BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Entraînement	8

Exercice 1

Étude complète d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+t^2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On note f l'intégrande.

1.

Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $F'(x)$, et en déduire le sens de variation de F.

INDICE

L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$, intervalle qui contient 0. Applique F02.

2.

Montrer que F est impaire.

INDICE

Vérifie les hypothèses de F04 : intervalle symétrique, borne fixe 0, intégrande paire.

3.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{2} \leq F(x) \leq x$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

INDICE

Pour tout réel t, compare $1+t^2$ à $2+t^2$, puis à $\dfrac{2+t^2}{2}$. Intègre ensuite de 0 à x, avec $0 \leq x$.

4.

Vérifier que $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2+t^2}$ pour tout réel t. En déduire que, pour tout réel x, $F(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

INDICE

Dérive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$: tu dois obtenir $\dfrac{1}{2+x^2}$.

5.

En déduire que la droite d'équation $y = x - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ est asymptote à la courbe de F en $+\infty$.

INDICE

Calcule la limite en $+\infty$ de la différence entre $F(x)$ et $x - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$, avec $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\arctan X = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Encadrer pour trouver deux limites

Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1.

Justifier que G est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et montrer que $G'(x) = \dfrac{e^{-6x} - e^{-2x}}{x}$. En déduire le sens de variation de G.

INDICE

L'intégrande est continue sur $]0, +\infty[$. Les bornes x et $3x$ restent dans cet intervalle. Applique F03.

2.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $e^{-6x}\ln 3 \leq G(x) \leq e^{-2x}\ln 3$.

INDICE

Pour $t \in [x, 3x]$, encadre e^{-2t} entre e^{-6x} et e^{-2x}. Divise par $t > 0$, puis intègre, avec $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 3$.

3.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$.

INDICE

Cherche les limites des deux bornes de l'encadrement en $+\infty$, puis en 0^+.

4.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 < G(x) < \ln 3$.

INDICE

Relis l'encadrement de 2. : $e^{-6x} > 0$ et, pour $x > 0$, $e^{-2x} < 1$.

Exercice 3

Résoudre F(x) = 1 sans primitive explicite

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. On note f l'intégrande.

On admet que, pour tout réel $s \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+s} \leq 1 - \dfrac{s}{2}$, et que, pour tout $t \in [0,1]$, $\sqrt{1+t^4} \geq 1 + \dfrac{t^4}{3}$.

1.

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante.

INDICE

L'intégrande est continue, paire et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Cite F02 et F04.

2.

Montrer que $F(1) \leq \dfrac{29}{30}$.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, combine les deux inégalités admises, avec $s = \dfrac{t^4}{3}$, puis intègre de 0 à 1.

3.

Montrer que $F(2) \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. On pourra minorer f sur $[0,1]$, puis sur $[1,2]$ en utilisant $1 + t^4 \leq 2t^4$.

INDICE

Écris $F(2) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (Chasles). Sur $[0,1]$, $1 + t^4 \leq 2$.

4.

En déduire que l'équation $F(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, que $1 < \alpha < 2$, et résoudre l'équation $F(x) = -1$.

INDICE

Compare $\dfrac{29}{30}$ et $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ à 1. Utilise ensuite le théorème des valeurs intermédiaires, la stricte croissance et l'imparité.

Exercice 4

Sommes à mettre sous forme de Riemann

1.

Pour $n \geq 1$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Montrer que u_n est la somme de Riemann T_{2n} de $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[0,2]$.

INDICE

Sur $[0,2]$ partagé en m intervalles, le pas vaut $\dfrac{2}{m}$. Pour $m = 2n$, le pas vaut $\dfrac{1}{n}$ et $x_k = \dfrac{k}{n}$.

2.

Montrer que, pour tout $t \in [0,2]$, $|f'(t)| \leq 1$. En déduire que, pour $n \geq 1$, $\left| \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - u_n \right| \leq \dfrac{1}{n}$, puis la limite de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(t)$, puis utilise $2t \leq 1+t^2$. Applique ensuite FO7 sur $[0,2]$, avec $2n$ rectangles. Une primitive de f est $\arctan$.

3.

Pour $n \geq 1$, soit $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n+k}{n^2}\, e^{-\frac{k}{n}}$. Calculer la limite de (v_n).

INDICE

Écris $\dfrac{2n+k}{n^2} = \dfrac{1}{n}\left(2 + \dfrac{k}{n}\right)$. Pour l'intégrale obtenue, intègre par parties en dérivant $2+t$.

Exercice 5

Une somme de racines cubiques

Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$. On rappelle que $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$, et que $t \mapsto \frac{3}{4}\, t\sqrt[3]{t}$ en est une primitive sur cet intervalle.

1.

Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, $\sqrt[3]{k} \leq \displaystyle\int_{k}^{k+1} \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt[3]{k+1}$.

INDICE

Encadre $\sqrt[3]{t}$ pour $t \in [k, k+1]$ par croissance, puis intègre sur un intervalle de longueur 1.

2.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}} \leq s_n \leq \frac{3}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{3}} - 1\right)$.

INDICE

Piste 1 : somme sur k les inégalités de 1., et regroupe les intégrales par la relation de Chasles.

Piste 2 : surveille le premier et le dernier indice de chaque somme. Teste ton choix avec $n = 1$.

3.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{n^{\frac{4}{3}}}$.

INDICE

Divise l'encadrement par $n^{\frac{4}{3}} > 0$, et écris $\dfrac{(n+1)^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$.

Exercice 6

Combien de rectangles pour trois décimales ?

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\sqrt{1+t^4}$, et $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n ses sommes de Riemann sur $[0,1]$. On donne $1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$.

1.

Montrer que, pour tout $t\in[0,1]$, $0\le f'(t)\le 2$.

INDICE

On a $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$. Majore le numérateur et minore le dénominateur.

2.

En déduire, par F07, que $|I-S_n|\le\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\ge 1$. Quel nombre de rectangles cette majoration impose-t-elle pour garantir $|I-S_n|\le 10^{-3}$?

INDICE

Applique F07 avec $M=2$, $a=0$ et $b=1$.

3.

Montrer que $S_n\le I\le T_n$ et que $T_n-S_n=\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}$.

INDICE

Le signe de f' est connu par 1. Applique F06.

4.

Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n-S_n\le 10^{-3}$. Comparer avec le résultat de 2.

INDICE

Résous $\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}\le 10^{-3}$, puis utilise l'encadrement de $\sqrt{2}$ donné.

Exercice 7

Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e t^2 (\ln t)^n \, \mathrm{d}t$. Pour $n = 0$, on convient que $(\ln t)^0 = 1$ pour tout $t \in [1, e]$, y compris en $t = 1$.

1.

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3I_{n+1} = e^3 - (n+1) I_n$.

INDICE

Intègre I_{n+1} par parties : dérive $(\ln t)^{n+1}$, de dérivée $\dfrac{(n+1)(\ln t)^n}{t}$, et intègre t^2 en $\dfrac{t^3}{3}$.

3.

En déduire I_1 et I_2.

INDICE

Applique la relation avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

4.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Sur $[1, e]$, $0 \leq \ln t \leq 1$. Compare $(\ln t)^{n+1}$ et $(\ln t)^n$, puis applique F10.

5.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$, puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n I_n$.

INDICE

Dans la relation de 2., $I_{n+1} \geq 0$. Pour la seconde limite, écris $(n+1) I_n = e^3 - 3 I_{n+1}$.

Exercice 8

La limite de n J_n par une intégration par parties

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

1.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leq J_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, et en déduire la limite de (J_n).

INDICE

Sur $[0,1]$, $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$. Multiplie par $t^n \geq 0$, puis intègre.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)J_n = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}K_n$.

INDICE

Intègre J_n par parties : dérive $\sqrt{1+t}$ en $\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$, et intègre t^n en $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

3.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq K_n \leq \dfrac{1}{n+2}$.

INDICE

Sur $[0,1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$.

4.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n$.

INDICE

Que dit 3. de la suite (K_n) ? Écris ensuite $nJ_n = (n+1)J_n - J_n$.