BURHAN

Résumé : Fonctions et suites définies par une intégrale

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions et suites définies par une intégrale	Semestre 2

La fonction définie par une intégrale

À retenir : Le réflexe : la continuité sur le segment

Avant d'écrire $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, vérifie que f est continue sur le segment d'extrémités a et x. La lettre x est une borne. La lettre t est la variable d'intégration. Seules les bornes dépendent de x : l'intégrande ne contient jamais x.

Définition : Fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Pour tout $x \in I$, f est continue sur le segment d'extrémités a et x : l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

On appelle **fonction définie par une intégrale**, de borne fixe a, la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La variable d'intégration t est muette : $F(x)$ dépend de a et de x, jamais de t.

Théorème : Dérivée de x ↦ ∫ₐˣ f(t) dt

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

En particulier, F est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque

Le chapitre des primitives a **admis** l'existence d'une primitive pour toute fonction continue sur un intervalle. Le théorème de dérivation (F02) ne démontre pas cette existence : il s'en sert. Il en déduit seulement que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Attention : La variable d'intégration est muette

Écrire $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ confond la borne et la variable. Garde une autre lettre sous l'intégrale : $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$. Le résultat dépend de a et de x, jamais de t.

Exemple

Énoncé. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$. Donne $F(2)$, $F'(x)$, puis une expression de $F(x)$ sans intégrale.

Hypothèses. L'intégrande $t \mapsto \dfrac{t}{t^2+3}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, car $t^2+3 > 0$. La borne fixe 2 appartient à $\mathbb{R}$.

Conclure. D'après le théorème de dérivation (F02), $F(2) = 0$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+3}{7}\right)$ a la même dérivée et s'annule en 2. Par unicité, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+3}{7}\right)$.

Quand les bornes dépendent de x

Théorème : Dérivée de x ↦ ∫ de v(x) à u(x) de f(t) dt

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J, à valeurs dans I. La fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$:

$$H'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big).$$

En particulier, pour $a \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J, de dérivée $x \mapsto u'(x)\,f\big(u(x)\big)$.

Borne fixe a, f continue sur I, x dans I (F02)

$$F'(x) = f(x)$$

Une borne variable u(x), u dérivable à valeurs dans I (F03)

$$H'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big)$$

Deux bornes variables u(x) et v(x) (F03)

$$H'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big)$$

Relation de Chasles, avec a dans I

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(u(x)\big) - F\big(v(x)\big)$$

Méthode : dériver une intégrale à bornes variables

1. **Nommer** l'intégrande f et un intervalle I où elle est continue.
2. **Contrôler les bornes** : u et v sont dérivables sur l'intervalle J et prennent leurs valeurs dans I.
3. **Dériver** par la dérivation à bornes variables (F03) : $H'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big)$.
4. **Simplifier** $H'(x)$ pour lire son signe sur J.

Rédaction : « f est continue sur I ; u et v sont dérivables sur J, à valeurs dans I ; d'après la dérivation à bornes variables (F03), H est dérivable sur J et… ».

Exemple

Énoncé. Étudie le sens de variation de $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Hypothèses. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$. Les bornes $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dériver. D'après la dérivation à bornes variables (F03), pour tout réel x :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{2}{1+16x^4} - \frac{1}{1+x^4} \\ &= \frac{1-14x^4}{(1+16x^4)(1+x^4)}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : $H'(x)$ a le signe de $1-14x^4$.

Conclure. Posons $c = \dfrac{1}{\sqrt[4]{14}}$. La fonction H est croissante sur $[-c, c]$. Elle est décroissante sur $]-\infty, -c]$ et sur $[c, +\infty[$.

Attention : Ne pas oublier u'(x)

Soit $H : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Sa dérivée n'est ni $\dfrac{1}{1+x^2}$, ni $\dfrac{1}{1+x^6}$. C'est $H'(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$: la borne x^3 se dérive, comme dans toute composée.

Étudier une fonction définie par une intégrale

Méthode : étudier une fonction définie par une intégrale

1. **Domaine** : les x pour lesquels l'intégrande est continue sur tout le segment d'extrémités les deux bornes.
2. **Parité** : théorème de parité (F04), si la borne fixe est 0 et l'intervalle symétrique.
3. **Variations** : dérivée par le théorème de dérivation (F02) ou la dérivation à bornes variables (F03), puis son signe.
4. **Limites** : encadre l'intégrande, intègre avec des bornes dans l'ordre croissant, puis compare. Si une primitive est connue, explicite la fonction.

Rédaction : « l'intégrande est continue sur I et $a \in I$; d'après le théorème de dérivation (F02), F est dérivable sur I et $F' = f$ ».

Propriété : Parité d'une fonction définie par une intégrale

Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$. Soit f une fonction continue sur I et $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie sur I.

- Si f est paire, alors F est impaire.
- Si f est impaire, alors F est paire.

Attention : Le domaine se lit sur l'intégrande

Soit $F : x \mapsto \int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}$. L'intégrande n'est définie ni en -2, ni en 2. Pour $x \leq 2$, le segment d'extrémités 3 et x contient 2 : l'intégrale n'existe pas. Le domaine de F est $]2, +\infty[$, le plus grand intervalle de continuité qui contient la borne 3.

Exemple

Énoncé. Étudie $F : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{3+\cos t}$ sur $\mathbb{R}$.

Parité et variations. L'intégrande est continue et paire sur $\mathbb{R}$: d'après le théorème de parité (F04), F est impaire. D'après le théorème de dérivation (F02), pour tout réel x, $F'(x) = \frac{1}{3+\cos x} > 0$: F est strictement croissante.

Encadrer. Pour tout réel t, $2 \leq 3+\cos t \leq 4$, donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\cos t} \leq \frac{1}{2}$. Pour $x \geq 0$, les bornes 0 et x sont dans l'ordre croissant : $\frac{x}{4} \leq F(x) \leq \frac{x}{2}$.

Limites. Par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Par imparité, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

À retenir : Coin examen : fonction définie par une intégrale

Les questions s'enchaînent : justifier la dérivabilité, calculer $F'(x)$, dresser les variations, encadrer pour obtenir une limite. Une intégration par parties peut expliciter la fonction ; une bijection peut être demandée. Une fonction définie par une intégrale apparaît dans 8 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Intégrer une inégalité

Méthode : obtenir une inégalité ou une limite en intégrant

1. **Encadrer l'intégrande** sur le segment : $g_1(t) \leq f(t) \leq g_2(t)$, avec g_1 et g_2 faciles à intégrer.
2. **Ordonner les bornes** : intègre de α à β avec $\alpha \leq \beta$. Si $x < a$, écris $F(x) = -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. **Intégrer** l'encadrement par l'ordre de l'intégrale, puis **calculer** les deux intégrales.
4. **Conclure** : l'inégalité demandée, ou une limite par comparaison ou par encadrement.

Rédaction : « pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, … ; comme $\alpha \leq \beta$, on intègre : … ».

Attention : Bornes dans l'ordre croissant

De $f \leq g$ sur le segment, on déduit $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t$ **seulement si** $\alpha \leq \beta$. Contre-exemple : $t^2 \leq 1$ sur $[-1, 0]$, mais $\displaystyle\int_0^{-1} t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}$ dépasse $\displaystyle\int_0^{-1} 1\,\mathrm{d}t = -1$.

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Encadrer. Soit $x \geq 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, $1 \leq 1+t \leq 1+x$, donc $\dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$.

Intégrer. Les trois fonctions de t sont continues sur $[0, x]$, et $0 \leq x$. Par l'ordre de l'intégrale :

$$\frac{x}{1+x} \leq \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \leq x.$$

Conclure. L'intégrale du milieu vaut $\ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$.

Exemple

Énoncé. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ sur $[1, +\infty[$. Calcule sa limite en $+\infty$.

Minorer l'intégrande. Pour $t \geq 1$, $t+1 \leq 2t$, donc $\dfrac{\sqrt{t}}{t+1} \geq \dfrac{\sqrt{t}}{2t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

Intégrer. Pour $x \geq 1$, les bornes sont dans l'ordre croissant : $F(x) \geq \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{x} - 1$.

Conclure. Comme $\sqrt{x} - 1$ tend vers $+\infty$, par comparaison $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Sommes de Riemann et méthode des rectangles

Définition : Sommes de Riemann (méthode des rectangles)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, et n un entier naturel non nul. On partage $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$, de bornes $x_k = a + kh$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

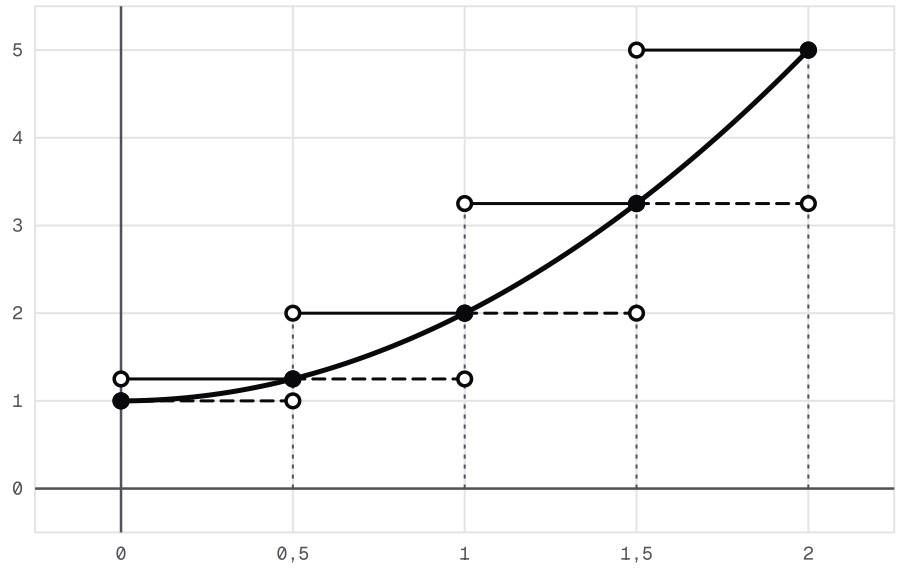
On appelle **sommes de Riemann** de f sur $[a, b]$ les deux nombres :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

et

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

S_n est la somme des aires algébriques des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$ (rectangles à gauche) ; T_n celle des rectangles de hauteur $f(x_{k+1})$ (rectangles à droite).



$\mathcal{C}_f$ S_4 T_4 ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Exemple avec f(t) = 1 + t² sur [0, 2], n = 4 et h = 1/2 : les rectangles à gauche, de hauteurs $f(x_0)$ à $f(x_3)$, forment S_4 ; les rectangles à droite, de hauteurs $f(x_1)$ à $f(x_4)$, forment T_4.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 3,25.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1,25.

Sauts en x ≈ 0,5, x ≈ 1, x ≈ 1,5, x ≈ 0,5, x ≈ 1, x ≈ 1,5 : le point plein appartient à la courbe ; le point creux en est exclu, à une ordonnée calculée de l'autre côté du saut.

Propriété : Encadrement d'une intégrale par les rectangles

Soit f une fonction continue et croissante sur $[a, b]$, avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, et S_n, T_n ses sommes de Riemann (F05). Alors :

$$S_n \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq T_n$$

et

$$T_n - S_n = \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}.$$

Si f est continue et décroissante sur $[a, b]$, les inégalités sont inversées : $T_n \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n$, et $S_n - T_n = \frac{(b-a)\big(f(a)-f(b)\big)}{n}$.

Dans les deux cas, les suites (S_n) et (T_n) convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Majoration de l'erreur de la méthode des rectangles

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$, avec $a < b$, et M un réel tel que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes de Riemann S_n et T_n de f (F05) vérifient :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

et

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

En conséquence, les suites (S_n) et (T_n) convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Convergence des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Les sommes de Riemann S_n et T_n de f (F05) convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier, pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Remarque

L'encadrement par les rectangles (F06) et la majoration de l'erreur (F07) sont démontrés : ils donnent la convergence quand f est monotone, ou dérivable à dérivée bornée. Pour une fonction seulement continue, le théorème de convergence (F08) est esquissé au cours. L'étape qui manque repose sur la continuité uniforme, hors programme. En examen, tu cites ce théorème sans le redémontrer.

Méthode : approcher une intégrale par des rectangles

1. **Écrire** S_n ou T_n : nomme f, le segment $[a, b]$, le pas $h = \dfrac{b-a}{n}$ et les indices.
2. **Encadrer** : si f est monotone, l'encadrement par les rectangles (F06) place l'intégrale entre S_n et T_n, dont l'écart vaut $\dfrac{(b-a)|f(b)-f(a)|}{n}$. Si $|f'| \leq M$, la majoration de l'erreur (F07) borne l'erreur par $\dfrac{M(b-a)^2}{2n}$.

3. **Choisir** n pour que cette borne soit inférieure à la précision voulue.
4. **Conclure** : valeur approchée et précision.

Rédaction : « f est continue et décroissante sur $[a, b]$; d'après l'encadrement par les rectangles (F06), $T_n \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n$ ».

Exemple

Énoncé. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ sur $[0, 1]$. Trouve n pour que S_n et T_n encadrent $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ à 10^{-2} près.

Monotonie. f est continue sur $[0, 1]$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = -\dfrac{3t^2}{(1+t^3)^2} \leq 0$: f est décroissante.

Encadrer. D'après l'encadrement par les rectangles (F06), $T_n \leq \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n$, et $S_n - T_n = \dfrac{f(0) - f(1)}{n} = \dfrac{1}{2n}$.

Choisir n. $\dfrac{1}{2n} \leq 10^{-2}$ si et seulement si $n \geq 50$: $n = 50$ convient.

Reconnaître une somme de Riemann

Méthode : calculer la limite d'une somme

1. **Factoriser** pour faire apparaître $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, ou plus généralement $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.
2. **Identifier** f, le segment $[a, b]$ et les indices : de 0 à $n-1$ pour S_n, de 1 à n pour T_n.
3. **Vérifier** que f est continue sur $[a, b]$.
4. **Conclure** par le théorème de convergence (F08), puis **calculer** l'intégrale.

Rédaction : « u_n est la somme T_n de f, continue sur $[0, 1]$; d'après le théorème de convergence (F08), (u_n) converge vers… ».

Attention : Compter le pas et les indices

La somme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{3n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ a $3n$ termes, de pas $\dfrac{1}{n}$: elle porte sur $[0, 3]$, pas sur $[0, 1]$. Avant d'appliquer le théorème de convergence (F08), vérifie trois choses : le pas, le premier et le dernier indice, et le segment qu'ils couvrent.

Exemple

Énoncé. Calcule la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 3k^2}$.

Factoriser. Pour $n \geq 1$, $\dfrac{n}{n^2+3k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+3\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Donc $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+3t^2}$.

Conclure. f est continue sur $[0,1]$, et u_n est sa somme T_n. D'après le théorème de convergence (F08), (u_n) converge vers

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exemple

Énoncé. Calcule la limite de $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, e^{\frac{k}{n}}$.

Factoriser. $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$: c'est la somme T_n de $f : t \mapsto te^t$, continue sur $[0,1]$.

Conclure. D'après le théorème de convergence (F08), (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne $\left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 0-(-1) = 1$.

Encadrer une somme par des intégrales

Propriété : Encadrement d'une somme par des intégrales

Soit p un entier et f une fonction continue et décroissante sur $[p,+\infty[$. Pour tout entier $k \geq p$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k),$$

et, pour tout entier $n > p$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{n} f(k) &\leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k).\end{aligned}$$

Si f est continue et croissante sur $[p,+\infty[$, les inégalités sont inversées.

Méthode : encadrer une somme par des intégrales

1. **Choisir** f telle que la somme s'écrive avec les $f(k)$. Vérifie sa continuité et sa monotonie sur l'intervalle utile.
2. **Encadrer** sur $[k,k+1]$: pour f décroissante, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$. Pour f croissante, $f(k) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1)$: les sommes qui minorent et qui majorent échangent leurs indices.
3. **Sommer** en surveillant le premier et le dernier indice, puis **calculer** les intégrales.

4. **En déduire** un encadrement de la somme, puis une limite par comparaison.

Rédaction : « f est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$; pour tout entier $k \geq 1$, … ; en sommant pour k de 1 à $n-1$… ».

Exemple

Énoncé. Pour $n \geq 2$, soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montre que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq s_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, puis trouve la limite de $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$.

Encadrer. $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, de primitive $t \mapsto 2\sqrt{t}$. D'après l'encadrement des sommes (F09), $\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$; en sommant de 1 à n, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq s_n$. Le même énoncé donne aussi $\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n} - 2$, d'où la majoration.

Limite. On divise par $\sqrt{n}$: les deux bornes tendent vers 2. Par encadrement, $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ tend vers 2.

À retenir : Coin examen : sommes et intégrales

La forme attendue : un exercice d'analyse court, où l'on reconnaît une somme de Riemann ou l'on encadre une somme terme à terme. Les sommes de Riemann, ou l'encadrement de sommes par des intégrales, apparaissent dans 8 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Suites définies par une intégrale

Propriété : Signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales

Soit $a < b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n une fonction continue sur $[a, b]$; on pose $I_n = \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a, b]$, $f_n(t) \geq 0$, alors $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a, b]$, $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$, alors la suite (I_n) est décroissante.
- Si les deux conditions sont réunies, la suite (I_n) converge, et sa limite est positive ou nulle.

Propriété : Limite de $\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$

Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Méthode : étudier une suite définie par une intégrale

1. **Signe** : signe de l'intégrande sur $[a, b]$, avec $a < b$ (propriétés des suites d'intégrales, F10).
2. **Monotonie** : compare $f_{n+1}(t)$ et $f_n(t)$ pour tout t, ou écris $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale.
3. **Limite** : encadre l'intégrande par des fonctions dont les intégrales ont une même limite, puis conclus par les gendarmes ; pour $\displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$, cite la limite F11.
4. **Récurrence** : une intégration par parties relie I_{n+1} et I_n.

Rédaction : « pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a, b]$, … ; comme $a < b$, on intègre : … ».

Attention : Pas de limite sous l'intégrale

Pour chaque $t \in [0, 1[$, nt^n tend vers 0. Pourtant $\displaystyle\int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}$ tend vers 1, pas vers 0. La limite d'une suite d'intégrales ne se lit pas sur l'intégrande : elle se démontre par un encadrement.

Exemple

Énoncé. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudie le signe, la monotonie et la limite de (I_n).

Signe et monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [0, 1]$, $\dfrac{t^n}{3+t^2} \geq 0$ et $t^{n+1} \leq t^n$. Comme $0 < 1$, d'après les propriétés des suites d'intégrales (F10), $I_n \geq 0$ et (I_n) est décroissante.

Limite. Pour $t \in [0, 1]$, $\dfrac{t^n}{4} \leq \dfrac{t^n}{3+t^2} \leq \dfrac{t^n}{3}$. Comme $0 < 1$, on intègre : $\dfrac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{3(n+1)}$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exemple

Énoncé. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\displaystyle J_n = \int_0^1 t^n e^{2t}\,\mathrm{d}t$. Relie J_{n+1} à J_n, puis calcule J_1.

Par parties. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive $t \mapsto t^{n+1}$ et on primitive $t \mapsto e^{2t}$ en $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$; ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \left[\frac{t^{n+1}e^{2t}}{2}\right]_0^1 \\ &\quad - \frac{n+1}{2} J_n \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n. \end{aligned}$$

Valeurs. $J_0 = \dfrac{e^2-1}{2}$; avec $n = 0$, on obtient $J_1 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2-1}{4} = \dfrac{e^2+1}{4}$.

> **À retenir : Coin examen : suites d'intégrales**
>
> On y demande le signe, la monotonie et une limite par encadrement. Une relation de récurrence par parties peut aussi être demandée. Une suite définie par des intégrales apparaît dans 4 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Rédiger un « montrer que »

Rédige chaque « montrer que » comme une courte preuve. Nomme la fonction, l'intervalle et la continuité de l'intégrande. Cite le résultat employé par son nom, puis sa clé : « d'après le théorème de dérivation (F02) ». Avant d'intégrer une inégalité, écris que les bornes sont dans l'ordre croissant. Termine par une phrase qui reprend la question.

> **À retenir : Les formes de questions**
>
> « Justifier que F est dérivable » : théorème de dérivation (F02) ou dérivation à bornes variables (F03), hypothèses nommées. « Montrer que, pour tout x… » : intègre une inégalité. « Calculer la limite de la somme » : somme de Riemann ou encadrement par des intégrales. « En déduire » : réutilise le résultat précédent sans le redémontrer.