BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Niveau examen	5

Exercice 1 5,75 pts

Une fonction définie par une intégrale, symétrique en x et 1/x

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. 0,5 pts

Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x>0$.

INDICE

L'intégrande est continue sur un intervalle qui contient la borne fixe 1. Applique F02.

CORRIGÉ

L'intégrande $f:t\mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$, qui contient la borne fixe 1.

Conclusion. D'après F02 (dérivée de $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$F'(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}.$$

2. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F. Calculer $F(1)$, puis montrer que $F(x)\geq 0$ pour tout $x>0$.

INDICE

$F'(x)$ a le signe de $\ln x$. Où F atteint-elle son minimum ?

CORRIGÉ

Signe de F'. Soit $x>0$. Comme $(1+x)^2>0$, $F'(x)$ a le signe de $\ln x$: $F'(x)<0$ si $0<x<1$, et $F'(x)>0$ si $x>1$.

Variations. F est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Minimum. $F(1)=\displaystyle\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, et c'est le minimum de F sur $]0,+\infty[$.

Conclusion. $F(1)=0$ et, pour tout $x>0$, $F(x)\geq 0$, avec égalité seulement pour $x=1$.

3. a) 1 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

INDICE

Dérive $\ln t$ et intègre $\frac{1}{(1+t)^2}$. Choisis la primitive $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, et vérifie qu'elle convient.

CORRIGÉ

Une primitive de $\frac{1}{(1+t)^2}$. Pour $t > 0$, $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$: la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ a pour dérivée $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$.

Intégration par parties. Soit $x > 0$. Les fonctions $\ln$ et $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ sont dérivables, de dérivées continues, sur le segment d'extrémités 1 et x, inclus dans $]0, +\infty[$. Donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{t \ln t}{1+t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{1+t} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x \ln x}{1+x} - \big(\ln(1+x) - \ln 2\big). \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\ln(1+x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+x}{2}\right)$, pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

3. b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

INDICE

Rappel : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

CORRIGÉ

Premier terme. Quand x tend vers 0^+, $x \ln x$ tend vers 0 (croissances comparées) et $1 + x$ tend vers 1 : $\frac{x \ln x}{1+x}$ tend vers 0.

Second terme. $\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)$ tend vers $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, par continuité de $\ln$ en $\frac{1}{2}$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \ln 2$.

4. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) = \ln 2 - \dfrac{\ln x}{1+x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

INDICE

Écris $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, et $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

Premier terme. $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, donc $\dfrac{x\ln x}{1+x} = \ln x - \dfrac{\ln x}{1+x}$.

Second terme. $1 + x = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, produit de deux réels strictement positifs, donc :

$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Report dans 3. a).

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln x - \frac{\ln x}{1+x} - \ln x \\ &\quad - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $F(x) = \ln 2 - \dfrac{\ln x}{1+x} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

4. b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $\dfrac{\ln x}{1+x} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{1+x}$.

CORRIGÉ

Premier terme. Soit $x > 0$:

$$\frac{\ln x}{1+x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 (croissances comparées) et $\dfrac{x}{1+x}$ tend vers 1 : le produit tend vers 0.

Second terme. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ln 2$: la droite d'équation $y = \ln 2$ est asymptote horizontale à la courbe de F en $+\infty$.

5. 0,75 pts

Montrer que la restriction de F à $[1,+\infty[$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,\ln 2[$.

INDICE

F est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Utilise $F(1)$ et la limite en $+\infty$.

CORRIGÉ

La fonction F est continue, car dérivable, et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ (question 2). De plus, $F(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\ln 2$ (question 4. b).

Conclusion. D'après le théorème de la bijection, la restriction de F à $[1,+\infty[$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,\ln 2[$.

6. 0,75 pts

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)-F(x)$. Montrer que φ est constante, et en déduire que $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(x)$ pour tout $x>0$.

INDICE

Dérive $x\mapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ comme une composée, puis simplifie $\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, où F est dérivable. Par la dérivée d'une fonction composée, φ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit $x>0$:

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)-F'(x).$$

Premier terme. Comme $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\times\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\\&=\frac{\ln x}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Donc $\varphi'(x)=\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}-\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}=0$.

φ est constante. Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante. Or $]0,+\infty[$ est un intervalle, donc φ y est constante, égale à $\varphi(1)=F(1)-F(1)=0$.

Conclusion. φ est constante, et $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(x)$ pour tout $x>0$.

7. 0,5 pts

On admet que $\ln 2 > 0{,}69$. En déduire que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$, et que leur produit vaut 1.

INDICE

Quelle solution se trouve dans $[1, +\infty[$? Utilise 5., puis 6.

CORRIGÉ

Solution dans $[1, +\infty[$. Comme $\ln 2 > 0{,}69 > \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \in [0, \ln 2[$. D'après 5., l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ a une unique solution β dans $[1, +\infty[$, et $\beta > 1$ car $F(1) = 0$.

Solutions dans $]0, 1]$. Soit $x \in]0, 1]$. Alors $\dfrac{1}{x} \geq 1$ et, d'après 6., $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Par unicité de β dans $[1, +\infty[$, $F(x) = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $\dfrac{1}{x} = \beta$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{\beta}$.

Conclusion. L'équation a exactement deux solutions, β et $\dfrac{1}{\beta}$, distinctes car $\beta > 1$, et leur produit vaut $\beta \times \dfrac{1}{\beta} = 1$.

Exercice 2 3 pts

Encadrer une somme de Riemann

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}}.$$

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+3t}}$.

1. a) 0,25 pts

Montrer que f est décroissante sur $[0,1]$.

INDICE

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+3t}$ est croissante et strictement positive sur $[0,1]$.

CORRIGÉ

Sur $[0,1]$, la fonction $t \mapsto 1+3t$ est croissante, à valeurs dans $[1,4]$. La racine carrée est croissante sur $[0,+\infty[$: $t \mapsto \sqrt{1+3t}$ est croissante et strictement positive sur $[0,1]$.

Conclusion. La fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$, f est décroissante sur $[0,1]$.

1. b) 0,5 pts

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Dérive $t \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+3t}$.

CORRIGÉ

Une primitive. Soit $t \in [0,1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+3t}$ est dérivable sur $[0,1]$, et :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+3t}\right)' \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{1+3t}} \\ &= f(t).\end{aligned}$$

Conclusion. $I = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = \dfrac{2}{3}$.

2. `0,5 pts`

Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

INDICE

Encadre $f(t)$ pour t entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ par la décroissance de f. Intègre ensuite sur un intervalle de longueur $\dfrac{1}{n}$.

CORRIGÉ

Soit $t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, intervalle inclus dans $[0,1]$. Par décroissance de f :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ces fonctions sont continues sur cet intervalle, et $\dfrac{k}{n} < \dfrac{k+1}{n}$. On intègre sur cet intervalle, de longueur $\dfrac{1}{n}$: l'intégrale d'une constante c y vaut $\dfrac{c}{n}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

C'est F09 (encadrement d'une somme par des intégrales) dans le cas décroissant.

3. a) 0,5 pts

Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, puis montrer que $u_n \geq \dfrac{2}{3}$.

INDICE

Factorise $n^2 + 3kn$ par n^2.

CORRIGÉ

Écriture de u_n. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On a $n^2 + 3kn = n^2\left(1 + \dfrac{3k}{n}\right)$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3kn}} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En sommant pour k de 0 à $n-1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Minoration. On somme l'inégalité de droite de 2. pour k de 0 à $n-1$. Par la relation de Chasles, la somme des intégrales vaut I, donc $I \leq u_n$.

Conclusion. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $u_n \geq \dfrac{2}{3}$.

3. b) 0,5 pts

En déduire, à l'aide de l'inégalité de gauche de 2., que $u_n \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2n}$.

INDICE

Somme l'inégalité de gauche de 2. : la somme obtenue ne diffère de u_n que par deux termes.

CORRIGÉ

Sommer l'inégalité de gauche. En sommant l'inégalité de gauche de 2. pour k de 0 à $n-1$, la relation de Chasles donne :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq I.$$

Comparer à u_n. Avec $j = k+1$, le membre de gauche est $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\dfrac{j}{n}\right)$. Il diffère de u_n par deux termes : on ajoute $\dfrac{f(1)}{n}$ et on retire $\dfrac{f(0)}{n}$. Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) &= u_n + \frac{f(1) - f(0)}{n} \\ &= u_n - \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Conclusion. $u_n - \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire $u_n \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2n}$.

4. 0,25 pts

En déduire la limite de la suite (u_n).

INDICE

Théorème des gendarmes.

CORRIGÉ

D'après 3., pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{2}{3} \leq u_n \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{2n}.$$

Comme $\dfrac{1}{2n}$ tend vers 0, le théorème des gendarmes s'applique.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$. On retrouve F08 (convergence des sommes de Riemann) : u_n est la somme S_n de f, continue sur $[0, 1]$.

5. 0,5 pts

Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n - \dfrac{2}{3} \leq 10^{-2}$.

INDICE

D'après 3., il suffit que $\dfrac{1}{2n} \leq 10^{-2}$.

CORRIGÉ

D'après 3., pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n - \dfrac{2}{3} \leq \dfrac{1}{2n}$. Il suffit donc que $\dfrac{1}{2n} \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire $n \geq 50$.

Conclusion. L'entier $n_0 = 50$ convient.

Exercice 3 6 pts

Une suite d'intégrales qui mène à e²

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{2t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n = 0$, on convient que $(1-t)^0 = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, y compris en $t = 1$.

1. 0,5 pts

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto e^{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$.

CORRIGÉ

Une primitive de $t \mapsto e^{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$. Donc :

$$I_0 = \int_0^1 e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1.$$

Conclusion. $I_0 = \dfrac{e^2 - 1}{2}$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, $0 \leq 1 - t \leq 1$. Compare $(1-t)^{n+1}$ et $(1-t)^n$, puis applique F10.

CORRIGÉ

Comparer les intégrandes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $0 \leq 1 - t \leq 1$, donc $(1-t)^n e^{2t} \geq 0$ et $(1-t)^{n+1} \leq (1-t)^n$. En multipliant par $e^{2t} > 0$:

$$(1-t)^{n+1} e^{2t} \leq (1-t)^n e^{2t}.$$

Intégrer. Les intégrandes sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. D'après F10 (signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales), $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et la suite (I_n) est décroissante.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, $e^{2t} \leq e^2$. Calcule ensuite $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t$.

CORRIGÉ

Majorer l'intégrande. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $e^{2t} \leq e^2$ et $(1-t)^n \geq 0$, donc $(1-t)^n e^{2t} \leq e^2(1-t)^n$.

Intégrer. On intègre sur $[0,1]$, bornes dans l'ordre croissant :

$$\begin{aligned} I_n &\leq e^2 \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= e^2 \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Avec 2., $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

4. 1 pts

Établir, en intégrant par parties, la relation $2I_n = nI_{n-1} - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Dérive $(1-t)^n$, de dérivée $-n(1-t)^{n-1}$, et intègre e^{2t} en $\dfrac{e^{2t}}{2}$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. Les fonctions $t \mapsto (1-t)^n$ et $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$ sont dérivables sur $[0,1]$, de dérivées continues $t \mapsto -n(1-t)^{n-1}$ et $t \mapsto e^{2t}$. Par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[(1-t)^n \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{n}{2} \int_0^1 (1-t)^{n-1} e^{2t} \, \mathrm{d}t \\ &= \left(0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{n}{2} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. En multipliant par 2 : pour tout $n \geq 1$, $2I_n = nI_{n-1} - 1$.

5. 0,25 pts

En déduire I_1.

INDICE

Applique la relation de 4. avec $n = 1$.

CORRIGÉ

Avec $n = 1$ dans la relation de 4. :

$$\begin{aligned} 2I_1 &= I_0 - 1 \\ &= \frac{e^2 - 3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_1 = \dfrac{e^2 - 3}{4}$.

6. 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) I_n = 1$.

INDICE

Écris la relation de 4. au rang $n + 1$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation de 4. au rang $n + 1 \geq 1$ donne :

$$(n+1) I_n = 2I_{n+1} + 1.$$

D'après 3., I_{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) I_n = 1$.

7. a) 0,5 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2^n}{n!} I_n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = v_{n-1} - \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

INDICE

Multiplie la relation de 4. par $\dfrac{2^{n-1}}{n!}$, et simplifie $\dfrac{n}{n!}$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. On multiplie $2I_n = nI_{n-1} - 1$ par $\dfrac{2^{n-1}}{n!}$:

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{n!} I_n &= \frac{2^{n-1}\, n}{n!} I_{n-1} \\ &\quad - \frac{2^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} I_{n-1} \\ &\quad - \frac{2^{n-1}}{n!}, \end{aligned}$$

car $\dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $v_n = v_{n-1} - \dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

7. b) `0,5 pts`

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 2v_n$.

INDICE

Somme les égalités de 7. a) pour k de 1 à n : les termes intermédiaires se simplifient. Puis utilise $v_0 = I_0$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$.

Somme télescopique. On somme $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{2^{k-1}}{k!}$ pour k de 1 à n ; les termes intermédiaires se simplifient :

$$\begin{aligned} v_n - v_0 &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}. \end{aligned}$$

Valeur de v_0. $v_0 = I_0 = \dfrac{e^2 - 1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} &= 2v_0 - 2v_n \\ &= e^2 - 1 - 2v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. En ajoutant le terme $\dfrac{2^0}{0!} = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 2v_n$.

8. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

INDICE

Raisonne par récurrence : passer de n à $n+1$ multiplie $\dfrac{2^n}{n!}$ par $\dfrac{2}{n+1}$.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n = 2$, $\dfrac{2^2}{2!} = 2 = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$. On a :

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \times \frac{2^n}{n!},$$

avec $0 < \dfrac{2}{n+1} \leq \dfrac{2}{3}$ car $n+1 \geq 3$. Donc $0 \leq \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Bilan de la récurrence. Pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.

Limite de (v_n). D'après 2., $0 \leq I_n \leq I_0$ pour tout n. Donc, pour $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n \leq 2I_0\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Conclusion. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, le majorant tend vers 0 : par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

9. 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$.

INDICE

Combine 7. b) et 8.

CORRIGÉ

D'après 7. b), pour tout $n \geq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!} = e^2 - 2v_n$, et (v_n) tend vers 0 d'après 8.

Conclusion. La somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$ tend vers e^2.

Exercice 4 5,25 pts

Une fonction définie par une intégrale et une suite récurrente

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. 0,5 pts

Justifier que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire que F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

L'intégrande est continue sur $[0, +\infty[$, qui contient la borne fixe 0 : applique F02. Une exponentielle est strictement positive.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui contient la borne fixe 0. D'après F02 (dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = e^{-x^2}$.

Variations. Pour tout $x \geq 0$, $F'(x) > 0$: F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Signe. $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Par stricte croissance, pour tout $x > 0$, $F(x) > F(0)$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = e^{-x^2}$; F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2. 0,75 pts

Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = x - F(x)$. Montrer que φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et en déduire que $F(x) < x$ pour tout $x > 0$.

INDICE

D'après 1., $\varphi'(x) = 1 - e^{-x^2}$. Pour $x > 0$, compare $-x^2$ et 0. Calcule ensuite $\varphi(0)$.

CORRIGÉ

Dérivée de φ. D'après 1., φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = 1 - e^{-x^2}$.

Signe. Soit $x > 0$: $-x^2 < 0$, donc $e^{-x^2} < 1$ (l'exponentielle est strictement croissante) et $\varphi'(x) > 0$. De plus, $\varphi'(0) = 0$. La dérivée est positive sur $[0, +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0 : φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Comparaison. $\varphi(0) = 0 - F(0) = 0$. Pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$.

Conclusion. φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $F(x) < x$ pour tout $x > 0$.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $s \geq 0$, $e^{-s} \geq 1 - s$.

INDICE

Étudie le sens de variation de la fonction $s \mapsto e^{-s} - 1 + s$ sur $[0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Fonction auxiliaire. Posons $\psi(s) = e^{-s} - 1 + s$ pour $s \geq 0$. La fonction ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\psi'(s) = 1 - e^{-s}$.

Variations. Soit $s \geq 0$: $-s \leq 0$, donc $e^{-s} \leq 1$ et $\psi'(s) \geq 0$. La fonction ψ est croissante sur $[0, +\infty[$, et $\psi(0) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Conclusion. Pour tout $s \geq 0$, $\psi(s) \geq \psi(0) = 0$, soit $e^{-s} \geq 1 - s$.

3. b) 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$, puis que $\dfrac{2}{3} \leq F(1) < 1$.

INDICE

Applique 3. a) avec $s = t^2$, puis intègre de 0 à x : les bornes sont dans l'ordre croissant (W03).

CORRIGÉ

Minoration. Soit $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$. Avec $s = t^2 \geq 0$ dans 3. a), $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$. Les deux membres sont continus sur $[0, x]$, et $0 \leq x$. D'après M03 (obtenir une inégalité en intégrant une inégalité) :

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \int_0^x (1 - t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Majoration. D'après 2., $F(x) < x$ pour $x > 0$, et $F(0) = 0$. Donc $F(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Le cas $x = 1$. On obtient $F(1) \geq 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$, et $F(1) < 1$ d'après 2.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$, et $\dfrac{2}{3} \leq F(1) < 1$.

4. 0,5 pts

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise 1. pour la positivité de $F(u_n)$, et 2. pour sa majoration.

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0 = 1$ vérifie $0 < u_0 \leq 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n \leq 1$. Comme $u_n > 0$, la question 1. donne $u_{n+1} = F(u_n) > 0$, et la question 2. donne $u_{n+1} = F(u_n) < u_n \leq 1$. Donc $0 < u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

5. 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel ℓ de $[0, 1]$.

INDICE

Applique 2. au réel u_n, strictement positif d'après 4.

CORRIGÉ

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 4., $u_n > 0$, et 2. donne $u_{n+1} = F(u_n) < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

Convergence. Elle est minorée par 0 (question 4) : décroissante et minorée, elle converge. Soit ℓ sa limite.

Conclusion. En passant à la limite dans $0 < u_n \leq 1$, on obtient $0 \leq \ell \leq 1$: (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

6. 0,75 pts

Montrer que $F(\ell) = \ell$. En déduire que $\ell = 0$.

INDICE

F est continue en ℓ : passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = F(u_n)$. Pour conclure, suppose $\ell > 0$ et utilise 2.

CORRIGÉ

Point fixe. La fonction F est dérivable, donc continue, sur $[0, +\infty[$, en particulier en $\ell \in [0, 1]$. Comme (u_n) tend vers ℓ, la suite $\big(F(u_n)\big)$ tend vers $F(\ell)$. Or $F(u_n) = u_{n+1}$, et (u_{n+1}) tend aussi vers ℓ. Par unicité de la limite, $F(\ell) = \ell$.

Valeur de ℓ. Supposons $\ell > 0$. D'après 2., $F(\ell) < \ell$, ce qui contredit $F(\ell) = \ell$. Donc $\ell = 0$.

Conclusion. $F(\ell) = \ell$ et $\ell = 0$: la suite (u_n) converge vers 0.

7. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}u_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

INDICE

Applique la minoration de 3. b) au réel $x = u_n$, puis utilise $u_n^2 \leq 1$ (4.). Termine par une récurrence.

CORRIGÉ

Comparer u_{n+1} et u_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3. b) avec $x = u_n \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F(u_n) \\ &\geq u_n - \frac{u_n^3}{3} \\ &= u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{3}\right). \end{aligned}$$

Comme $0 < u_n \leq 1$ (question 4), $u_n^2 \leq 1$, donc $1 - \frac{u_n^2}{3} \geq \frac{2}{3}$. Comme $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}u_n$.

Initialisation. $u_0 = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq \frac{2}{3}u_n \\ &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}u_n$ et $u_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^n$: la suite (u_n) tend vers 0, mais pas plus vite que la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Exercice 5 5 pts

Une suite d'intégrales qui tend vers 1, et le nombre ln 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. 0,5 pts

Calculer J_1 et J_2.

INDICE

Sur $[0,1]$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est $t \mapsto \ln(1+t)$, et une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan t$.

CORRIGÉ

Calcul de J_1.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\ &= \big[\ln(1+t)\big]_0^1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Calcul de J_2.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $J_1 = \ln 2$ et $J_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $J_n \leq J_{n+1} \leq 1$. En déduire que la suite (J_n) converge.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, compare t^{n+1} et t^n, puis $\dfrac{1}{1+t^{n+1}}$ et $\dfrac{1}{1+t^n}$. Intègre ensuite sur $[0,1]$, bornes dans l'ordre croissant (ordre de l'intégrale).

CORRIGÉ

Comparer les intégrandes. Soit $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$. Comme $0 \leq t \leq 1$, $t^{n+1} = t \times t^n \leq t^n$, donc $1 \leq 1+t^{n+1} \leq 1+t^n$. En passant aux inverses de réels strictement positifs :

$$\frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{1+t^{n+1}} \leq 1.$$

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. Par l'ordre de l'intégrale, $J_n \leq J_{n+1} \leq \displaystyle\int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $J_n \leq J_{n+1} \leq 1$. La suite (J_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1 - J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$, puis que $0 \leq 1 - J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

INDICE

$1 - \dfrac{1}{1+t^n} = \dfrac{t^n}{1+t^n}$, et $1 + t^n \geq 1$. La limite s'obtient par un encadrement, sans passer à la limite sous l'intégrale (W06).

CORRIGÉ

Écriture de $1 - J_n$. Soit $n \geq 1$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} 1 - J_n &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Encadrement. Soit $t \in [0,1]$: $t^n \geq 0$ et $1 + t^n \geq 1$, donc $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$. En intégrant sur $[0,1]$, bornes dans l'ordre croissant, avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$:

$$0 \leq 1 - J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion. Comme $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - J_n) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$.

4. 1 pts

Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$:

$$n(1 - J_n) = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t.$$

INDICE

Écris $\dfrac{t^n}{1+t^n} = t \times \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$, et remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{n}\ln(1+t^n)$ a pour dérivée $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$.

Choix des facteurs. Pour $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^n}{1+t^n} = t \times \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$ (pour $n = 1$, $t^{n-1} = 1$). Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{n}\ln(1+t^n)$ sont dérivables sur $[0,1]$, de dérivées continues $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$ (dérivée du logarithme d'une fonction strictement positive).

Intégration par parties. D'après 3. :

$$\begin{aligned} 1 - J_n &= \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Conclusion. En multipliant par n, pour tout $n \geq 1$:

$$n(1 - J_n) = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t.$$

5. 0,75 pts

On admet que, pour tout réel $s \geq 0$, $\ln(1+s) \leq s$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-J_n)$.

INDICE

Applique l'inégalité admise avec $s = t^n$, puis intègre sur $[0,1]$ (M03). Conclus avec 4.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$. Comme $1+t^n \geq 1$, $\ln(1+t^n) \geq 0$. L'inégalité admise avec $s = t^n \geq 0$ donne $\ln(1+t^n) \leq t^n$.

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. D'après M03 (obtenir une inégalité en intégrant une inégalité), en notant $K_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} 0 \leq K_n &\leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Limite. Par les gendarmes, (K_n) tend vers 0. D'après 4., $n(1-J_n) = \ln 2 - K_n$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-J_n) = \ln 2$.

6. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1 - \dfrac{\ln 2}{n} \leq J_n \leq 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

INDICE

Isole J_n dans l'égalité de 4., puis utilise l'encadrement de 5.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$. Notons $K_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

Isoler J_n. D'après 4., $1 - J_n = \dfrac{\ln 2 - K_n}{n}$, donc :

$$J_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{K_n}{n}.$$

Encadrer le dernier terme. D'après 5., $0 \leq K_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Comme $n > 0$, $0 \leq \dfrac{K_n}{n} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $1 - \dfrac{\ln 2}{n} \leq J_n \leq 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

6. b) 0,75 pts

En utilisant les valeurs obtenues en 1., en déduire que $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq \frac{3}{4}$, puis que $4 - 2\ln 2 \leq \pi \leq \frac{14}{3} - 2\ln 2$.

INDICE

Écris l'encadrement de 6. a) pour $n = 1$, où $J_1 = \ln 2$, puis pour $n = 2$, où $J_2 = \frac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Pour $n = 1$. Avec $J_1 = \ln 2$, l'encadrement de 6. a) donne $1 - \ln 2 \leq \ln 2 \leq 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}$. Donc $1 \leq 2\ln 2$ et $2\ln 2 \leq \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq \frac{3}{4}$.

Pour $n = 2$. Avec $J_2 = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\ln 2}{2} &\leq \frac{\pi}{4} \\ &\leq 1 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On multiplie par $4 > 0$, avec $4\left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{14}{3}$.

Conclusion. $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq \frac{3}{4}$ et $4 - 2\ln 2 \leq \pi \leq \frac{14}{3} - 2\ln 2$.