BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Application	10

Exercice 1

Trois domaines lus sur l'intégrande

Pour chaque fonction, une intégrale n'a de sens que si son intégrande est continue entre ses deux bornes. Repère d'abord où l'intégrande est continue, puis l'intervalle qui contient la borne fixe.

1.

Déterminer le domaine de $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 5t + 6}$.

INDICE

Factorise $t^2 - 5t + 6$. L'intégrande est continue sur chaque intervalle où ce trinôme ne s'annule pas. Lequel contient 0 ?

2.

Déterminer le domaine de $F_2 : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t - 2}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Deux conditions : $\ln t$ exige $t > 0$, et le quotient exige $t \neq 2$. La borne fixe 1 est entre 0 et 2.

3.

Déterminer le domaine de $F_3 : x \mapsto \displaystyle\int_4^x \sqrt{\frac{t-3}{t+1}}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

La racine carrée exige $t \neq -1$ et $\dfrac{t-3}{t+1} \geq 0$. Dresse le tableau de signes, puis repère l'intervalle qui contient 4.

Exercice 2

Dériver quand les bornes bougent

1.

Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_{1}^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+\ln t}$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

INDICE

Sur $I = [1, +\infty[$, $t + \ln t \geq 1$. Vérifie que x^2+1 appartient à I, puis applique F03 avec une borne fixe.

2.

Soit $K : x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{2x+1} \frac{t}{\sqrt{t^4+5}}\,\mathrm{d}t$. Justifier que K est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $K'(x)$, puis $K'(0)$.

INDICE

Ici, les deux bornes dépendent de x : $K'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big)$. Repère u, v et leurs dérivées.

3.

Soit $L : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$, pour $x > 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$, $L'(x) = \dfrac{2}{x^2+x+1}$.

INDICE

Dérive aussi la borne inférieure : $v(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Puis multiplie le second terme par x^2 en haut et en bas.

Exercice 3

Le signe d'une intégrale

1.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{3+\sin t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$, définie sur $\mathbb{R}$. Donner le signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

L'intégrande est positive. Distingue $x \geq 1$, où les bornes sont dans l'ordre croissant, et $x < 1$, où il faut retourner les bornes.

2.

Donner le signe de $A = \displaystyle\int_3^1 \sqrt{t^2+t}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Les bornes sont dans l'ordre décroissant : retourne-les. Puis minore l'intégrande sur $[1,3]$.

3.

Donner le signe de $B = \displaystyle\int_0^\pi (t-\pi)\sin t\,\mathrm{d}t$, puis calculer B.

INDICE

Sur $[0,\pi]$, $t-\pi \leq 0$ et $\sin t \geq 0$. Pour le calcul, intègre par parties en dérivant $t-\pi$.

Exercice 4

Encadrer une intégrale sans la calculer

Pour $x \in [-1,1]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. L'intégrande est continue sur $[-1,1]$, car $1+t^3 \geq 0$ sur cet intervalle.

On admet que, pour tout réel $s \geq -1$, $\sqrt{1+s} \leq 1 + \dfrac{s}{2}$.

1.

Montrer que $1 \leq F(1) \leq \dfrac{9}{8}$.

INDICE

Pour $t \in [0,1]$, applique l'inégalité admise avec $s = t^3$, et minore $\sqrt{1+t^3}$ par 1. Les bornes 0 et 1 sont dans l'ordre croissant.

2.

Soit $x \in [-1,0]$. Montrer que $F(x) \geq x + \dfrac{x^4}{8}$.

INDICE

Ici $x \leq 0$: les bornes de $F(x)$ sont dans l'ordre décroissant. Écris $F(x) = -\displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$, puis majore l'intégrale de droite.

Exercice 5

Une fonction sans formule explicite

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t - 1}$. On rappelle que $e < 3$.

1.

Déterminer le domaine de F.

INDICE

$\ln t$ existe pour $t > 0$, et $\ln t - 1$ s'annule en e. Quel intervalle, où l'intégrande est continue, contient 3 ?

2.

Calculer $F(3)$ et $F'(x)$ pour $x > e$. En déduire le sens de variation de F.

INDICE

Applique F02 sur l'intervalle $]e, +\infty[$, qui contient la borne fixe.

3.

Donner une équation de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 3.

INDICE

La tangente en 3 a pour équation $y = F'(3)(x - 3) + F(3)$.

4.

Montrer que, pour tout $x \geq 3$, $F(x) \leq \dfrac{x - 3}{\ln 3 - 1}$.

INDICE

Pour $t \geq 3$, compare $\ln t - 1$ à $\ln 3 - 1$, qui est strictement positif. Les bornes 3 et x sont dans l'ordre croissant.

Exercice 6

Deux rectangles pour encadrer ln 3

Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(t)=\dfrac{t}{t+1}$, et $I=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n les sommes de Riemann de f sur $[0,2]$.

1.

Pour $n=2$, donner le pas h et les points x_0, x_1, x_2, puis calculer S_2 et T_2.

INDICE

Le pas vaut $\dfrac{2-0}{2}$. S_2 utilise $f(x_0)$ et $f(x_1)$; T_2 utilise $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

2.

Montrer que f est croissante sur $[0,2]$. En déduire que $S_2 \le I \le T_2$, et que l'amplitude de cet encadrement vaut $\dfrac{2}{3}$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et lis son signe. Applique ensuite F06 dans le cas croissant.

3.

Vérifier que $f(t)=1-\dfrac{1}{t+1}$, calculer I, et en déduire que $\dfrac{5}{6}\le \ln 3 \le \dfrac{3}{2}$.

INDICE

Une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{t+1}$ sur $[0,2]$ est $t\mapsto\ln(t+1)$. Isole ensuite $\ln 3$ dans l'encadrement de 2.

Exercice 7

Deux sommes à reconnaître

1.

Calculer la limite de la suite définie pour $n\ge 1$ par $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$.

INDICE

Écris le terme général sous la forme $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Une primitive de $t\mapsto\sqrt{1+3t}$ est $t\mapsto\dfrac{2}{9}(1+3t)^{\frac{3}{2}}$.

2.

Calculer la limite de la suite définie pour $n\ge 1$ par $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+2k)^2}$.

INDICE

Factorise $(n+2k)^2$ par n^2 : il reste $\dfrac{1}{n}$ devant une fonction de $\dfrac{k}{n}$.

Exercice 8

Encadrer ln 5 par des rectangles

Soit f la fonction définie sur $[1,3]$ par $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, et $I=\displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n les sommes de Riemann de f sur $[1,3]$.

1.

Montrer que f est décroissante sur $[1,3]$ et que $I=\dfrac{1}{2}\ln 5$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et factorise son numérateur. Pour l'intégrale, fais apparaître au numérateur la dérivée de t^2+1.

2.

Calculer S_2 et T_2. En déduire que $\dfrac{7}{5}\leq \ln 5\leq \dfrac{9}{5}$.

INDICE

Le pas vaut 1 et les points sont 1, 2 et 3. Comme f est décroissante, F06 donne $T_2\leq I\leq S_2$.

3.

Pour $n=4$, on admet que $0{,}853<S_4<0{,}854$. Calculer l'écart S_4-T_4 à l'aide de F06, en déduire un encadrement de T_4, puis un encadrement décimal de $\ln 5$.

INDICE

L'écart vaut $\dfrac{(3-1)\big(f(1)-f(3)\big)}{4}$. Encadre ensuite T_4, puis multiplie l'encadrement de F06 par 2.

Exercice 9

Une suite d'intégrales décroissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1.

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1,2]$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

INDICE

Sur $[1,2]$, $\ln t \geq 0$. Les bornes 1 et 2 sont dans l'ordre croissant.

3.

Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Compare $(\ln t)^{n+1}$ et $(\ln t)^n$: pour $t \in [1,2]$, $0 \leq \ln t \leq \ln 2$, et $\ln 2 < 1$ car $2 < e$.

4.

En déduire que (I_n) converge, et que sa limite appartient à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

INDICE

Une suite décroissante et minorée converge. Pour situer la limite, utilise $0 \leq I_n \leq I_0$.

Exercice 10

Une limite par encadrement de l'intégrande

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{4-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1.

Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

INDICE

Encadre d'abord $4-t^2$ pour $t \in [0,1]$. Applique ensuite la racine carrée, puis l'inverse, en surveillant le sens.

2.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}\,(n+1)}$.

INDICE

Multiplie l'encadrement par $t^n \geq 0$, puis intègre de 0 à 1, avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

3.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

INDICE

Les deux bornes de l'encadrement ont la même limite.