 16 \times 3$

Faux.
$\sqrt[4]{16} = 2$, pas 4 : c'est $\sqrt{16}$ qui vaut 4.

C. 12, le quart de 48

Faux.
Une racine quatrième ne divise pas par 4 : $12^4 = 20736$.

D. $4\sqrt{3}$

Faux.
$4\sqrt{3} = \sqrt{48}$: c'est la racine carrée de 48, pas sa racine quatrième.

Indice 1
Cherche dans 48 un facteur qui est une puissance quatrième.
Indice 2
$48 = 16 \times 3$, avec $16 = 2^4$.
Indice 3
Utilise $\sqrt[4]{x} \times \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{xy}$.

Correction
$48 = 2^4 \times 3$, donc $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$, par la règle du produit des racines.

Exemple : Une condition, puis une équation

Contre-exemple. L'égalité $\sqrt[n]{x^n} = x$ exige $x \geq 0$. Avec $x = -2$ et $n = 4$: $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$, et non -2.

Vers une équation. Dans $\mathbb{R}$, $x^4 = 16$ a deux solutions, 2 et -2. Mais $x^3 = -8$ n'en a qu'une, -2.
Pourquoi est-ce vrai ? Tout dépend de la parité de l'exposant.

Une équation de degré n

Propriété : Équation $x^n = a$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et a un réel. Dans $\mathbb{R}$:

- si n est **impair**, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $\sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$, et $-\sqrt[n]{-a}$ si $a < 0$;
- si n est **pair** : pour $a > 0$, elle admet exactement deux solutions, $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$; pour $a = 0$, l'unique solution est 0 ; pour $a < 0$, elle n'admet aucune solution.

Démonstration

Étape 1. n impair. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (F07). Elle y est strictement croissante : si $0 \leq x < x'$, alors $x^n < x'^n$ (produit d'inégalités entre réels positifs) ; si $x < x' \leq 0$, alors $0 \leq -x' < -x$, donc $(-x')^n < (-x)^n$, soit $x^n < x'^n$ car n est impair ; si $x < 0 < x'$, alors $x^n < 0 < x'^n$. Ses limites sont $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. D'après F15 et F16, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: l'équation a une unique solution. Si $a \geq 0$, c'est $\sqrt[n]{a}$ (F20). Si $a < 0$, $\left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = -(-a) = a$, car n est impair.

Étape 2. n pair. On a $x^n = |x|^n \geq 0$. Si $a < 0$, il n'y a aucune solution. Si $a \geq 0$, $x^n = a \iff |x|^n = a \iff |x| = \sqrt[n]{a}$ (F20) : deux solutions opposées si $a > 0$, la seule solution 0 si $a = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En clair : pour n impair, $x^n = a$ a toujours une seule solution réelle ; pour n pair, deux solutions opposées si $a > 0$, la seule solution 0 si $a = 0$, aucune si $a < 0$.

La preuve sépare les deux parités : une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ pour n impair, le passage par $|x|$ pour n pair.

Vérifie : Une étape de la preuve

À l'étape 2 de la preuve (n pair), pourquoi passe-t-on par $|x|$?

A. Parce que x est positif dans cette étape, comme dans la définition de la racine n-ième.
Faux.
Rien n'impose $x \geq 0$: les solutions peuvent être négatives, comme $-\sqrt[n]{a}$.

B. Pour n'obtenir qu'une seule solution, comme dans le cas impair de l'étape 1.
Faux.
C'est le contraire : $|x| = \sqrt[n]{a}$ donne deux valeurs de x si $a > 0$.

C. Parce que $x^n = |x|^n$ et que $|x| \geq 0$: on peut alors utiliser la racine n-ième.

Juste.

La racine n-ième n'est définie que pour les positifs : $|x|$ permet de s'y ramener, puis on revient à $x = \pm|x|$.

D. Parce que n est impair, et qu'une puissance impaire est toujours positive.

Faux.

À l'étape 2, n est pair. Une puissance impaire garde le signe de x.

Indice 1

Quel est le signe de x^n quand n est pair ?

Indice 2

$x^n = |x|^n$ pour n pair.

Indice 3

Sur quels réels la racine n-ième est-elle définie ?

Correction

Pour n pair, $x^n = |x|^n$, et $|x|$ est positif. L'équation devient $|x|^n = a$: la définition de la racine n-ième s'applique à $|x|$ et donne $|x| = \sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$. On revient ensuite à x : deux solutions opposées si $a > 0$.

Exemple : Deux équations, puis une limite

Dans $\mathbb{R}$, $x^5 = -32$ a une unique solution, $-\sqrt[5]{32} = -2$, car 5 est impair. Et $x^4 = 5$ a deux solutions : $\sqrt[4]{5}$ et $-\sqrt[4]{5}$. Enfin, $x^6 = -64$ n'en a aucune.

Une limite, maintenant. Quand x tend vers 1, $x + 15$ tend vers 16, et $\sqrt[4]{x + 15}$ semble tendre vers $\sqrt[4]{16} = 2$.

Pourquoi est-ce vrai ? La racine n-ième est la réciproque d'une fonction continue.

Limites et continuité

Propriété : Continuité et limites de la racine n-ième d'une fonction

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et u une fonction.

- Si u est continue et positive sur un intervalle I, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I.
- Si u est positive au voisinage de a (a réel ou $\pm\infty$) et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$ avec $\ell \geq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$.

Démonstration

Étape 1. La racine n-ième est continue sur $[0, +\infty[$: c'est la réciproque d'une fonction continue strictement croissante (F19, F20). Comme $u(I) \subset [0, +\infty[$, le premier point découle de F10.

Étape 2. Si $\ell > 0$, la racine n-ième est continue en ℓ et F09 donne le deuxième point. Si $\ell = 0$, soit $c > 0$. Pour $0 \leq y < c^n$, on a $\sqrt[n]{y} < c$ (F21). Or $u(x) \geq 0$ au voisinage de a et $u(x)$ tend vers 0, donc $0 \leq u(x) < c^n$ pour x assez proche de a. Ainsi $0 \leq \sqrt[n]{u(x)} < c$: $\sqrt[n]{u(x)}$ tend vers $0 = \sqrt[n]{0}$.

Étape 3. Soit $A > 0$. Si $y > A^n$, alors $\sqrt[n]{y} > A$ par stricte croissance (F21). Donc $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$, et F09 donne le troisième point.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve assemble des outils déjà établis : continuité de la fonction réciproque (F19), continuité d'une composée (F10), limite d'une fonction composée (F09) et stricte croissance de la racine, qui traite à part la limite 0.

Conséquence pratique : on passe à la limite sous une racine n-ième, si l'intérieur reste positif.

À toi

Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{8x-5}}$?

A. $\dfrac{1}{8}$, la limite de la fraction
Faux.
$\dfrac{1}{8}$ est la limite de la fraction ; il faut encore prendre la racine cubique.

B. $\dfrac{1}{2}$
Juste.
La fraction tend vers $\dfrac{1}{8}$, qui est positif, et $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$.

C. $+\infty$, car le numérateur tend vers $+\infty$
Faux.
Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$, mais leur quotient tend vers $\dfrac{1}{8}$.

D. $\dfrac{1}{24}$, le tiers de $\dfrac{1}{8}$
Faux.
Une racine cubique n'est pas une division par 3.

Indice 1
Calcule d'abord la limite de la fraction en $+\infty$.
Indice 2
Factorise par x : la fraction tend vers $\dfrac{1}{8}$.
Indice 3

Passe à la limite sous la racine cubique, sachant que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Correction

Pour tout $x > \frac{5}{8}$, la fraction est positive et :

$$\frac{x+1}{8x-5} = \frac{1+\frac{1}{x}}{8-\frac{5}{x}}.$$

Elle tend vers $\frac{1}{8}$. Par la limite de la racine n-ième d'une fonction, la limite vaut $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Exemple : Pour aller plus loin : une indétermination avec une racine cubique

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$, une forme indéterminée.

Quantité conjuguée généralisée. Soit $x > 0$. Posons $A = \sqrt[3]{x^3+6x^2}$ et $B = x$. Comme $A^3 - B^3 = (A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$ et $A^3 - B^3 = 6x^2$:

$$A - B = \frac{6x^2}{A^2+AB+B^2}.$$

Terme dominant. On a $A = xC$, avec $C = \sqrt[3]{1+\frac{6}{x}}$, car $1+\frac{6}{x} \geq 0$. En simplifiant par x^2 :

$$A - B = \frac{6}{C^2+C+1}.$$

Conclusion. Quand x tend vers $+\infty$, C tend vers 1, par la limite de la racine n-ième. La limite vaut $\frac{6}{3} = 2$.

Puissances rationnelles

Une puissance fractionnaire

Devine

Que vaut, selon toi, $8^{\frac{2}{3}}$?

A. $\frac{16}{3}$, soit $8 \times \frac{2}{3}$

Faux.

L'exposant ne multiplie pas 8 : $8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ n'est pas une puissance.

B. 64, soit 8^2

Faux.

$64 = 8^2$: tu as oublié la racine cubique, donnée par le dénominateur 3.

C. 2, soit $\sqrt[3]{8}$

Faux.

$2 = \sqrt[3]{8}$: tu as oublié le carré, donné par le numérateur 2.

D. 4

Juste.
$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, ou encore $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$.

Indice 1
Le dénominateur de l'exposant indique une racine, le numérateur une puissance.
Indice 2
Calcule $\sqrt[3]{8}$.
Indice 3
Élève le résultat au carré.

Correction
$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, car $4^3 = 64$. C'est la définition qui suit.

Définition : Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Soit x un réel strictement positif et r un rationnel non nul, écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On pose $x^r = \sqrt[q]{x^p}$, avec la convention $\sqrt[1]{y} = y$. Ce réel ne dépend pas de l'écriture choisie pour r.

En particulier, pour tout entier $n \geq 2$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Exemple : Deux écritures, une valeur

Le rationnel $\dfrac{1}{2}$ s'écrit aussi $\dfrac{2}{4}$. Avec $x = 16$: $\sqrt{16} = 4$, et $\sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{256} = 4$. Les deux écritures donnent le même nombre.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux réels positifs qui ont la même puissance q-ième sont égaux : on compare donc des puissances, pas des racines.

Une seule valeur

Propriété : Indépendance de l'écriture d'une puissance rationnelle

Soit x un réel strictement positif, p et p' deux entiers relatifs non nuls, q et q' deux entiers naturels non nuls tels que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$.

Alors $\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q']{x^{p'}}$: le réel x^r de F24 ne dépend pas de l'écriture choisie pour r.

Démonstration

Étape 1. Le réel $y = \sqrt[q]{x^p}$ est l'unique réel $y > 0$ tel que $y^q = x^p$ (F20 ; directement si $q = 1$).

Étape 2. Soit $\frac{p'}{q'}$ une autre écriture de r, de sorte que $pq' = p'q$. Alors $\left(y^{q'}\right)^{q} = (y^{q})^{q'} = x^{pq'} = x^{p'q} = \left(x^{p'}\right)^{q}$.

Étape 3. Les réels $y^{q'}$ et $x^{p'}$ sont strictement positifs et ont la même puissance q-ième. D'après F20 (ou directement si $q = 1$), ils sont égaux : $y^{q'} = x^{p'}$, donc $y = \sqrt[q']{x^{p'}}$. Donc $\sqrt[q]{x^{p}} = \sqrt[q']{x^{p'}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On ne compare pas deux racines directement : on compare leurs puissances. Deux réels strictement positifs de même puissance q-ième sont égaux. C'est le même argument que pour les règles sur les racines n-ièmes.

Vérifie

Pourquoi a-t-on le droit d'écrire $9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$?

A. Parce que 9^r ne dépend pas de l'écriture de r.

Juste.
$\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont deux écritures du même rationnel : le résultat est le même, comme l'énoncé ci-dessus le prouve.

B. Parce que $\sqrt[4]{9^2} = \frac{9^2}{4}$, et que l'on peut simplifier la fraction par 2.

Faux.
Une racine quatrième n'est pas une division par 4 : $\frac{81}{4} \neq 3$.

C. On n'a pas ce droit : $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81} = 9$, qui n'est pas égal à 3.

Faux.
$9^4 = 6561$, pas 81. En fait, $\sqrt[4]{81} = 3$, car $3^4 = 81$.

D. Parce qu'on peut toujours simplifier un exposant, même pour un réel négatif.

Faux.
Pour un réel négatif, x^r n'est pas défini ici : la simplification n'a de sens que pour $x > 0$.

Indice 1
Les rationnels $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont-ils égaux ?
Indice 2
Calcule $\sqrt[4]{9^2}$ pour contrôler.
Indice 3
Quelle propriété dit que le résultat ne dépend pas de l'écriture ?

Correction

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $9 > 0$. Comme x^r ne dépend pas de l'écriture de r, $9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$. Contrôle : $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81} = 3$, car $3^4 = 81$.

Exemple : Simplifier l'exposant d'abord

Calculons $27^{\frac{4}{6}}$. L'exposant se simplifie, car l'écriture ne compte pas : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Donc :

$$27^{\frac{4}{6}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Une règle à deviner. $4^{\frac{1}{2}} \times 4^1 = 2 \times 4 = 8$, et $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 8$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les exposants s'ajoutent, comme pour les puissances entières.

Les règles de calcul

Propriété : Règles de calcul sur les puissances rationnelles

Soit x et y deux réels strictement positifs, et r, r' deux rationnels non nuls. Avec la convention $x^0 = 1$:

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ et $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$;
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{rr'}$;
- $(xy)^r = x^r \times y^r$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$;
- $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$.

Démonstration

Idée de la preuve. On écrit r et r' avec un même dénominateur q : $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q}$, ce que F25 permet.

Étape 1, détaillée pour le produit. $x^r \times x^{r'} = \sqrt[q]{x^p} \times \sqrt[q]{x^{p'}} = \sqrt[q]{x^{p+p'}} = x^{r+r'}$, d'après F21 et les puissances entières.

Étapes omises : les autres règles se ramènent de la même façon aux règles des racines (F21) et des puissances entières.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Avec un même dénominateur, chaque règle sur les puissances rationnelles devient une règle sur les racines n-ièmes et les puissances entières. Retiens surtout la condition : $x > 0$ et $y > 0$.

À toi

Écris $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x}}{x}$ sous la forme x^r, pour $x>0$.

A. $x^{-\frac{2}{3}}$, en multipliant $\dfrac{2}{3}$ par $\dfrac{1}{2}$, puis en retranchant 1

Faux.

Tu as multiplié les exposants $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$ au lieu de les additionner : $\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$.

B. $x^{\frac{7}{6}}$, en additionnant $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$

Faux.

Tu as oublié de diviser par x, c'est-à-dire de retrancher 1.

C. $x^{\frac{1}{6}}$

Juste.

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{4+3-6}{6}=\dfrac{1}{6}$.

D. $x^{-\frac{1}{6}}$

Faux.

Erreur de signe : $\dfrac{7}{6}-1=\dfrac{1}{6}$, qui est positif.

Indice 1

Écris chaque facteur comme une puissance de x.

Indice 2

$\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

Indice 3

Additionne les exposants du numérateur, puis retranche 1.

Correction

Soit $x>0$. On a $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Par les règles de calcul sur les puissances rationnelles :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x}}{x}&=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1}\\&=x^{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

Attention : Seulement pour des réels positifs

Ici, $\sqrt[n]{x}$ n'est définie que pour $x\geq 0$, et x^r, avec r rationnel non entier, que pour $x>0$. Hors de ce cadre, les règles se contredisent.

Si l'on écrivait $(-8)^{\frac{2}{6}}$, on trouverait $\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$, alors que le réel dont le cube vaut -8 est -2. Pour $a<0$, la solution de $x^3=a$ se note $-\sqrt[3]{-a}$.

La fonction arctangente

La tangente, à l'envers

Devine

Quel réel θ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifie $\tan\theta = -1$?

A. $\frac{3\pi}{4}$, car $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$

Faux.

On a bien $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$, mais $\frac{3\pi}{4}$ n'est pas dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

B. $-\frac{\pi}{4}$

Juste.

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$, et $-\frac{\pi}{4}$ est bien dans l'intervalle.

C. $\frac{\pi}{4}$, l'angle dont la tangente vaut 1

Faux.

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$, pas -1 : attention au signe.

D. $-\frac{\pi}{3}$

Faux.

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, pas -1.

Indice 1

Quel angle remarquable a pour tangente 1 ?

Indice 2

La tangente est impaire : $\tan(-x) = -\tan x$.

Indice 3

Vérifie que ta réponse est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Correction

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et la tangente est impaire, donc $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Comme $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est le réel cherché.

Il est unique sur cet intervalle, où la tangente est strictement croissante.

Exemple : Vérifier les hypothèses du théorème de la bijection

Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

- **Continuité.** $\tan$ est continue sur I, inclus dans son ensemble de définition : c'est une fonction usuelle.
- **Stricte monotonie.** Pour $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$: $\tan$ est strictement croissante sur I.
- **Image.** $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, donc $\tan(I) = \mathbb{R}$, d'après le tableau de l'image d'un intervalle.

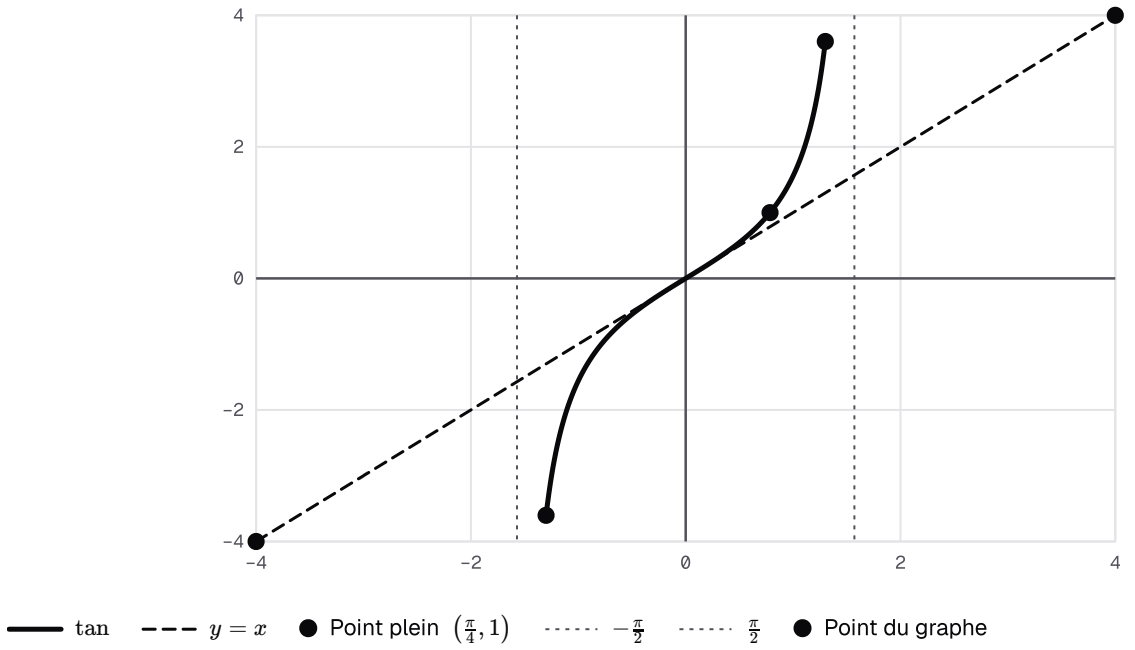
D'après le théorème de la bijection, $\tan$ réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque mérite un nom.

Définition : Fonction arctangente

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et son image est $\mathbb{R}$: d'après le théorème de la bijection (F16), elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction réciproque est appelée **fonction arctangente** et notée $\arctan$; elle est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x et tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y = \arctan x \iff \tan y = x.$$



La courbe de tan, tracée sur [-1,3 ; 1,3], et la droite y = x. La courbe d'arctan n'est pas tracée : c'est la symétrique de celle de tan par rapport à cette droite.

Les propriétés

En clair : pour tout réel x, $\arctan x$ est le seul réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x. La fonction arctan apparaît, sans être redéfinie, dans 3 des 16 sujets consultés : ses propriétés doivent devenir des réflexes.

Un cas numérique. $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, donc $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} = -\arctan\sqrt{3}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les propriétés d'arctan sont celles de la tangente, lues dans l'autre sens.

Propriété : Propriétés de la fonction arctangente

- La fonction $\arctan$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.
- Pour tout réel x : $\arctan(-x) = -\arctan x$ et $\tan(\arctan x) = x$.
- Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\arctan(\tan x) = x$.
- $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

Démonstration

Étape 1. $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (F27). D'après F18 et F19, $\arctan$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Étape 2. Soit $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $x > \tan c$, on a $c < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ par croissance. Donc $\arctan x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$; de même vers $-\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$.

Étape 3. Le réel $-\arctan x$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(-\arctan x) = -x$, car $\tan$ est impaire. D'après F27, $-\arctan x = \arctan(-x)$.

Étape 4. Les compositions et les valeurs viennent de F27 et F17 : par exemple, $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$ et $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque égalité sur arctan se prouve de la même façon : on fabrique un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on calcule sa tangente, puis on reconnaît arctan.

Les limites viennent de la croissance : pour tout $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan x$ est entre c et $\dfrac{\pi}{2}$ dès que $x > \tan c$.

Vérifie : Une étape de la preuve

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi vérifie-t-on que $-\arctan x$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$?

A. Pour prouver que la tangente est impaire, ce qui sert ensuite à calculer $\tan(-\arctan x)$.

Faux.

L'imparité de la tangente est un acquis de 1re année : elle est utilisée, pas prouvée, dans cette étape.

B. Pour que arctan soit croissante sur $\mathbb{R}$.

Faux.

La croissance d'arctan vient de l'étape 1, pas de l'étape 3.

C. Ce n'est pas utile : $\tan(-\arctan x) = -x$ suffit à conclure.

Faux.

Non : $\tan(\pi - \arctan x) = -x$ aussi, et pourtant $\pi - \arctan x \neq \arctan(-x)$.

D. Pour reconnaître $\arctan(-x)$: c'est le seul réel de cet intervalle dont la tangente vaut $-x$.

Juste.

Deux réels peuvent avoir la même tangente ; dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il n'y en a qu'un. C'est ce qui permet de conclure.

Indice 1

Que dit la définition d'arctan : combien de réels de l'intervalle ont une tangente donnée ?

Indice 2

Un seul : d'où l'importance de l'intervalle.

Indice 3

Pense à $\pi - \arctan x$, qui a aussi pour tangente $-x$.

Correction

La définition d'arctan dit : $\arctan(-x)$ est le **seul** réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $-x$. L'étape 3 montre que $-\arctan x$ est dans cet intervalle et que sa tangente vaut $-x$. Donc $-\arctan x = \arctan(-x)$. Sans la vérification de l'intervalle, on ne pourrait pas conclure.

Exemple : Des valeurs à reconnaître

Par imparité, $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Par composition, $\arctan\left(x^3+2\right)$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers $-\infty$.

Enfin, $\tan(\arctan 5) = 5$, mais $\arctan 5$ n'a pas de valeur remarquable : on le laisse écrit ainsi.

Méthode et rédaction

Méthode : prouver une égalité entre arctangentes

1. **Nommer.** Appelle θ l'expression dont tu veux prouver qu'elle vaut $\arctan x$.
2. **Situer.** Montre que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sans cette étape, rien n'est prouvé.
3. **Calculer.** Montre que $\tan\theta = x$. **Petit rappel** : si $\tan a \tan b \neq 1$, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; si $\tan a \tan b \neq -1$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.
4. **Conclure.** Écris : « θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = x$, donc $\theta = \arctan x$ ».

Exemple : Rédaction modèle

Montrer que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Posons $a=\arctan\frac{1}{2}$, $b=\arctan\frac{1}{3}$ et $\theta=a+b$.

Situer. Comme $\arctan$ est strictement croissante et $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$, les réels a et b sont dans $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$. Donc $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Calculer. On a $\tan a\tan b=\frac{1}{6}\neq 1$, d'où :

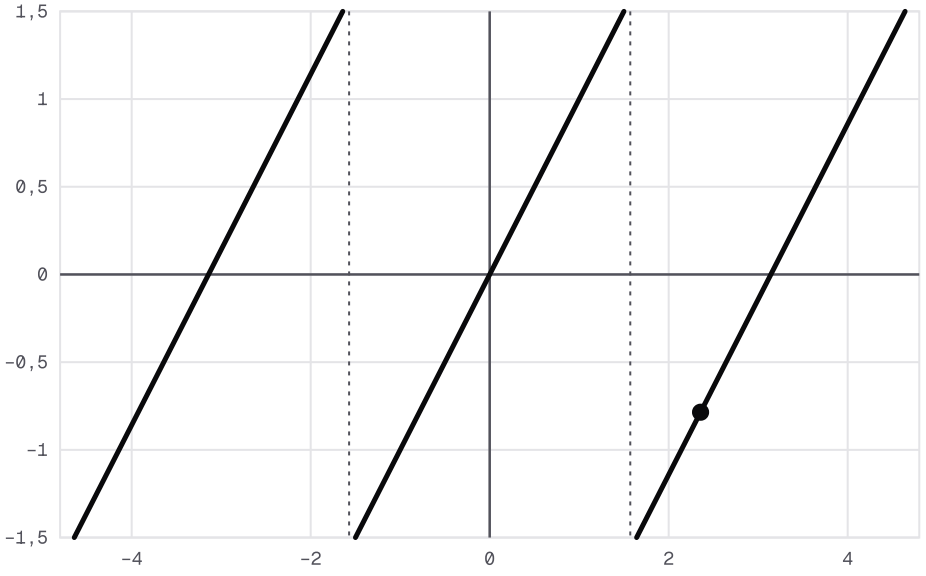
$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\\&=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1\end{aligned}$$

Conclusion. $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta=1$, donc $\theta=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

Attention : Une simplification piège

L'égalité $\arctan(\tan x)=x$ n'est vraie que pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, car arctan ne prend ses valeurs que dans cet intervalle.

Par exemple, $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$, donc $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$, et non $\frac{3\pi}{4}$. Hors de l'intervalle, ramène-toi d'abord à un réel de même tangente qui s'y trouve.



$y=\arctan(\tan x)$ ····· $x=-\frac{\pi}{2}$ ····· $x=\frac{\pi}{2}$ ● Point du graphe

Graphe de x donne arctan(tan x) : il coïncide avec la droite y = x seulement entre -π/2 et π/2, puis se répète en dents de scie.

À toi : Ta rédaction

Montre que $\arctan 3 - \arctan \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. Rédige les quatre étapes de la méthode, puis compare.

Indice 1

Pose $a = \arctan 3$, $b = \arctan \dfrac{1}{2}$ et $\theta = a - b$. Situe a et b par rapport à $\dfrac{\pi}{4}$.

Indice 2

Comme $\dfrac{1}{2} < 1 < 3$, on a $0 < b < \dfrac{\pi}{4} < a < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Indice 3

Utilise $\tan(a-b)$; vérifie la condition $\tan a \tan b \neq -1$.

Réponse

Posons $a = \arctan 3$, $b = \arctan \dfrac{1}{2}$ et $\theta = a - b$.

Situer. Comme $\arctan$ est strictement croissante et $\dfrac{1}{2} < 1 < 3$, on a $0 < b < \dfrac{\pi}{4} < a < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Calculer. On a $\tan a \tan b = \dfrac{3}{2} \neq -1$, d'où :

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = 1$, donc $\theta = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Tu sais maintenant établir une égalité entre arctangentes.

Coin examen : une chaîne de « montrer que »

Exemple : Le problème et la question 1

Au bac, ces questions s'enchaînent dans un même problème, calculatrice interdite. L'existence et l'unicité d'une solution figurent dans 15 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). La continuité en un point figure dans 9 des 16 sujets consultés. La bijection ou la réciproque figurent dans 5 des 16 sujets consultés.

Dans ces sujets, chacune de ces questions vaut de $0{,}25$ à $0{,}75$ point. Barème indicatif ci-dessous.

Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 4 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue à droite en 1 (0,5 point).

Soit $x > 1$. Comme $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$, on a $g(x) = x^2 + x - 3$. Ce polynôme tend vers $1 + 1 - 3 = -1$ quand x tend vers 1^+. Donc :

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -1 = g(1).$$

Conclusion. g est continue à droite en 1.

Exemple **: Questions 2 et 3**

2. Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$ (0,75 point).

Continuité. Pour tout $x \geq 1$, $g(x) = x^2 + x - 3$, même en 1. Donc g est continue sur $[1, +\infty[$, comme fonction polynôme.

Stricte monotonie. Pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = 2x + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $[1, 2]$.

Signes aux bornes. $g(1) = -1$ et $g(2) = 3$, donc $g(1) \times g(2) < 0$.

Conclusion. Par le théorème des valeurs intermédiaires et par la stricte monotonie de g, l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]1, 2[$.

3. Calculer $g(1{,}3)$ et $g(1{,}4)$, puis en déduire que $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$ (0,5 point).

À la main : $g(1{,}3) = 1{,}69 + 1{,}3 - 3 = -0{,}01$ et $g(1{,}4) = 1{,}96 + 1{,}4 - 3 = 0{,}36$. Ainsi :

$$g(1{,}3) < 0 = g(\alpha) < g(1{,}4).$$

Conclusion. Comme g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

Exemple **: Question 4**

4. Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser (0,5 point).

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $g(1) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Conclusion. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $J = [-1, +\infty[$.

À toi : Ta rédaction

5. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$ (0,5 point). Rédige ta réponse, puis compare.

Indice 1
Pour $x \in J$ et $y \geq 1$, écris l'équation $g(y) = x$, d'inconnue y.
Indice 2
$y^2 + y - 3 - x = 0$ est une équation du second degré : son discriminant vaut $4x + 13$.
Indice 3

Une seule des deux racines est supérieure ou égale à 1 : laquelle ?

Réponse

Soit $x \in [-1, +\infty[$ et $y \in [1, +\infty[$. L'équation $g(y) = x$ équivaut à $y^2 + y - (3 + x) = 0$.

Le discriminant vaut $1 + 4(3 + x) = 4x + 13$, et $4x + 13 \geq 9 > 0$. Les racines sont $\dfrac{-1 + \sqrt{4x + 13}}{2}$ et $\dfrac{-1 - \sqrt{4x + 13}}{2}$. La seconde est négative, donc hors de $[1, +\infty[$. La première est supérieure ou égale à $\dfrac{-1 + 3}{2} = 1$: elle convient.

Conclusion. Pour tout $x \in [-1, +\infty[$:

$$g^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{4x + 13}}{2}.$$

Contrôle : $g^{-1}(-1) = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Limites, continuité et fonctions réciproques » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)