BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Niveau examen	5

Exercice 1 5,75 pts

Une fonction définie par une intégrale, symétrique en x et 1/x

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. 0,5 pts

Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x>0$.

INDICE

L'intégrande est continue sur un intervalle qui contient la borne fixe 1. Applique F02.

2. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F. Calculer $F(1)$, puis montrer que $F(x)\geq 0$ pour tout $x>0$.

INDICE

$F'(x)$ a le signe de $\ln x$. Où F atteint-elle son minimum ?

3. a) 1 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x>0$:

$$F(x)=\frac{x\ln x}{1+x}-\ln\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

INDICE

Dérive $\ln t$ et intègre $\frac{1}{(1+t)^2}$. Choisis la primitive $t\mapsto \frac{t}{1+t}$, et vérifie qu'elle convient.

3. b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

INDICE

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

4. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $F(x)=\ln 2-\frac{\ln x}{1+x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

INDICE

Écris $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$, et $\ln(1+x)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

4. b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $\frac{\ln x}{1+x}=\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{1+x}$.

5. 0,75 pts

Montrer que la restriction de F à $[1,+\infty[$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,\ln 2[$.

INDICE

F est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Utilise $F(1)$ et la limite en $+\infty$.

6. 0,75 pts

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)-F(x)$. Montrer que φ est constante, et en déduire que $F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$ pour tout $x>0$.

INDICE

Dérive $x\mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ comme une composée, puis simplifie $\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$.

7. 0,5 pts

On admet que $\ln 2>0{,}69$. En déduire que l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $]0,+\infty[$, et que leur produit vaut 1.

INDICE

Quelle solution se trouve dans $[1,+\infty[$? Utilise 5., puis 6.

Exercice 2 3 pts

Encadrer une somme de Riemann

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}}.$$

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+3t}}$.

1. a) 0,25 pts

Montrer que f est décroissante sur $[0, 1]$.

INDICE

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+3t}$ est croissante et strictement positive sur $[0, 1]$.

1. b) 0,5 pts

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Dérive $t \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+3t}$.

2. 0,5 pts

Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

INDICE

Encadre $f(t)$ pour t entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ par la décroissance de f. Intègre ensuite sur un intervalle de longueur $\dfrac{1}{n}$.

3. a) 0,5 pts

Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, puis montrer que $u_n \geq \dfrac{2}{3}$.

INDICE

Factorise $n^2 + 3kn$ par n^2.

3. b) 0,5 pts

En déduire, à l'aide de l'inégalité de gauche de 2., que $u_n \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2n}$.

INDICE

Somme l'inégalité de gauche de 2. : la somme obtenue ne diffère de u_n que par deux termes.

4. 0,25 pts

En déduire la limite de la suite (u_n).

INDICE

Théorème des gendarmes.

5. 0,5 pts

Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n - \frac{2}{3} \leq 10^{-2}$.

INDICE

D'après 3., il suffit que $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2}$.

Exercice 3 — 6 pts

Une suite d'intégrales qui mène à e²

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{2t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n = 0$, on convient que $(1-t)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, y compris en $t = 1$.

1. — 0,5 pts

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto e^{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$.

2. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, $0 \leq 1-t \leq 1$. Compare $(1-t)^{n+1}$ et $(1-t)^n$, puis applique F10.

3. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, $e^{2t} \leq e^2$. Calcule ensuite $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

4. — 1 pts

Établir, en intégrant par parties, la relation $2I_n = nI_{n-1} - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Dérive $(1-t)^n$, de dérivée $-n(1-t)^{n-1}$, et intègre e^{2t} en $\dfrac{e^{2t}}{2}$.

5. — 0,25 pts

En déduire I_1.

INDICE

Applique la relation de 4. avec $n = 1$.

6. — 0,5 pts

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = 1$.

INDICE

Écris la relation de 4. au rang $n+1$.

7. a) 0,5 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2^n}{n!} I_n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = v_{n-1} - \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

INDICE

Multiplie la relation de 4. par $\dfrac{2^{n-1}}{n!}$, et simplifie $\dfrac{n}{n!}$.

7. b) 0,5 pts

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 2v_n$.

INDICE

Somme les égalités de 7. a) pour k de 1 à n : les termes intermédiaires se simplifient. Puis utilise $v_0 = I_0$.

8. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

INDICE

Raisonne par récurrence : passer de n à $n+1$ multiplie $\dfrac{2^n}{n!}$ par $\dfrac{2}{n+1}$.

9. 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.

INDICE

Combine 7. b) et 8.

Exercice 4 5,25 pts

Une fonction définie par une intégrale et une suite récurrente

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. 0,5 pts

Justifier que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire que F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

L'intégrande est continue sur $[0, +\infty[$, qui contient la borne fixe 0 : applique F02. Une exponentielle est strictement positive.

2. 0,75 pts

Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = x - F(x)$. Montrer que φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et en déduire que $F(x) < x$ pour tout $x > 0$.

INDICE

D'après 1., $\varphi'(x) = 1 - e^{-x^2}$. Pour $x > 0$, compare $-x^2$ et 0. Calcule ensuite $\varphi(0)$.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $s \geq 0$, $e^{-s} \geq 1 - s$.

INDICE

Étudie le sens de variation de la fonction $s \mapsto e^{-s} - 1 + s$ sur $[0, +\infty[$.

3. b) 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$, puis que $\dfrac{2}{3} \leq F(1) < 1$.

INDICE

Applique 3. a) avec $s = t^2$, puis intègre de 0 à x : les bornes sont dans l'ordre croissant (W03).

4. 0,5 pts

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise 1. pour la positivité de $F(u_n)$, et 2. pour sa majoration.

5. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel ℓ de $[0, 1]$.

INDICE

Applique 2. au réel u_n, strictement positif d'après 4.

6. 0,75 pts

Montrer que $F(\ell) = \ell$. En déduire que $\ell = 0$.

INDICE

F est continue en ℓ : passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = F(u_n)$. Pour conclure, suppose $\ell > 0$ et utilise 2.

7. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{2}{3} u_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

INDICE

Applique la minoration de 3. b) au réel $x = u_n$, puis utilise $u_n^2 \leq 1$ (4.). Termine par une récurrence.

Exercice 5 5 pts

Une suite d'intégrales qui tend vers 1, et le nombre ln 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. 0,5 pts

Calculer J_1 et J_2.

INDICE

Sur $[0,1]$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est $t \mapsto \ln(1+t)$, et une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan t$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $J_n \leq J_{n+1} \leq 1$. En déduire que la suite (J_n) converge.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, compare t^{n+1} et t^n, puis $\dfrac{1}{1+t^{n+1}}$ et $\dfrac{1}{1+t^n}$. Intègre ensuite sur $[0,1]$, bornes dans l'ordre croissant (ordre de l'intégrale).

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1 - J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$, puis que $0 \leq 1 - J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

INDICE

$1 - \dfrac{1}{1+t^n} = \dfrac{t^n}{1+t^n}$, et $1 + t^n \geq 1$. La limite s'obtient par un encadrement, sans passer à la limite sous l'intégrale (W06).

4. 1 pts

Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$:

$$n(1 - J_n) = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

INDICE

Écris $\dfrac{t^n}{1+t^n} = t \times \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$, et remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{n}\ln(1+t^n)$ a pour dérivée $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$.

5. 0,75 pts

On admet que, pour tout réel $s \geq 0$, $\ln(1+s) \leq s$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-J_n)$.

INDICE

Applique l'inégalité admise avec $s = t^n$, puis intègre sur $[0,1]$ (M03). Conclus avec 4.

6. a)

0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1 - \dfrac{\ln 2}{n} \leq J_n \leq 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

INDICE

Isole J_n dans l'égalité de 4., puis utilise l'encadrement de 5.

6. b)

0,75 pts

En utilisant les valeurs obtenues en 1., en déduire que $\dfrac{1}{2} \leq \ln 2 \leq \dfrac{3}{4}$, puis que $4 - 2\ln 2 \leq \pi \leq \dfrac{14}{3} - 2\ln 2$.

INDICE

Écris l'encadrement de 6. a) pour $n = 1$, où $J_1 = \ln 2$, puis pour $n = 2$, où $J_2 = \dfrac{\pi}{4}$.