BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Entraînement	8

Exercice 1

Étude complète d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+t^2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On note f l'intégrande.

1.

Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $F'(x)$, et en déduire le sens de variation de F.

INDICE

L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$, intervalle qui contient 0. Applique F02.

CORRIGÉ

Hypothèses. Pour tout réel t, $2+t^2 > 0$: l'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{1+t^2}{2+t^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui contient la borne fixe 0.

Dérivée. D'après F02 (dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$F'(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2}.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $F'(x) > 0$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.

Montrer que F est impaire.

INDICE

Vérifie les hypothèses de F04 : intervalle symétrique, borne fixe 0, intégrande paire.

CORRIGÉ

Hypothèses de F04. L'intervalle $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et la borne fixe est 0.

Parité de f. Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1+(-t)^2}{2+(-t)^2} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire.

Conclusion. D'après F04 (parité d'une fonction définie par une intégrale), F est impaire.

3.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{2} \leq F(x) \leq x$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

INDICE

Pour tout réel t, compare $1+t^2$ à $2+t^2$, puis à $\frac{2+t^2}{2}$. Intègre ensuite de 0 à x, avec $0 \leq x$.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'une part, $1+t^2 \leq 2+t^2$. D'autre part, $2+2t^2 \geq 2+t^2$, donc $1+t^2 \geq \frac{2+t^2}{2}$. En divisant par $2+t^2 > 0$:

$$\frac{1}{2} \leq f(t) \leq 1.$$

Intégrer. Soit $x \geq 0$. Les bornes 0 et x sont dans l'ordre croissant, et les fonctions sont continues sur $[0, x]$. Par l'ordre de l'intégrale :

$$\frac{x}{2} \leq F(x) \leq x.$$

Limite en $+\infty$. Comme $\frac{x}{2}$ tend vers $+\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Limite en $-\infty$. Comme F est impaire, $F(x) = -F(-x)$ pour tout réel x, et $-x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{2} \leq F(x) \leq x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

4.

Vérifier que $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2+t^2}$ pour tout réel t. En déduire que, pour tout réel x, $F(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

INDICE

Dérive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$: tu dois obtenir $\dfrac{1}{2+x^2}$.

CORRIGÉ

Écriture de f. Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2+t^2} &= \frac{2+t^2-1}{2+t^2} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Une primitive. Soit $G : x \mapsto x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{x^2}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2+x^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Identification. D'après F02, F est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle y est constante. Comme $G(0) = F(0) = 0$, cette constante est nulle.

Conclusion. Pour tout réel x, $F(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

5.

En déduire que la droite d'équation $y = x - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ est asymptote à la courbe de F en $+\infty$.

INDICE

Calcule la limite en $+\infty$ de la différence entre $F(x)$ et $x - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$, avec $\lim\limits_{X \to +\infty} \arctan X = \dfrac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ

La différence. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 4. :

$$\begin{aligned} &F(x) - \left(x - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ aussi, et $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. La différence tend donc vers 0.

Conclusion. La droite d'équation $y = x - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ est asymptote à la courbe de F en $+\infty$.

Exercice 2

Encadrer pour trouver deux limites

Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1.

Justifier que G est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et montrer que $G'(x) = \dfrac{e^{-6x} - e^{-2x}}{x}$. En déduire le sens de variation de G.

INDICE

L'intégrande est continue sur $]0, +\infty[$. Les bornes x et $3x$ restent dans cet intervalle. Applique F03.

CORRIGÉ

Existence. L'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{e^{-2t}}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$: x et $3x$ appartiennent à cet intervalle, donc $G(x)$ existe.

Dérivée. Les bornes $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans cet intervalle. D'après F03 (dérivée de $x \mapsto \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$), G est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 3 \times \frac{e^{-6x}}{3x} - \frac{e^{-2x}}{x} \\ &= \frac{e^{-6x} - e^{-2x}}{x}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $-6x < -2x$, donc $e^{-6x} < e^{-2x}$ par stricte croissance de l'exponentielle, et $G'(x) < 0$.

Conclusion. G est dérivable et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $e^{-6x} \ln 3 \leq G(x) \leq e^{-2x} \ln 3$.

INDICE

Pour $t \in [x, 3x]$, encadre e^{-2t} entre e^{-6x} et e^{-2x}. Divise par $t > 0$, puis intègre, avec $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 3$.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $x > 0$ et $t \in [x, 3x]$. On a $-6x \leq -2t \leq -2x$, et l'exponentielle est croissante : $e^{-6x} \leq e^{-2t} \leq e^{-2x}$. En divisant par $t > 0$:

$$\frac{e^{-6x}}{t} \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq \frac{e^{-2x}}{t}.$$

Intégrer. Les trois fonctions de t sont continues sur $[x, 3x]$, et $x < 3x$. De plus :

$$\begin{aligned} \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \ln(3x) - \ln x \\ &= \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Par l'ordre de l'intégrale, pour tout $x > 0$, $e^{-6x} \ln 3 \leq G(x) \leq e^{-2x} \ln 3$.

3.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$.

INDICE

Cherche les limites des deux bornes de l'encadrement en $+\infty$, puis en 0^+.

CORRIGÉ

En $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, $e^{-6x}\ln 3$ et $e^{-2x}\ln 3$ tendent vers 0. D'après l'encadrement de 2. et le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

En 0^+. Quand x tend vers 0^+, e^{-6x} et e^{-2x} tendent vers $e^0 = 1$: les deux bornes tendent vers $\ln 3$. Par les gendarmes, $G(x)$ tend vers $\ln 3$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \ln 3$.

4.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 < G(x) < \ln 3$.

INDICE

Relis l'encadrement de 2. : $e^{-6x} > 0$ et, pour $x > 0$, $e^{-2x} < 1$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

Minoration. D'après 2., $G(x) \geq e^{-6x}\ln 3 > 0$, car $e^{-6x} > 0$ et $\ln 3 > 0$.

Majoration. Comme $-2x < 0$, $e^{-2x} < 1$, donc $G(x) \leq e^{-2x}\ln 3 < \ln 3$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $0 < G(x) < \ln 3$.

Exercice 3

Résoudre F(x) = 1 sans primitive explicite

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. On note f l'intégrande.

On admet que, pour tout réel $s \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+s} \leq 1 - \dfrac{s}{2}$, et que, pour tout $t \in [0,1]$, $\sqrt{1+t^4} \geq 1 + \dfrac{t^4}{3}$.

1.

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante.

INDICE

L'intégrande est continue, paire et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Cite F02 et F04.

CORRIGÉ

Dérivabilité et variations. Pour tout réel t, $1 + t^4 \geq 1$: l'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui contient 0. D'après F02 (dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = f(x) > 0$ pour tout réel x.

Parité. La fonction f est paire, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et la borne fixe est 0. D'après F04 (parité d'une fonction définie par une intégrale), F est impaire.

Conclusion. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante.

2.

Montrer que $F(1) \leq \dfrac{29}{30}$.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, combine les deux inégalités admises, avec $s = \dfrac{t^4}{3}$, puis intègre de 0 à 1.

CORRIGÉ

Majorer l'intégrande. Soit $t \in [0,1]$. D'après la seconde inégalité admise :

$$f(t) \leq \frac{1}{1 + \frac{t^4}{3}}.$$

Comme $s = \dfrac{t^4}{3}$ appartient à $[0,1]$, la première inégalité admise donne $f(t) \leq 1 - \dfrac{t^4}{6}$.

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. Par l'ordre de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(1) &\leq \int_0^1 \left(1 - \frac{t^4}{6}\right) \mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}. \end{aligned}$$

Conclusion. $F(1) \leq \dfrac{29}{30}$.

3.

Montrer que $F(2) \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. On pourra minorer f sur $[0,1]$, puis sur $[1,2]$ en utilisant $1+t^4 \leq 2t^4$.

INDICE

Écris $F(2) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ (Chasles). Sur $[0,1]$, $1+t^4 \leq 2$.

CORRIGÉ

Sur $[0,1]$. Soit $t \in [0,1]$: $1+t^4 \leq 2$, donc $f(t) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Sur $[1,2]$. Soit $t \in [1,2]$: $1 \leq t^4$, donc $1+t^4 \leq 2t^4$ et $f(t) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}\,t^2}$.

Intégrer. Les bornes sont dans l'ordre croissant. Par la relation de Chasles et l'ordre de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(2) &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $F(2) \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

4.

En déduire que l'équation $F(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, que $1 < \alpha < 2$, et résoudre l'équation $F(x) = -1$.

INDICE

Compare $\dfrac{29}{30}$ et $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ à 1. Utilise ensuite le théorème des valeurs intermédiaires, la stricte croissance et l'imparité.

CORRIGÉ

Comparaison à 1. On a $F(1) \leq \dfrac{29}{30} < 1$. De plus, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{18}{16} > 1$, donc $F(2) \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{4} > 1$.

Existence et unicité. F est continue et strictement croissante sur $[1,2]$, et 1 est compris entre $F(1)$ et $F(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \,]1,2[$ tel que $F(\alpha) = 1$. Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique dans $\mathbb{R}$.

Équation $F(x) = -1$. Par imparité, $F(-\alpha) = -F(\alpha) = -1$. Par stricte croissance, $-\alpha$ en est l'unique solution.

Conclusion. L'équation $F(x) = 1$ admet une unique solution α, avec $1 < \alpha < 2$, et l'équation $F(x) = -1$ a pour unique solution $-\alpha$.

Exercice 4

Sommes à mettre sous forme de Riemann

1.

Pour $n \geq 1$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Montrer que u_n est la somme de Riemann T_{2n} de $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[0,2]$.

INDICE

Sur $[0,2]$ partagé en m intervalles, le pas vaut $\dfrac{2}{m}$. Pour $m = 2n$, le pas vaut $\dfrac{1}{n}$ et $x_k = \dfrac{k}{n}$.

CORRIGÉ

Terme général. Soit $n \geq 1$ et $k \in \{1, \ldots, 2n\}$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+k^2} &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Subdivision. Partageons $[0,2]$ en $2n$ intervalles : le pas vaut $\dfrac{2-0}{2n} = \dfrac{1}{n}$, et les points sont $x_k = \dfrac{k}{n}$ pour $k \in \{0, \ldots, 2n\}$.

Conclusion. On reconnaît la somme des rectangles à droite :

$$u_n = \frac{2-0}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) = T_{2n}.$$

2.

Montrer que, pour tout $t \in [0,2]$, $|f'(t)| \leq 1$. En déduire que, pour $n \geq 1$, $\left|\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - u_n\right| \leq \dfrac{1}{n}$, puis la limite de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(t)$, puis utilise $2t \leq 1+t^2$. Applique ensuite F07 sur $[0,2]$, avec $2n$ rectangles. Une primitive de f est $\arctan$.

CORRIGÉ

Majorer $|f'|$. La fonction f est dérivable sur $[0,2]$. Soit $t \in [0,2]$:

$$f'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Comme $(1-t)^2 \geq 0$, on a $2t \leq 1+t^2$. Donc $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$.

Majorer l'erreur. D'après la majoration de l'erreur de la méthode des rectangles (F07), appliquée sur $[0,2]$ avec $M=1$ et $2n$ rectangles, et d'après 1. :

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - u_n\right| \\ &\leq \frac{1 \times (2-0)^2}{2 \times 2n} \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Limite. Comme $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, le théorème des gendarmes donne la limite de (u_n). Une primitive de f est $\arctan$:

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \arctan 2 - \arctan 0 \\ &= \arctan 2.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, l'erreur est majorée par $\dfrac{1}{n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \arctan 2$.

3.

Pour $n \geq 1$, soit $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n+k}{n^2}\, e^{-\frac{k}{n}}$. Calculer la limite de (v_n).

INDICE

Écris $\dfrac{2n+k}{n^2} = \dfrac{1}{n}\left(2 + \dfrac{k}{n}\right)$. Pour l'intégrale obtenue, intègre par parties en dérivant $2+t$.

CORRIGÉ

Terme général. Soit $n \geq 1$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} &\frac{2n+k}{n^2}\, e^{-\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(2 + \frac{k}{n}\right) e^{-\frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

Somme de Riemann. Soit cette fois $f : t \mapsto (2+t)e^{-t}$, continue sur $[0,1]$. Alors $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$: c'est la somme S_n de f sur $[0,1]$. D'après F08 (convergence des sommes de Riemann), (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 (2+t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Intégration par parties. On dérive $2+t$ et on intègre e^{-t} en $-e^{-t}$; ces fonctions sont à dérivées continues sur $[0,1]$. Posons $V = \displaystyle\int_0^1 (2+t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} V &= \Big[-(2+t)e^{-t}\Big]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(2 - 3e^{-1}\right) + \left(1 - e^{-1}\right) \\ &= 3 - 4e^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 3 - 4e^{-1}$.

Exercice 5

Une somme de racines cubiques

Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$. On rappelle que $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$, et que $t \mapsto \dfrac{3}{4}\, t\sqrt[3]{t}$ en est une primitive sur cet intervalle.

1.

Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, $\sqrt[3]{k} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt[3]{k+1}$.

INDICE

Encadre $\sqrt[3]{t}$ pour $t \in [k, k+1]$ par croissance, puis intègre sur un intervalle de longueur 1.

CORRIGÉ

Soit $k \geq 0$ un entier et $t \in [k, k+1]$. La racine cubique est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\sqrt[3]{k} \leq \sqrt[3]{t} \leq \sqrt[3]{k+1}.$$

Ces fonctions sont continues sur $[k, k+1]$, et $k < k+1$. Par l'ordre de l'intégrale, avec $\displaystyle\int_k^{k+1} c\,\mathrm{d}t = c$ pour toute constante c, on obtient l'encadrement.

Conclusion. Pour tout entier $k \geq 0$, $\sqrt[3]{k} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt[3]{k+1}$. C'est le cas croissant de F09 (encadrement d'une somme par des intégrales).

2.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}} \leq s_n \leq \frac{3}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{3}} - 1\right)$.

INDICE

Piste 1 : somme sur k les inégalités de 1., et regroupe les intégrales par la relation de Chasles.

Piste 2 : surveille le premier et le dernier indice de chaque somme. Teste ton choix avec $n = 1$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$.

Minoration. On somme l'inégalité de droite de 1. pour k de 0 à $n-1$. La relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}\int_0^n \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[3]{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt[3]{j} = s_n.\end{aligned}$$

Or $\int_0^n \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\,n\sqrt[3]{n} - 0 = \frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}}$, car $n > 0$.

Majoration. On somme l'inégalité de gauche pour k de 1 à n :

$$\begin{aligned}s_n &\leq \int_1^{n+1} \sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\left((n+1)\sqrt[3]{n+1} - 1\right).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{3}{4}n^{\frac{4}{3}} \leq s_n \leq \frac{3}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{3}} - 1\right)$.

3.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{n^{\frac{4}{3}}}$.

INDICE

Divise l'encadrement par $n^{\frac{4}{3}} > 0$, et écris $\dfrac{(n+1)^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$.

CORRIGÉ

Diviser. Soit $n \geq 1$. En divisant l'encadrement de 2. par $n^{\frac{4}{3}} > 0$, on obtient $\frac{3}{4} \leq \frac{s_n}{n^{\frac{4}{3}}} \leq w_n$, où :

$$w_n = \frac{3}{4}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Limite du majorant. Quand n tend vers $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}$ tend vers 1, par continuité de $t \mapsto t^{\frac{4}{3}}$ en 1, et $\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ tend vers 0. Donc (w_n) tend vers $\frac{3}{4}$.

Conclusion. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{n^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 6

Combien de rectangles pour trois décimales ?

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\sqrt{1+t^4}$, et $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n ses sommes de Riemann sur $[0,1]$. On donne $1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$.

1.

Montrer que, pour tout $t\in[0,1]$, $0\leq f'(t)\leq 2$.

INDICE

On a $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$. Majore le numérateur et minore le dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivée. Comme $1+t^4>0$, f est dérivable sur $[0,1]$. Soit $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{4t^3}{2\sqrt{1+t^4}} \\ &= \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}. \end{aligned}$$

Encadrement. On a $0\leq 2t^3\leq 2$ et $\sqrt{1+t^4}\geq 1$.

Conclusion. Pour tout $t\in[0,1]$, $0\leq f'(t)\leq 2$.

2.

En déduire, par F07, que $|I-S_n|\leq\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\geq 1$. Quel nombre de rectangles cette majoration impose-t-elle pour garantir $|I-S_n|\leq 10^{-3}$?

INDICE

Applique F07 avec $M=2$, $a=0$ et $b=1$.

CORRIGÉ

Majorer l'erreur. D'après 1., $|f'(t)|\leq 2$ pour tout $t\in[0,1]$. D'après F07 (majoration de l'erreur de la méthode des rectangles), avec $M=2$, pour tout $n\geq 1$:

$$\begin{aligned} |I-S_n| &\leq \frac{2\times(1-0)^2}{2n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Nombre de rectangles. Pour garantir $|I-S_n|\leq 10^{-3}$ par cette majoration, il faut $\dfrac{1}{n}\leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $n\geq 1000$.

Conclusion. $|I-S_n|\leq\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\geq 1$, et cette majoration impose $n\geq 1000$ rectangles.

3.

Montrer que $S_n \leq I \leq T_n$ et que $T_n - S_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{n}$.

INDICE

Le signe de f' est connu par 1. Applique F06.

CORRIGÉ

Monotonie. D'après 1., $f' \geq 0$ sur $[0,1]$: f est croissante, et elle est continue.

Encadrement et écart. D'après F06 (encadrement d'une intégrale par les rectangles), $S_n \leq I \leq T_n$ et :

$$\begin{aligned} & T_n - S_n \\ &= \frac{(1-0)\big(f(1)-f(0)\big)}{n} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{n}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq I \leq T_n$ et $T_n - S_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{n}$.

4.

Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n - S_n \leq 10^{-3}$. Comparer avec le résultat de 2.

INDICE

Résous $\dfrac{\sqrt{2}-1}{n} \leq 10^{-3}$, puis utilise l'encadrement de $\sqrt{2}$ donné.

CORRIGÉ

Condition sur n. Comme $n > 0$, l'inégalité $\dfrac{\sqrt{2}-1}{n} \leq 10^{-3}$ équivaut à :

$$n \geq 1000(\sqrt{2}-1).$$

Encadrement. D'après l'encadrement donné de $\sqrt{2}$, $414{,}2 < 1000(\sqrt{2}-1) < 414{,}3$.

Conclusion. Le plus petit entier qui convient est $n = 415$. Pour ce n, S_{415} et T_{415} encadrent I à 10^{-3} près. La monotonie donne ici un résultat plus fin que F07 (majoration de l'erreur), qui demandait $n \geq 1000$.

Exercice 7

Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e t^2 (\ln t)^n \, \mathrm{d}t$. Pour $n = 0$, on convient que $(\ln t)^0 = 1$ pour tout $t \in [1, e]$, y compris en $t = 1$.

1.

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$.

CORRIGÉ

Une primitive de $t \mapsto t^2$ est $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$. Donc :

$$I_0 = \int_1^e t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^e.$$

Conclusion. $I_0 = \dfrac{e^3 - 1}{3}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3I_{n+1} = e^3 - (n+1) I_n$.

INDICE

Intègre I_{n+1} par parties : dérive $(\ln t)^{n+1}$, de dérivée $\dfrac{(n+1)(\ln t)^n}{t}$, et intègre t^2 en $\dfrac{t^3}{3}$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ sont dérivables sur $[1, e]$, de dérivées continues $t \mapsto \dfrac{(n+1)(\ln t)^n}{t}$ et $t \mapsto t^2$. Donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{t^3}{3}(\ln t)^{n+1}\right]_1^e \\ &\quad - \frac{n+1}{3}\int_1^e t^2 (\ln t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n, \end{aligned}$$

car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$. Dans l'intégrale, on a simplifié $\dfrac{t^3}{3} \times \dfrac{1}{t} = \dfrac{t^2}{3}$.

Conclusion. En multipliant par 3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3I_{n+1} = e^3 - (n+1) I_n$.

3.

En déduire I_1 et I_2.

INDICE

Applique la relation avec $n = 0$, puis avec $n = 1$.

CORRIGÉ

Avec $n = 0$.

$$\begin{aligned} 3I_1 &= e^3 - I_0 \\ &= e^3 - \frac{e^3 - 1}{3} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{3}. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$.

$$\begin{aligned} 3I_2 &= e^3 - 2I_1 \\ &= e^3 - \frac{4e^3 + 2}{9} \\ &= \frac{5e^3 - 2}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_1 = \dfrac{2e^3 + 1}{9}$ et $I_2 = \dfrac{5e^3 - 2}{27}$.

4.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Sur $[1, e]$, $0 \leq \ln t \leq 1$. Compare $(\ln t)^{n+1}$ et $(\ln t)^n$, puis applique F10.

CORRIGÉ

Comparer les intégrandes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1, e]$. Par croissance de $\ln$, $0 \leq \ln t \leq 1$. Donc :

$$t^2(\ln t)^n \geq 0,$$

$$t^2(\ln t)^{n+1} \leq t^2(\ln t)^n.$$

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[1, e]$, et $1 < e$. D'après F10 (signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales), $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, et la suite (I_n) est décroissante.

5.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

INDICE

Dans la relation de 2., $I_{n+1} \geq 0$. Pour la seconde limite, écris $(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1}$.

CORRIGÉ

Majoration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2. et 4., $I_{n+1} \geq 0$, donc :

$$\begin{aligned}(n+1)I_n &= e^3 - 3I_{n+1}\\ &\leq e^3.\end{aligned}$$

Ainsi $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$, et par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Limite de nI_n. Alors I_{n+1} tend aussi vers 0, et $(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1}$ tend vers e^3. Enfin, $nI_n = (n+1)I_n - I_n$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e^3$.

Exercice 8

La limite de n J_n par une intégration par parties

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

1.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leq J_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, et en déduire la limite de (J_n).

INDICE

Sur $[0,1]$, $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$. Multiplie par $t^n \geq 0$, puis intègre.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $1 \leq 1+t \leq 2$, donc $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$. Comme $t^n \geq 0$:

$$t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}\,t^n.$$

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et $0 < 1$. Avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, l'ordre de l'intégrale donne :

$$\frac{1}{n+1} \leq J_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Conclusion. Les deux bornes tendent vers 0 : par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. C'est F11 (limite de $\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$), avec $g : t \mapsto \sqrt{1+t}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)J_n = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}K_n$.

INDICE

Intègre J_n par parties : dérive $\sqrt{1+t}$ en $\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$, et intègre t^n en $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+t}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ sont dérivables sur $[0,1]$, de dérivées continues $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$ et $t \mapsto t^n$. Donc :

$$\begin{aligned} J_n &= \left[\frac{t^{n+1}\sqrt{1+t}}{n+1}\right]_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{K_n}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion. En multipliant par $n+1$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)J_n = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}K_n$.

3.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq K_n \leq \dfrac{1}{n+2}$.

INDICE

Sur $[0,1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. Comme $\sqrt{1+t} \geq 1$:

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1+t}} \leq t^{n+1}.$$

Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. Par l'ordre de l'intégrale, $0 \leq K_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq K_n \leq \dfrac{1}{n+2}$.

4.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n$.

INDICE

Que dit 3. de la suite (K_n) ? Écris ensuite $nJ_n = (n+1)J_n - J_n$.

CORRIGÉ

Limite de (K_n). D'après 3. et le théorème des gendarmes, (K_n) tend vers 0.

Limite de $(n+1)J_n$. D'après 2., $(n+1)J_n = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}K_n$ tend donc vers $\sqrt{2}$.

Conclusion. Comme J_n tend vers 0 (question 1.), $nJ_n = (n+1)J_n - J_n$ tend vers $\sqrt{2}$.

Le poids de l'intégrande se concentre près de $t = 1$, où $\sqrt{1+t}$ vaut $\sqrt{2}$.