BURHAN

Fonctions et suites définies par une intégrale : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions et suites définies par une intégrale	Application	10

Exercice 1

Trois domaines lus sur l'intégrande

Pour chaque fonction, une intégrale n'a de sens que si son intégrande est continue entre ses deux bornes. Repère d'abord où l'intégrande est continue, puis l'intervalle qui contient la borne fixe.

1.

Déterminer le domaine de $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 5t + 6}$.

INDICE

Factorise $t^2 - 5t + 6$. L'intégrande est continue sur chaque intervalle où ce trinôme ne s'annule pas. Lequel contient 0 ?

CORRIGÉ

Continuité de l'intégrande. Pour tout réel t, $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$. L'intégrande est donc définie et continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$ et $]3, +\infty[$.

Intervalle de la borne fixe. La borne fixe 0 appartient à $]-\infty, 2[$. Soit $x < 2$: le segment d'extrémités 0 et x est inclus dans $]-\infty, 2[$, donc l'intégrale existe (F01, fonction définie par une intégrale).

Au-delà. Soit $x \geq 2$: le segment d'extrémités 0 et x contient 2, où l'intégrande n'est pas définie. L'intégrale n'existe pas (W05 : pas d'intégrale à travers une discontinuité).

Conclusion. Le domaine de F_1 est $]-\infty, 2[$.

2.

Déterminer le domaine de $F_2 : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t-2}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Deux conditions : $\ln t$ exige $t > 0$, et le quotient exige $t \neq 2$. La borne fixe 1 est entre 0 et 2.

CORRIGÉ

Continuité de l'intégrande. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-2}$ est définie et continue pour $t > 0$ et $t \neq 2$, donc sur $]0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. La borne fixe 1 appartient à $]0, 2[$.

Valeurs admises. Soit $x \in]0, 2[$: le segment d'extrémités 1 et x est inclus dans $]0, 2[$, donc l'intégrale existe.

Valeurs exclues. Si $x \geq 2$, ce segment contient 2 ; si $x \leq 0$, il contient 0. Dans les deux cas, l'intégrande n'est pas définie en tout point du segment.

Conclusion. Le domaine de F_2 est $]0, 2[$.

3.

Déterminer le domaine de $F_3 : x \mapsto \displaystyle\int_4^x \sqrt{\frac{t-3}{t+1}}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

La racine carrée exige $t \neq -1$ et $\dfrac{t-3}{t+1} \geq 0$. Dresse le tableau de signes, puis repère l'intervalle qui contient 4.

CORRIGÉ

Existence de l'intégrande. L'expression $\sqrt{\dfrac{t-3}{t+1}}$ existe si et seulement si $t \neq -1$ et $\dfrac{t-3}{t+1} \geq 0$. Un tableau de signes donne : $t < -1$ ou $t \geq 3$.

Continuité. Sur l'intervalle $[3, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t-3}{t+1}$ est continue et positive, et la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$. Par composition, l'intégrande est continue sur $[3, +\infty[$, qui contient la borne fixe 4.

Domaine. Soit $x \geq 3$: le segment d'extrémités 4 et x est inclus dans $[3, +\infty[$, donc l'intégrale existe. Si $x < 3$, ce segment contient des réels de $]-1, 3[$, où l'intégrande n'existe pas.

Conclusion. Le domaine de F_3 est $[3, +\infty[$.

Exercice 2

Dériver quand les bornes bougent

1.

Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+\ln t}$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

INDICE

Sur $I = [1, +\infty[$, $t + \ln t \geq 1$. Vérifie que x^2+1 appartient à I, puis applique F03 avec une borne fixe.

CORRIGÉ

Hypothèses. Posons $I = [1, +\infty[$. Soit $t \in I$: $\ln t \geq 0$, donc $t + \ln t \geq 1 > 0$. L'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{1}{t+\ln t}$ est donc continue sur l'intervalle I, qui contient la borne fixe 1.

La fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u(x) \geq 1$ pour tout réel x : elle est à valeurs dans I.

Dérivée. D'après F03 (dérivée de $x \mapsto \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$), avec une borne inférieure constante, G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= u'(x)\, f\big(u(x)\big) \\ &= \frac{2x}{x^2+1+\ln(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $G'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1+\ln(x^2+1)}$.

2.

Soit $K : x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{2x+1} \frac{t}{\sqrt{t^4+5}}\,\mathrm{d}t$. Justifier que K est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $K'(x)$, puis $K'(0)$.

INDICE

Ici, les deux bornes dépendent de x : $K'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big)$. Repère u, v et leurs dérivées.

CORRIGÉ

Hypothèses. Pour tout réel t, $t^4+5 > 0$: l'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^4+5}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $u : x \mapsto 2x+1$ et $v : x \mapsto 3x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après F03 (dérivée de $x \mapsto \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$), K est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 2\,f(2x+1) - 3\,f(3x) \\ &= \frac{4x+2}{\sqrt{(2x+1)^4+5}} \\ &\quad - \frac{9x}{\sqrt{81x^4+5}}. \end{aligned}$$

Valeur en 0.

$$\begin{aligned} K'(0) &= \frac{2}{\sqrt{6}} - 0 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. K est dérivable sur $\mathbb{R}$, $K'(x)$ est donné ci-dessus pour tout réel x, et $K'(0) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3.

Soit $L : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$, pour $x > 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$, $L'(x) = \dfrac{2}{x^2+x+1}$.

INDICE

Dérive aussi la borne inférieure : $v(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Puis multiplie le second terme par x^2 en haut et en bas.

CORRIGÉ

Hypothèses. Le trinôme t^2+t+1 a pour discriminant $-3 < 0$: il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et l'intégrande $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, avec $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Dérivée. D'après F03 (dérivée de $x \mapsto \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$), L est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$:

$$L'(x) = f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Second terme. On multiplie le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} \\ &= \frac{1}{1+x+x^2}. \end{aligned}$$

Somme. Les deux termes de $L'(x)$ sont donc égaux à $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $L'(x) = \dfrac{2}{x^2+x+1}$.

Exercice 3

Le signe d'une intégrale

1.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{3+\sin t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$, définie sur $\mathbb{R}$. Donner le signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

L'intégrande est positive. Distingue $x \geq 1$, où les bornes sont dans l'ordre croissant, et $x < 1$, où il faut retourner les bornes.

CORRIGÉ

L'intégrande. Pour tout réel t, $3+\sin t \geq 2 > 0$ et $t^2+2 > 0$. L'intégrande f est donc continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Variations de F. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui contient 1. D'après F02 (dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = f(x) > 0$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Signe. On a $F(1) = 0$. Par stricte croissance, $F(x) > 0$ si $x > 1$ et $F(x) < 0$ si $x < 1$.

On peut aussi le lire sur les bornes : pour $x < 1$, $F(x) = -\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et l'intégrale de droite a ses bornes dans l'ordre croissant.

Conclusion. $F(x) < 0$ pour $x < 1$, $F(1) = 0$, et $F(x) > 0$ pour $x > 1$.

2.

Donner le signe de $A = \displaystyle\int_3^1 \sqrt{t^2+t}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Les bornes sont dans l'ordre décroissant : retourne-les. Puis minore l'intégrande sur $[1,3]$.

CORRIGÉ

Retourner les bornes. L'intégrande $t \mapsto \sqrt{t^2+t}$ est continue et positive sur $[1,3]$, et

$$A = -\int_1^3 \sqrt{t^2+t}\,\mathrm{d}t.$$

Minoration. Soit $t \in [1,3]$: $t^2+t \geq 2$, donc $\sqrt{t^2+t} \geq \sqrt{2}$. Comme $1 < 3$, l'ordre de l'intégrale donne :

$$\int_1^3 \sqrt{t^2+t}\,\mathrm{d}t \geq 2\sqrt{2}.$$

Conclusion. $A \leq -2\sqrt{2}$: l'intégrale A est strictement négative.

3.

Donner le signe de $B = \displaystyle\int_0^{\pi} (t-\pi)\sin t \,\mathrm{d}t$, puis calculer B.

INDICE

Sur $[0,\pi]$, $t-\pi \leq 0$ et $\sin t \geq 0$. Pour le calcul, intègre par parties en dérivant $t-\pi$.

CORRIGÉ

Signe. Soit $t \in [0,\pi]$: $t-\pi \leq 0$ et $\sin t \geq 0$. L'intégrande est continue et négative sur $[0,\pi]$, et $0 < \pi$, donc $B \leq 0$.

Intégration par parties. Posons $u(t) = t-\pi$ et $v(t) = -\cos t$. Ces fonctions sont dérivables sur $[0,\pi]$, de dérivées continues $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \sin t$. Donc :

$$\begin{aligned} B &= \big[-(t-\pi)\cos t\big]_0^{\pi} \\ &\quad + \int_0^{\pi} \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= (0-\pi) + 0 \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Conclusion. Le calcul confirme le signe : $B = -\pi < 0$.

Exercice 4

Encadrer une intégrale sans la calculer

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. L'intégrande est continue sur $[-1, 1]$, car $1 + t^3 \geq 0$ sur cet intervalle.

On admet que, pour tout réel $s \geq -1$, $\sqrt{1+s} \leq 1 + \dfrac{s}{2}$.

1.

Montrer que $1 \leq F(1) \leq \dfrac{9}{8}$.

INDICE

Pour $t \in [0, 1]$, applique l'inégalité admise avec $s = t^3$, et minore $\sqrt{1+t^3}$ par 1. Les bornes 0 et 1 sont dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $t \in [0, 1]$. Comme $t^3 \geq 0$, on a $1 \leq \sqrt{1+t^3}$. Avec $s = t^3 \geq -1$ dans l'inégalité admise :

$$\sqrt{1+t^3} \leq 1 + \frac{t^3}{2}.$$

Intégrer. Les trois fonctions sont continues sur $[0, 1]$, et $0 < 1$. Par l'ordre de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \leq F(1) \\ \leq \int_0^1 \left(1 + \frac{t^3}{2}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(1 + \frac{t^3}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{8}$.

Conclusion. $1 \leq F(1) \leq \dfrac{9}{8}$.

2.

Soit $x \in [-1, 0]$. Montrer que $F(x) \geq x + \dfrac{x^4}{8}$.

INDICE

Ici $x \leq 0$: les bornes de $F(x)$ sont dans l'ordre décroissant. Écris $F(x) = -\displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$, puis majore l'intégrale de droite.

CORRIGÉ

Majorer l'intégrande. Soit $t \in [x, 0]$. Comme $x \geq -1$, $t^3 \geq -1$. Avec $s = t^3$ dans l'inégalité admise :

$$\sqrt{1+t^3} \leq 1 + \frac{t^3}{2}.$$

Intégrer dans le bon sens. Posons $J = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. Les deux fonctions sont continues sur $[x, 0]$, et $x \leq 0$. D'après M03 (obtenir une inégalité en intégrant une inégalité) :

$$\begin{aligned} J &\leq \int_x^0 \left(1 + \frac{t^3}{2}\right) \mathrm{d}t \\ &= -x - \frac{x^4}{8}. \end{aligned}$$

Revenir à $F(x)$. On a $F(x) = -J$. En multipliant par -1, le sens de l'inégalité change.

Conclusion. Pour tout $x \in [-1, 0]$, $F(x) \geq x + \dfrac{x^4}{8}$.

Oublier ce retournement des bornes est une erreur de signe classique (W03 : intégrer une inégalité exige des bornes dans l'ordre croissant).

Exercice 5

Une fonction sans formule explicite

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t - 1}$. On rappelle que $e < 3$.

1.

Déterminer le domaine de F.

INDICE

$\ln t$ existe pour $t > 0$, et $\ln t - 1$ s'annule en e. Quel intervalle, où l'intégrande est continue, contient 3 ?

CORRIGÉ

Continuité de l'intégrande. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t - 1}$ est définie et continue pour $t > 0$ et $\ln t \neq 1$, c'est-à-dire sur $]0, e[$ et sur $]e, +\infty[$. Comme $e < 3$, la borne fixe 3 appartient à $]e, +\infty[$.

Domaine. Soit $x > e$: le segment d'extrémités 3 et x est inclus dans $]e, +\infty[$, donc l'intégrale existe. Si $x \leq e$, ce segment contient e, où f n'est pas définie.

Conclusion. Le domaine de F est $]e, +\infty[$.

2.

Calculer $F(3)$ et $F'(x)$ pour $x > e$. En déduire le sens de variation de F.

INDICE

Applique F02 sur l'intervalle $]e, +\infty[$, qui contient la borne fixe.

CORRIGÉ

Valeur en 3. $F(3) = \displaystyle\int_3^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Dérivée. La fonction f est continue sur l'intervalle $]e, +\infty[$, qui contient 3. D'après F02 (dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), F est dérivable sur $]e, +\infty[$ et, pour tout $x > e$:

$$F'(x) = \frac{1}{\ln x - 1}.$$

Signe. Pour $x > e$, $\ln x > 1$, donc $F'(x) > 0$.

Conclusion. $F(3) = 0$, et F est strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

3.

Donner une équation de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 3.

INDICE

La tangente en 3 a pour équation $y = F'(3)(x - 3) + F(3)$.

CORRIGÉ

La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation $y = F'(3)(x - 3) + F(3)$, avec $F(3) = 0$ et $F'(3) = \dfrac{1}{\ln 3 - 1}$.

Conclusion. Une équation de la tangente est $y = \dfrac{x - 3}{\ln 3 - 1}$.

4.

Montrer que, pour tout $x \geq 3$, $F(x) \leq \dfrac{x-3}{\ln 3 - 1}$.

INDICE

Pour $t \geq 3$, compare $\ln t - 1$ à $\ln 3 - 1$, qui est strictement positif. Les bornes 3 et x sont dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Majorer l'intégrande. Soit $t \geq 3$. Par croissance de $\ln$, $\ln t - 1 \geq \ln 3 - 1$, et $\ln 3 - 1 > 0$ car $3 > e$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{\ln t - 1} \leq \frac{1}{\ln 3 - 1}.$$

Intégrer. Soit $x \geq 3$. Les deux fonctions sont continues sur $[3, x]$ et $3 \leq x$. Par l'ordre de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(x) &\leq \int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln 3 - 1} \\ &= \frac{x-3}{\ln 3 - 1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 3$, $F(x) \leq \dfrac{x-3}{\ln 3 - 1}$: sur $[3, +\infty[$, la courbe de F est sous sa tangente au point d'abscisse 3.

Exercice 6

Deux rectangles pour encadrer ln 3

Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(t)=\dfrac{t}{t+1}$, et $I=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n les sommes de Riemann de f sur $[0,2]$.

1.

Pour $n=2$, donner le pas h et les points x_0, x_1, x_2, puis calculer S_2 et T_2.

INDICE

Le pas vaut $\dfrac{2-0}{2}$. S_2 utilise $f(x_0)$ et $f(x_1)$; T_2 utilise $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

CORRIGÉ

Subdivision. Le pas est $h=\dfrac{2-0}{2}=1$, et $x_k=k$: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$. Les valeurs de f en ces points sont 0, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.

Les deux sommes.

$$\begin{aligned} S_2 &= 1\times\left(0+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2},\\ T_2 &= 1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Conclusion. $h=1$, $S_2=\dfrac{1}{2}$ et $T_2=\dfrac{7}{6}$.

2.

Montrer que f est croissante sur $[0,2]$. En déduire que $S_2 \leq I \leq T_2$, et que l'amplitude de cet encadrement vaut $\frac{2}{3}$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et lis son signe. Applique ensuite F06 dans le cas croissant.

CORRIGÉ

Monotonie. La fonction f est dérivable sur $[0,2]$. Soit $t \in [0,2]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(t+1)-t}{(t+1)^2} \\ &= \frac{1}{(t+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Donc f est continue et croissante sur $[0,2]$.

Encadrement. D'après F06 (encadrement d'une intégrale par les rectangles), dans le cas croissant, $S_2 \leq I \leq T_2$.

Amplitude. D'après F06, l'amplitude vaut :

$$\begin{aligned} & T_2 - S_2 \\ &= \frac{(2-0)\big(f(2)-f(0)\big)}{2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On le vérifie avec 1. : $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Conclusion. f est croissante sur $[0,2]$, $S_2 \leq I \leq T_2$, et l'amplitude de cet encadrement vaut $\frac{2}{3}$.

3.

Vérifier que $f(t) = 1 - \dfrac{1}{t+1}$, calculer I, et en déduire que $\dfrac{5}{6} \leq \ln 3 \leq \dfrac{3}{2}$.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$ sur $[0,2]$ est $t \mapsto \ln(t+1)$. Isole ensuite $\ln 3$ dans l'encadrement de 2.

CORRIGÉ

Écriture de f. Soit $t \in [0,2]$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{t+1} &= \frac{t+1-1}{t+1} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Calcul de I. Une primitive de f sur $[0,2]$ est $t \mapsto t - \ln(t+1)$. Donc :

$$\begin{aligned} I &= (2 - \ln 3) - (0 - \ln 1) \\ &= 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

Encadrement. D'après 2., $\dfrac{1}{2} \leq 2 - \ln 3 \leq \dfrac{7}{6}$. On en tire $\ln 3 \leq 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $\ln 3 \geq 2 - \dfrac{7}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Conclusion. $I = 2 - \ln 3$ et $\dfrac{5}{6} \leq \ln 3 \leq \dfrac{3}{2}$.

Exercice 7

Deux sommes à reconnaître

1.

Calculer la limite de la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$.

INDICE

Écris le terme général sous la forme $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Une primitive de $t \mapsto \sqrt{1+3t}$ est $t \mapsto \dfrac{2}{9}(1+3t)^{\frac{3}{2}}$.

CORRIGÉ

Reconnaître une somme de Riemann. Soit $f : t \mapsto \sqrt{1+3t}$, continue sur $[0,1]$ car $1+3t \geq 1 > 0$. Pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

C'est la somme S_n de f sur $[0,1]$.

Limite. D'après F08 (convergence des sommes de Riemann), (u_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+3t}\,\mathrm{d}t$. Or :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{1+3t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{2}{9}(1+3t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{9}(8-1) \\
&= \frac{14}{9}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{14}{9}$.

2.

Calculer la limite de la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+2k)^2}$.

INDICE

Factorise $(n+2k)^2$ par n^2 : il reste $\dfrac{1}{n}$ devant une fonction de $\dfrac{k}{n}$.

CORRIGÉ

Transformer le terme général. Soit $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $(n+2k)^2 = n^2\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2$, donc :

$$\frac{n}{(n+2k)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left(1+2\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Reconnaître une somme de Riemann. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+2t)^2}$, continue sur $[0,1]$. Alors $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$: c'est la somme T_n de f sur $[0,1]$.

Limite. D'après F08 (convergence des sommes de Riemann), (v_n) converge vers :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^2} \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+2t)}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

Exercice 8

Encadrer ln 5 par des rectangles

Soit f la fonction définie sur $[1,3]$ par $f(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, et $I=\displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$. On note S_n et T_n les sommes de Riemann de f sur $[1,3]$.

1.

Montrer que f est décroissante sur $[1,3]$ et que $I=\dfrac{1}{2}\ln 5$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et factorise son numérateur. Pour l'intégrale, fais apparaître au numérateur la dérivée de t^2+1.

CORRIGÉ

Monotonie. La fonction f est dérivable sur $[1,3]$. Soit $t\in[1,3]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(t^2+1)-2t^2}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $t\geq 1$, $1-t^2\leq 0$: f est décroissante sur $[1,3]$.

Calcul de I. Le numérateur t est la moitié de la dérivée de t^2+1. Une primitive de f sur $[1,3]$ est donc $t\mapsto \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)$, et :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(\ln 10-\ln 2) \\ &= \frac{1}{2}\ln 5. \end{aligned}$$

Conclusion. f est décroissante sur $[1,3]$ et $I=\dfrac{1}{2}\ln 5$.

2.

Calculer S_2 et T_2. En déduire que $\dfrac{7}{5} \leq \ln 5 \leq \dfrac{9}{5}$.

INDICE

Le pas vaut 1 et les points sont 1, 2 et 3. Comme f est décroissante, F06 donne $T_2 \leq I \leq S_2$.

CORRIGÉ

Les deux sommes. Le pas est $h = \dfrac{3-1}{2} = 1$, avec $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_2 &= f(1) + f(2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}, \\ T_2 &= f(2) + f(3) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Encadrement. La fonction f est continue et décroissante sur $[1, 3]$. D'après F06 (encadrement d'une intégrale par les rectangles), $T_2 \leq I \leq S_2$, soit :

$$\frac{7}{10} \leq \frac{1}{2}\ln 5 \leq \frac{9}{10}.$$

Conclusion. En multipliant par 2 : $\dfrac{7}{5} \leq \ln 5 \leq \dfrac{9}{5}$.

3.

Pour $n = 4$, on admet que $0{,}853 < S_4 < 0{,}854$. Calculer l'écart $S_4 - T_4$ à l'aide de F06, en déduire un encadrement de T_4, puis un encadrement décimal de $\ln 5$.

INDICE

L'écart vaut $\dfrac{(3-1)\big(f(1) - f(3)\big)}{4}$. Encadre ensuite T_4, puis multiplie l'encadrement de F06 par 2.

CORRIGÉ

L'écart. La fonction f est continue et décroissante sur $[1, 3]$. D'après F06 (encadrement d'une intégrale par les rectangles) :

$$\begin{aligned} & S_4 - T_4 \\ &= \frac{(3-1)\big(f(1) - f(3)\big)}{4} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right)}{4} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Encadrement de T_4. Donc $T_4 = S_4 - 0{,}1$, et $0{,}753 < T_4 < 0{,}754$.

Encadrement de $\ln 5$. D'après F06, $T_4 \leq \dfrac{1}{2}\ln 5 \leq S_4$. Donc :

$$0{,}753 < \frac{1}{2}\ln 5 < 0{,}854.$$

Conclusion. $S_4 - T_4 = \dfrac{1}{10}$, $0{,}753 < T_4 < 0{,}754$, et $1{,}506 < \ln 5 < 1{,}708$. L'amplitude passe de $0{,}4$ à $0{,}202$.

Exercice 9

Une suite d'intégrales décroissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1.

Calculer I_0.

INDICE

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1,2]$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$.

CORRIGÉ

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1,2]$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$. Donc :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_0 = \dfrac{1}{2}$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

INDICE

Sur $[1,2]$, $\ln t \geq 0$. Les bornes 1 et 2 sont dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1,2]$. Par croissance de $\ln$, $\ln t \geq \ln 1 = 0$, donc $(\ln t)^n \geq 0$ et $\dfrac{(\ln t)^n}{t^2} \geq 0$.

L'intégrande est continue sur $[1,2]$ et $1 < 2$: par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

3.

Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

INDICE

Compare $(\ln t)^{n+1}$ et $(\ln t)^n$: pour $t \in [1,2]$, $0 \leq \ln t \leq \ln 2$, et $\ln 2 < 1$ car $2 < e$.

CORRIGÉ

Comparer les intégrandes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1,2]$. Par croissance de $\ln$:

$$0 \leq \ln t \leq \ln 2 < \ln e = 1.$$

Donc $(\ln t)^{n+1} = (\ln t)^n \times \ln t \leq (\ln t)^n$. En divisant par $t^2 > 0$:

$$\frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2} \leq \frac{(\ln t)^n}{t^2}.$$

Intégrer. Les intégrandes sont continues sur $[1,2]$ et $1 < 2$. Par l'ordre de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$ (F10, signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales).

Conclusion. La suite (I_n) est décroissante.

4.

En déduire que (I_n) converge, et que sa limite appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

INDICE

Une suite décroissante et minorée converge. Pour situer la limite, utilise $0 \leq I_n \leq I_0$.

CORRIGÉ

Convergence. La suite (I_n) est décroissante (question 3) et minorée par 0 (question 2). Elle converge donc (F10, signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales). Soit ℓ sa limite.

Position de la limite. Comme la suite est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq I_n \leq I_0 = \frac{1}{2}.$$

Par passage à la limite dans ces inégalités, $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion. (I_n) converge, et sa limite appartient à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 10

Une limite par encadrement de l'intégrande

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{4-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1.

Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

INDICE

Encadre d'abord $4-t^2$ pour $t \in [0,1]$. Applique ensuite la racine carrée, puis l'inverse, en surveillant le sens.

CORRIGÉ

Soit $t \in [0,1]$. Alors $0 \leq t^2 \leq 1$, donc $3 \leq 4-t^2 \leq 4$.

Racine carrée. Elle est croissante sur $[0,+\infty[$: $\sqrt{3} \leq \sqrt{4-t^2} \leq 2$.

Inverse. La fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, ce qui renverse le sens.

Conclusion. Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}\,(n+1)}$.

INDICE

Multiplie l'encadrement par $t^n \geq 0$, puis intègre de 0 à 1, avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

CORRIGÉ

Encadrer l'intégrande. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. Comme $t^n \geq 0$, on multiplie l'encadrement de 1. par t^n :

$$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{\sqrt{4-t^2}} \leq \frac{t^n}{\sqrt{3}}.$$

Intégrer. Ces trois fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$. Par l'ordre de l'intégrale, avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{3}\,(n+1)}.$$

Conclusion. L'encadrement demandé vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

INDICE

Les deux bornes de l'encadrement ont la même limite.

CORRIGÉ

Les suites $\left(\dfrac{1}{2(n+1)}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}\,(n+1)}\right)$ tendent vers 0. D'après l'encadrement de 2. et le théorème des gendarmes, (J_n) converge vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

On retrouve F11 (limite de $\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$), avec $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, continue sur $[0,1]$. Dire « t^n tend vers 0, donc J_n aussi » ne serait pas une preuve (W06 : pas de limite sous l'intégrale sans encadrement).