BURHAN

# Fonctions et suites définies par une intégrale

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

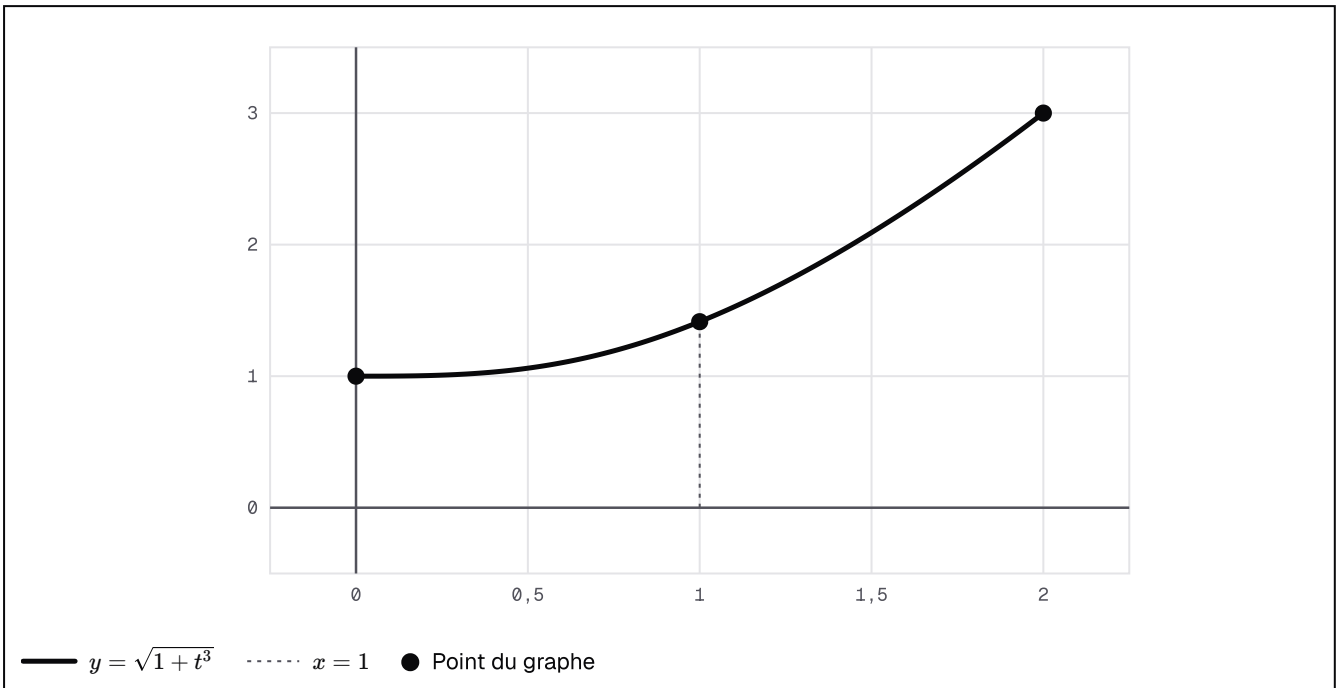
Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/integrales-fonctions-et-suites/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Fonctions et suites définies par une intégrale | Semestre 2 |

## Une fonction connue par sa dérivée

La figure montre la courbe de $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ sur $[0, 2]$. Pour $x > 0$, regarde la région sous la courbe, entre les abscisses $0$ et $x$ ; le trait vertical la ferme en $x = 1$. Son aire est $A(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Aucune règle de primitive que tu connais ne s'applique à cette racine. Tu ne peux donc pas calculer $A(x)$. Pourtant, cette aire dépend de $x$ : c'est une **fonction** de $x$. Que peut-on en dire sans formule ?




**La courbe de t ↦ √(1 + t³) sur [0, 2]. Le trait vertical, en x = 1, ferme la région sous la courbe dont l'aire est A(1).**

**Devine : Une bande très fine**

Quand $x$ augmente d'un petit nombre $\delta > 0$, l'aire gagne une bande de largeur $\delta$. Sa hauteur est proche de $\sqrt{1+x^3}$. D'après toi, que vaut $A'(x)$ ?

**A.** $0$, car $A$ n'a pas de formule.

**Faux.**
Une fonction sans formule peut avoir une dérivée. Ici l'aire augmente avec $x$ : sa dérivée n'est pas nulle.

**B.** $\sqrt{1+x^3}$, la hauteur de la bande.

**Juste.**

Juste : l'aire gagnée est proche de $\delta\sqrt{1+x^3}$, donc le taux d'accroissement s'approche de $\sqrt{1+x^3}$.

**C.** $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$, la dérivée de la racine.

**Faux.**

C'est la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1+x^3}$, pas celle de l'aire sous sa courbe.

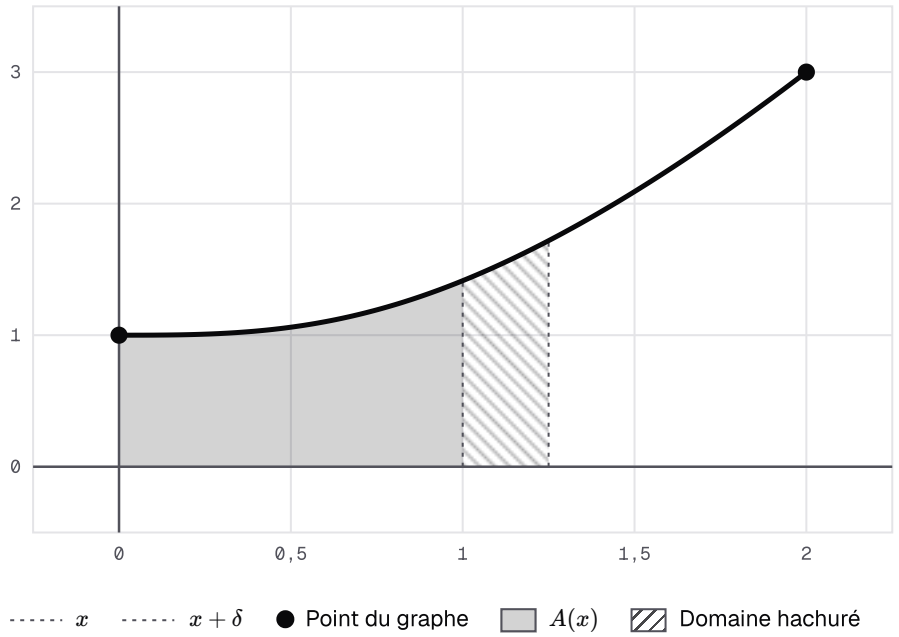
**D.** $\delta$, la largeur de la bande.

**Faux.**

$\delta$ est un accroissement de $x$ ; la dérivée est la limite du quotient de l'aire gagnée par $\delta$.

**Correction**

L'aire gagnée entre $x$ et $x+\delta$ est proche de celle d'un rectangle de largeur $\delta$ et de hauteur $\sqrt{1+x^3}$. Le quotient de l'aire gagnée par $\delta$ s'approche donc de $\sqrt{1+x^3}$. On devine $A'(x) = \sqrt{1+x^3}$ : la dérivée de l'aire est la hauteur de la courbe. Ce chapitre le démontre.




**Quand x passe de 1 à 1 + δ, ici avec δ = 1/4, l'aire A(x) teintée gagne la bande hachurée. Cette bande est presque un rectangle de largeur δ et de hauteur √(1 + x³).**

Dans ce chapitre, tu vas **démontrer** cette intuition : une fonction définie par une intégrale se dérive, même sans formule. Tu sauras l'étudier comme toute fonction : domaine, parité, variations, limites.

Tu approcheras aussi une aire par des rectangles, puis tu calculeras des limites de sommes. Enfin, tu étudieras des suites dont chaque terme est une intégrale.

Chaque résultat nouveau se démontre avec les outils des chapitres précédents, dont deux résultats admis là-bas : l'existence des primitives et l'image d'un segment. Une seule étape reste hors programme ; elle est signalée le moment venu.

## Ce que tu sais déjà de l'intégrale

## Les outils du calcul intégral

**Petit rappel.** Soit $f$ continue sur un intervalle $I$, $G$ une primitive de $f$ sur $I$, et $a$, $b$ deux réels de $I$. Alors, que $a$ soit inférieur ou supérieur à $b$ :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a).$$

On en tire la relation de **Chasles** : pour $a$, $b$, $c$ dans $I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale est aussi **linéaire** : celle d'une somme est la somme des intégrales, et un facteur constant sort de l'intégrale.

**Vérifie : Un calcul de rodage**

Que vaut $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t$ ?

**A.** $4$

**Faux.**
Tu as compté $G(-1) = 0$ ; or $(-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$.

**B.** $-6$

**Faux.**
Tu as calculé $G(-1) - G(2)$ : l'ordre est $G(2) - G(-1)$.

**C.** $6$

**Juste.**
Juste : $G(2) - G(-1) = 4 - (-2) = 6$.

**D.** $3$

**Faux.**
Une primitive de $t \mapsto 2t$ est $t \mapsto t^2$, pas $t \mapsto 2t$.

**Correction**
Une primitive de $t \mapsto 3t^2 - 2t$ sur $\mathbb{R}$ est $G : t \mapsto t^3 - t^2$. Donc l'intégrale vaut $G(2) - G(-1) = (8 - 4) - (-1 - 1) = 4 + 2 = 6$.

**Positivité et ordre.** Soit $a \leq b$, et $f$, $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$.

- Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
- Si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour une constante $c$, $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}t = c(b-a)$.

Ces trois règles servent dans tout le chapitre. Les deux premières exigent $a \leq b$.

## Le sens des bornes

**Attention : bornes dans l'ordre croissant**

✗ « $t^2 \geq 0$ pour tout $t$, donc $\displaystyle\int_0^{-2} t^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ ».

✓ Les bornes $0$ et $-2$ sont dans l'ordre décroissant. On écrit $\displaystyle\int_0^{-2} t^2\,\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{0} t^2\,\mathrm{d}t$, et cette dernière intégrale est positive. L'intégrale de départ est donc négative : elle vaut $-\dfrac{8}{3}$. Pour $x < a$, l'intégrale de $a$ à $x$ change le sens de toute inégalité intégrée.

**Vérifie : Un signe à justifier**

Soit $x < 0$. Quel est le signe de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ ?

**A.** Strictement négatif, car les bornes sont dans l'ordre décroissant.

**Juste.**

Juste : on retourne les bornes, et l'intégrale sur $[x, 0]$ est strictement positive.

**B.** Positif, car $e^{t^2} > 0$ pour tout réel $t$.

**Faux.**

L'intégrande est positive, mais les bornes $0$ et $x$ sont dans l'ordre décroissant.

**C.** Nul, car on ne sait pas calculer cette intégrale.

**Faux.**

Ne pas savoir la calculer n'empêche pas d'en connaître le signe.

**D.** Cela dépend de la valeur de $x$.

**Faux.**

Pour tout $x < 0$, le même raisonnement donne le même signe.

**Correction**

On retourne les bornes : $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t$, $e^{t^2} \geq 1$. Comme $x < 0$, l'ordre de l'intégrale donne $\displaystyle\int_x^0 e^{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^0 1\,\mathrm{d}t = -x > 0$. Donc l'intégrale de départ est strictement négative.

**Exemple : un signe sans calcul**

**Énoncé.** Montre que $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$.

**Preuve.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $[1,3]$. Pour tout $t \in [1,3]$, $\ln t \geq 0$ et $1+t^2 > 0$ : l'intégrande est positive. Comme $1 < 3$, la positivité de l'intégrale donne le résultat.

**À noter.** On n'a cherché aucune primitive : le signe de l'intégrande et l'ordre des bornes suffisent.

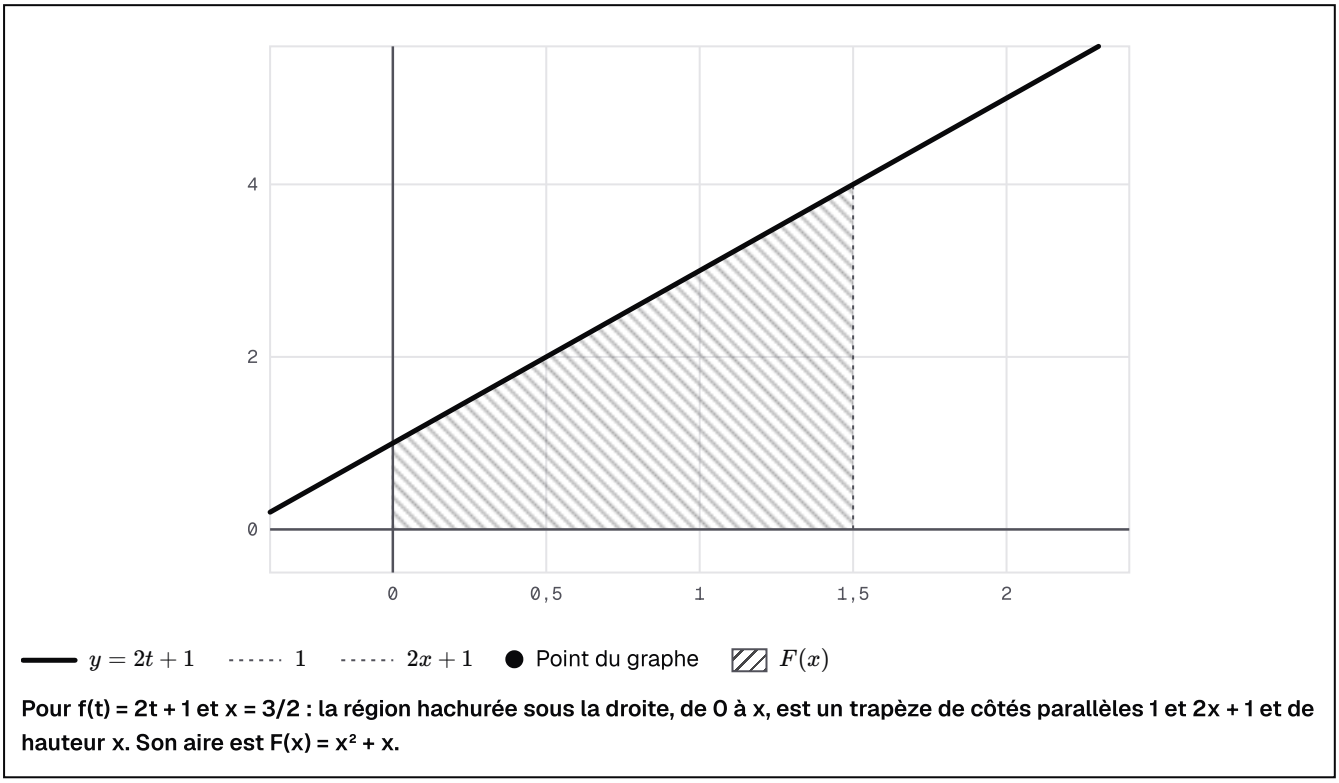
## Une intégrale de borne variable

### Une aire qui avance

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t + 1$, et soit $x > 0$. La région sous sa courbe entre $0$ et $x$ est un trapèze. Ses côtés parallèles mesurent $f(0) = 1$ et $2x + 1$, la valeur de $f$ en $x$ ; sa hauteur vaut $x$. Son aire vaut donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (2t+1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1 + (2x+1)}{2} \times x \\ &= x^2 + x. \end{aligned}$$

Le calcul par une primitive donne le même résultat : $\big[t^2 + t\big]_0^x = x^2 + x$.




**Pour f(t) = 2t + 1 et x = 3/2 : la région hachurée sous la droite, de 0 à x, est un trapèze de côtés parallèles 1 et 2x + 1 et de hauteur x. Son aire est F(x) = x² + x.**

**Devine : Ce que fait la dérivée**

Avec $F(x) = x^2 + x$ et $f(t) = 2t + 1$, que remarques-tu en dérivant $F$ ?

**A.** $F'(x) = 2$, la pente de la droite.

**Faux.**

2 est la dérivée de $f$, pas celle de $F$ : $F'(x) = 2x + 1$.

**B.** $F'(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$.

**Juste.**

Juste : $F'(x) = 2x + 1 = f(x)$.

**C.** $F' = F$ sur $]0, +\infty[$.

**Faux.**

$F'(1) = 3$ alors que $F(1) = 2$.

**D.** $F'(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x > 0$.

**Faux.**

$f(x) - f(0) = 2x$, alors que $F'(x) = 2x + 1$.

**Correction**

$F'(x) = 2x + 1 = f(x)$ : la dérivée de l'aire est la hauteur de la courbe au point $x$. De plus $F(0) = 0$ . La suite de la section montre que c'est vrai pour toute fonction continue sur un intervalle.

## La définition

**Définition : Fonction définie par une intégrale**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$. Pour tout $x \in I$, $f$ est continue sur le segment d'extrémités $a$ et $x$ : l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

On appelle **fonction définie par une intégrale**, de borne fixe $a$, la fonction $F$ définie sur $I$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La variable d'intégration $t$ est muette : $F(x)$ dépend de $a$ et de $x$, jamais de $t$.

**En clair.** On fixe une borne $a$ dans l'intervalle $I$ où $f$ est continue ; l'autre borne $x$ parcourt $I$. Pour chaque $x$, l'intégrale existe : $f$ est continue entre $a$ et $x$. On obtient un nombre $F(x)$, donc une fonction de $x$. On a toujours $F(a) = 0$. Si $x < a$, les bornes sont dans l'ordre décroissant : $F(x) = -\displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Vérifie : Une lettre muette**

Laquelle de ces écritures définit la même fonction que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ ?

**A.** $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

**Faux.**
La lettre $x$ y est à la fois borne et variable : l'écriture n'a pas de sens.

**B.** $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
**Faux.**
Échanger les bornes change le signe : c'est la fonction opposée.

**C.** $t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
**Faux.**
Ici $t$ est à la fois la variable de la fonction et celle de l'intégration.

**D.** $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2}$
**Juste.**
Juste : changer le nom de la variable d'intégration ne change rien.

**Correction**
Dans $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, la lettre $t$ est muette : elle disparaît du résultat, qui ne dépend que de $x$. On peut donc la remplacer par $s$. En revanche, la borne $x$ doit rester une lettre différente de la variable d'intégration.

**Attention : la variable d'intégration est muette**

✗ « $F(x) = \displaystyle\int_0^x x^2 \,\mathrm{d}x$ ».

✓ $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$.

Dans l'écriture fausse, la lettre $x$ joue deux rôles : borne et variable d'intégration. La variable $t$ ne survit pas au calcul. La borne $x$, elle, reste dans le résultat.

## Dériver sans formule

Dans l'exemple du trapèze, $F' = f$ et $F(0) = 0$. **Pourquoi est-ce vrai** pour toute fonction continue ? On ne sait pas toujours calculer $F$. Mais $f$ a une primitive $G$ sur $I$, même sans formule connue. On écrit $F$ avec $G$, puis on dérive.

**Théorème : Dérivée de x ↦ ∫ₐˣ f(t) dt**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$.

En particulier, $F$ est dérivable sur $I$ et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

**Démonstration**

**Étape 1.** La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$ : elle y admet une primitive $G$ (existence admise au chapitre des primitives). Par définition de l'intégrale, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) - G(a)$.

**Étape 2.** La fonction $G$ est dérivable sur $I$ et $G' = f$ ; $G(a)$ est une constante. Donc $F$ est dérivable sur $I$ et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = G'(x) = f(x)$ : $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.

**Étape 3.** De plus $F(a) = G(a) - G(a) = 0$. Comme $I$ est un **intervalle**, une seule primitive de $f$ sur $I$ s'annule en $a$ (primitive prenant une valeur donnée en un point) : c'est $F$.

**Remarque : ce que ce théorème ne démontre pas**

L'existence d'une primitive $G$ de $f$ sur $I$ est le théorème admis au chapitre des primitives. Le théorème ci-dessus ne la démontre pas : il s'en sert. Il apprend que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$. Il en donne ainsi une écriture, même quand on ne connaît aucune formule pour elle.

**Vérifie : L'argument de l'étape 3**

À l'étape 3 de la preuve, pourquoi faut-il que $I$ soit un **intervalle** ?

**A.** Pour pouvoir dériver $G$ en chaque point de $I$.

**Faux.**

La dérivabilité de $G$ vient de sa définition de primitive, en chaque point.

**B.** Pour que l'intégrale de $a$ à $x$ soit positive.

**Faux.**

Le signe de l'intégrale ne sert nulle part dans cette preuve.

**C.** Pour qu'une seule primitive de $f$ s'annule en $a$.

**Juste.**

Juste : sur un intervalle, deux primitives de $f$ diffèrent d'une constante.

**D.** Pour que $f$ soit continue au point $a$.

**Faux.**

La continuité de $f$ sur $I$ est une hypothèse ; elle ne dépend pas de la forme de $I$.

**Correction**

Sur un intervalle, deux primitives de $f$ diffèrent d'une constante. Si deux primitives s'annulent en $a$, cette constante est nulle : elles sont égales. Sur une réunion de deux intervalles disjoints, deux primitives peuvent différer de constantes distinctes sur chaque morceau.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On n'a jamais calculé $F$. On l'a écrite $F(x) = G(x) - G(a)$, avec une primitive $G$ dont on sait seulement qu'elle existe. Le reste vient de deux faits connus : une constante a une dérivée nulle, et une seule primitive prend une valeur donnée en un point d'un intervalle. Retiens le geste : **une intégrale de borne variable se dérive comme une primitive**.

## Deux fonctions connues

**Exemple : ln et arctan écrites comme des intégrales**

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qui contient $1$. Par le théorème, $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est sa primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $1$. C'est $\ln$ : pour tout $x > 0$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

De même, $\arctan$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, et $\arctan 0 = 0$. Donc, pour tout réel $x$, $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

**L'intervalle compte.** Pour $x < 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ n'a aucun sens : le segment $[x, 1]$ contient $0$.

**À toi : Rédige une étude de signe**

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Rédige la preuve de : $F$ est définie et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, et $F(x) < 0$ pour $1 < x < 2$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Cherche un intervalle contenant $2$ sur lequel $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue.

**Indice 2**

Applique le théorème de dérivation : $F'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, puis étudie son signe sur $]1, +\infty[$.

**Indice 3**

Point délicat : que sait-on de $F(x)$ pour $1 < x < 2$, quand $F$ est croissante et que $F(2) = 0$ ?

**Réponse**

« La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$, car $\ln t > 0$ pour $t > 1$. Cet intervalle contient $2$. Donc $F$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x > 1$, $F'(x) = \dfrac{1}{\ln x} > 0$. Ainsi $F$ est strictement croissante sur cet intervalle.

Soit $x$ tel que $1 < x < 2$. Par stricte croissance, $F(x) < F(2) = 0$. »

## Quand la borne est une fonction

## Une borne qui bouge

Prends $f(t) = 3t^2$ et la borne $u : x \mapsto x^2$. Alors

$$\int_0^{x^2} 3t^2 \,\mathrm{d}t = \left[t^3\right]_0^{x^2} = x^6.$$

La dérivée de $x \mapsto x^6$ est $x \mapsto 6x^5$. Or $6x^5 = 2x \times 3(x^2)^2$ : c'est $u'(x) \times f\big(u(x)\big)$. La dérivée de la borne apparaît en facteur, comme dans la dérivée d'une composée.

**Devine : Une autre borne variable**

D'après toi, quelle est la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ ?

**A.** $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^6}$

**Faux.**

Il manque la dérivée de la borne, $x \mapsto 3x^2$.

**B.** $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

**Faux.**

C'est la valeur de l'intégrande en $x$ ; la borne est $x^3$, pas $x$.

**C.** $x \mapsto \dfrac{3x^2}{1+x^2}$

**Faux.**

L'intégrande s'évalue en la borne $x^3$, ce qui donne $1+x^6$.

**D.** $x \mapsto \dfrac{3x^2}{1+x^6}$

**Juste.**

Juste : c'est $u'(x)\, f\big(u(x)\big)$, avec $u : x \mapsto x^3$.

**Correction**

Ici $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $u : x \mapsto x^3$. Comme dans l'exemple, la dérivée vaut $u'(x)\, f\big(u(x)\big) = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$. On peut le vérifier : la fonction vaut $\arctan(x^3)$, de dérivée $\dfrac{3x^2}{1+(x^3)^2}$.

**Pourquoi est-ce vrai ?** On ne dérive pas directement une intégrale dont la borne est $u(x)$. On fixe d'abord une borne $a$, puis on découpe l'intégrale par la relation de Chasles. Il reste la composée de $F$ : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $u$. Or on sait dériver $F$, et on sait dériver une composée.

## Le théorème

**Théorème : Dérivée de x ↦ ∫ de v(x) à u(x) de f(t) dt**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et $u, v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $J$, à valeurs dans $I$. La fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $J$ et, pour tout $x \in J$ :

$$H'(x) = u'(x)\, f\big(u(x)\big) - v'(x)\, f\big(v(x)\big).$$

En particulier, pour $a \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $J$, de dérivée $x \mapsto u'(x)\,f\big(u(x)\big)$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $a \in I$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, définie sur $I$. Pour tout $x \in J$, $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à $I$ ; la relation de Chasles donne $H(x) = F\big(u(x)\big) - F\big(v(x)\big)$.

**Étape 2.** La fonction $u$ est dérivable sur $J$, à valeurs dans $I$, et $F$ est dérivable sur $I$, de dérivée $f$ (F02). Par la dérivée d'une composée, $F \circ u$ est dérivable sur $J$ et $(F \circ u)'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big)$. De même, $(F \circ v)'(x) = v'(x)\,f\big(v(x)\big)$.

**Étape 3.** Par différence, $H$ est dérivable sur $J$ et vérifie la formule annoncée. Le cas particulier est celui où $v$ est constante égale à $a$, donc $v' = 0$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Trois gestes. On **fixe une borne** $a$ dans $I$. La relation de **Chasles** transforme $H(x)$ en $F\big(u(x)\big) - F\big(v(x)\big)$. La **dérivée d'une composée** fait le reste. Chaque $u(x)$ et chaque $v(x)$ doit appartenir à $I$ : sinon $F\big(u(x)\big)$ n'a pas de sens.

**Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?**

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « $u$ et $v$ sont à valeurs dans $I$ » ?

**A.** À donner un sens à $F\big(u(x)\big)$ et à la dériver.

**Juste.**

Juste : $F$ n'est définie que sur $I$, et la dérivée d'une composée exige $u(x) \in I$.

**B.** À rendre $u$ et $v$ dérivables sur $J$.

**Faux.**

La dérivabilité de $u$ et $v$ est une autre hypothèse ; « à valeurs dans $I$ » porte sur leurs valeurs.

**C.** À rendre $H(x)$ positif pour tout $x \in J$.

**Faux.**

Le signe de $H(x)$ ne joue aucun rôle dans la preuve.

**D.** À garantir $v(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in J$.

**Faux.**

Aucun ordre des bornes n'est exigé : la relation de Chasles vaut dans tous les cas.

**Correction**

$F$ est définie et dérivable sur $I$ seulement. Pour écrire $F\big(u(x)\big)$, il faut $u(x) \in I$. Pour dériver $F \circ u$ en $x$, la dérivée d'une composée demande aussi $u(x) \in I$. Même chose pour $v$.

**Exemple : les valeurs de la borne fixent le domaine**

Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}$, continue sur $I = ]0, +\infty[$.

- Avec $u : x \mapsto x^2 + 1$ : $u(x) \geq 1$, donc $u(x) \in I$ pour tout réel $x$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.
- Avec $u : x \mapsto x^2 - 1$ : $u(0) = -1$ n'est pas dans $I$. L'intégrale de $1$ à $-1$ traverse $0$, où $f$ n'est pas définie : elle n'existe pas.

Avant d'appliquer le théorème, on vérifie donc où la borne prend ses valeurs.

## La méthode

**Méthode : dériver une intégrale à bornes variables**

1. **Identifier** l'intégrande $f$ et un intervalle $I$ où elle est continue.
2. **Vérifier** que $u$ et $v$ sont dérivables sur l'intervalle $J$ étudié, et que $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à $I$ pour tout $x \in J$.
3. **Dériver** : $H'(x) = u'(x)\, f\big(u(x)\big) - v'(x)\, f\big(v(x)\big)$.
4. **Simplifier**, puis étudier le signe de $H'(x)$ si l'on cherche les variations.

**Rédaction attendue.** « La fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$. Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $J$, à valeurs dans $I$. Donc $H$ est dérivable sur $J$ et, pour tout $x \in J$, $H'(x) = \dots$ »

**Exemple : Exemple guidé : deux bornes variables**

**Énoncé.** Soit $H(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. Montre que $H$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

**Hypothèses.** $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $I = ]0, +\infty[$. Les fonctions $u : x \mapsto 3x$ et $v : x \mapsto x$ sont dérivables sur $J = ]0, +\infty[$, à valeurs dans $I$.

**Dériver.** D'après la dérivation à bornes variables, $H$ est dérivable sur $J$ et, pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned} H'(x) &= 3 \times \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \times \frac{e^x}{x} \\ &= \frac{e^{3x} - e^x}{x}. \end{aligned}$$

**Signe.** Soit $x > 0$. Alors $3x > x$, donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de l'exponentielle, et $H'(x) > 0$.

**Conclusion.** $H$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

**Attention : la dérivée de la borne**

✗ « La dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto e^x$ ».

✓ Avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0, +\infty[$, la dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}$.

L'intégrande s'évalue en $u(x)$, puis on multiplie par $u'(x)$. Oublier ce facteur, c'est oublier la dérivée d'une composée.

## À toi

**Trouve l'erreur : Une borne du bas variable**

Soit $H(x) = \displaystyle\int_x^2 e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle est l'expression juste de $H'(x)$ ?

**A.** $e^{x^2}$

**Faux.**
La borne variable est en bas : elle apporte le signe $-$.

**B.** $-2x\,e^{x^2}$

**Faux.**
Tu as dérivé $t \mapsto e^{t^2}$ ; or la borne du bas est $x$, de dérivée $1$.

**C.** $-e^{x^2}$

**Juste.**
Juste : $H(x) = -\displaystyle\int_2^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

**D.** $e^4 - e^{x^2}$

**Faux.**
Tu as remplacé $t$ par les bornes, comme pour une primitive ; or $t \mapsto e^{t^2}$ est l'intégrande, pas une primitive.

**Correction**

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $H(x) = -\displaystyle\int_2^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_2^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $x \mapsto e^{x^2}$. Donc $H'(x) = -e^{x^2}$ pour tout réel $x$.

**À toi : Rédige une dérivée**

Soit $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ pour $x > 1$. Rédige la preuve de : $H$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $H'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Trouve un intervalle $I$ où $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue, et vérifie que $x$ et $x^2$ y sont pour $x > 1$.

**Indice 2**

Applique la formule avec $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x$.

**Indice 3**

Point délicat : simplifie $\ln(x^2) = 2\ln x$, valable car $x > 0$.

**Réponse**

« La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $I = ]1, +\infty[$. Les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x$ sont dérivables sur $J = ]1, +\infty[$. Pour $x > 1$, $x^2 > 1$ : elles sont à valeurs dans $I$.

D'après la dérivation à bornes variables, $H$ est dérivable sur $J$ et, pour tout $x > 1$ :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{x-1}{\ln x}. \end{aligned}$$

Ce quotient est strictement positif sur $J$. »

## Étudier une fonction définie par une intégrale

## Le domaine se lit sur l'intégrande

**Vérifie : Un domaine à trouver**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 4}$. Sur quel ensemble $F$ est-elle définie ?

**A.** $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

**Faux.**

Pour $x = 0$, le segment $[0, 3]$ contient $2$, où l'intégrande n'est pas définie.

**B.** $[3, +\infty[$

**Faux.**

Pour $x = \dfrac{5}{2}$, le segment $\left[\dfrac{5}{2}, 3\right]$ ne contient ni $-2$ ni $2$ : $F\left(\dfrac{5}{2}\right)$ existe.

**C.** $\mathbb{R}$

**Faux.**

L'intégrande n'est définie ni en $-2$ ni en $2$.

**D.** $]2, +\infty[$

**Juste.**

Juste : c'est l'intervalle de continuité de l'intégrande qui contient $3$.

**Correction**

L'intégrande $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-4}$ est continue sur $]-\infty,-2[$, sur $]-2,2[$ et sur $]2,+\infty[$. La borne fixe $3$ appartient à $]2,+\infty[$. Pour $x>2$, le segment d'extrémités $3$ et $x$ reste dans $]2,+\infty[$ : $F(x)$ existe. Pour $x \leq 2$, ce segment contient $2$ : l'intégrale n'existe pas. Donc $F$ est définie sur $]2,+\infty[$.

**Méthode : étudier une fonction définie par une intégrale**

1. **Domaine** : trouver l'intervalle $I$ de continuité de l'intégrande qui contient la borne fixe ; avec une borne $u(x)$, exiger $u(x) \in I$.
2. **Symétries** : si $I$ est symétrique et si la borne fixe vaut $0$, la parité de l'intégrande donne celle de $F$.
3. **Variations** : dériver par le théorème de dérivation, puis étudier le signe.
4. **Signe et limites** : encadrer l'intégrande, intégrer avec des bornes dans l'ordre croissant, puis conclure par comparaison.

**Rédaction attendue.** « L'intégrande est continue sur l'intervalle $I$, qui contient $a$. Donc $F$ est définie et dérivable sur $I$, et $F'(x) = \ldots$ pour tout $x \in I$. »

**Attention : pas d'intégrale à travers un point interdit**

✗ « $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ».

✓ Pour $x \geq 1$, le segment $[0,x]$ contient $1$, où l'intégrande n'est pas définie : l'intégrale n'existe pas. La fonction est définie sur $]-\infty,1[$ seulement : c'est l'intervalle de continuité qui contient $0$. Exclure un point ne suffit pas ; on exclut tout ce qui est au-delà.

## Parité

Avec $f(t)=t^2$, paire, on obtient $\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$ : une fonction impaire. Par symétrie de la courbe, l'aire de $0$ à $x$ et celle de $-x$ à $0$ sont égales. Mais l'intégrale de $0$ à $-x$ a ses bornes dans l'ordre inverse : elle change de signe. **Pourquoi est-ce vrai** en général ? Sans calculer $F$, la preuve compare les dérivées de $F(x)$ et de $F(-x)$.

**Propriété : Parité d'une fonction définie par une intégrale**

Soit $I$ un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$. Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, définie sur $I$.

- Si $f$ est paire, alors $F$ est impaire.
- Si $f$ est impaire, alors $F$ est paire.

**Démonstration**

**Étape 1.** Pour $x \in I$, $x$ et $-x$ appartiennent à l'intervalle $I$, donc $0 \in I$ et $F$ est bien définie. D'après F02, $F$ est dérivable sur $I$ et $F' = f$. Comme $x \mapsto -x$ est dérivable sur $I$, à valeurs dans $I$, la dérivée d'une composée donne : $x \mapsto F(-x)$ est dérivable sur $I$, de dérivée $x \mapsto -f(-x)$.

**Étape 2.** Si $f$ est paire, on pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$ pour $x \in I$. Alors $\varphi'(x) = f(x) - f(-x) = 0$. Comme $I$ est un intervalle, $\varphi$ y est constante, égale à $\varphi(0) = 2F(0) = 0$. Donc $F(-x) = -F(x)$ : $F$ est impaire.

**Étape 3.** Si $f$ est impaire, on pose $\psi(x) = F(x) - F(-x)$. Alors $\psi'(x) = f(x) + f(-x) = 0$, donc $\psi$ est constante sur $I$, égale à $\psi(0) = 0$. Donc $F(-x) = F(x)$ : $F$ est paire.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve ne calcule aucune intégrale. Elle fabrique une **fonction auxiliaire**, $\varphi$ ou $\psi$, de dérivée nulle sur l'**intervalle** $I$. Cette fonction est donc constante, et sa valeur en $0$ donne la constante. La borne fixe $0$ sert à cet endroit : elle garantit $F(0) = 0$.

**Vérifie : L'argument de l'étape 2**

À l'étape 2 de la preuve, pourquoi la fonction auxiliaire $\varphi$ est-elle constante sur $I$ ?

**A.** Parce que $f$ est paire sur l'intervalle $I$.

**Faux.**

La parité de $f$ donne $\varphi' = 0$ ; il faut encore passer d'une dérivée nulle à une constante.

**B.** Parce que $\varphi(0) = 2F(0) = 0$.

**Faux.**

Cette valeur fixe la constante ; elle ne montre pas que la fonction est constante.

**C.** Parce que $F$ est continue sur l'intervalle $I$.

**Faux.**

Une fonction continue n'est pas constante pour autant.

**D.** Parce que sa dérivée est nulle sur l'intervalle $I$.

**Juste.**

Juste : sur un **intervalle**, toute fonction dont la dérivée s'annule partout est constante.

**Correction**

À l'étape 2, $\varphi'(x) = f(x) - f(-x) = 0$ pour tout $x \in I$. Sur un **intervalle**, une fonction dont la dérivée s'annule partout est constante. La valeur $\varphi(0) = 2F(0) = 0$ donne ensuite la constante. Sur une réunion de deux intervalles disjoints, une dérivée nulle ne suffirait pas.

**Exemple : Contre-exemple : la borne fixe doit valoir 0**

La fonction $t \mapsto t^2$ est paire. Pourtant $G(x) = \displaystyle\int_1^x t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{x^3 - 1}{3}$ n'est pas impaire : $G(-1) = -\frac{2}{3}$, alors que $-G(1) = 0$. La preuve utilise $F(0) = 0$. Avec la borne fixe $1$, on a $G(0) = -\frac{1}{3} \neq 0$, et l'argument tombe.

## Une étude complète

**Vérifie : Une parité à vérifier**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la parité de $F$ ?

**A.** $F$ est paire.

**Juste.**

Juste : l'intégrande est impaire et la borne fixe vaut $0$.

**B.** $F$ est impaire.

**Faux.**

C'est le cas d'une intégrande paire ; ici, l'intégrande change de signe avec $t$.

**C.** $F$ n'est ni paire ni impaire.

**Faux.**

L'intervalle $\mathbb{R}$ est symétrique et la borne fixe vaut $0$ : la propriété s'applique.

**D.** $F$ est nulle, car l'intégrande est impaire.

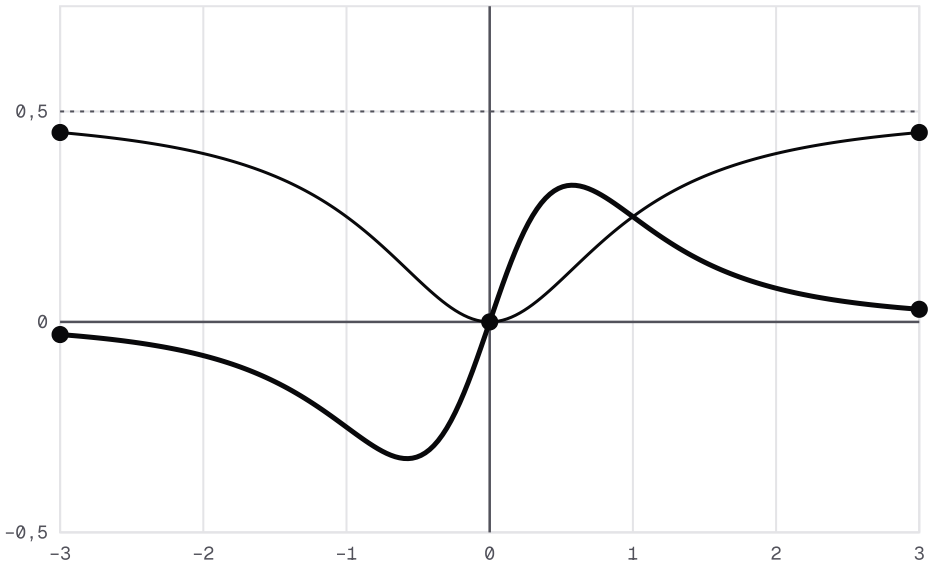
**Faux.**

$F(1) = \frac{1}{4} \neq 0$ : l'intégrande est positive sur $[0, 1]$.

**Correction**

L'intégrande $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, intervalle symétrique. La borne fixe est $0$.

Donc $F$ est paire. Ici, on peut même la calculer : $F(x) = \dfrac{x^2}{2(1+x^2)}$, qui est bien paire.




**On reprend la fonction de l'activité précédente. La fonction f : t ↦ t/(1 + t²)², impaire, et la fonction F : x ↦ ∫₀ˣ f(t) dt = x²/(2(1 + x²)), paire, qui s'approche de 1/2 des deux côtés.**

Exemple **: Exemple guidé : une étude sans primitive explicite**

**Énoncé.** Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{4+t^4}\,\mathrm{d}t$. Étudie $F$ sur $\mathbb{R}$.

**Domaine et parité.** L'intégrande est continue et paire sur $\mathbb{R}$, et la borne fixe vaut $0$. Donc $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

**Variations.** $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $F'(x) = \sqrt{4+x^4} > 0$ : $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Limites.** Pour tout réel $t$, $\sqrt{4+t^4} \geq 2$. Soit $x \geq 0$ : comme $0 \leq x$, on intègre et $F(x) \geq 2x$ (la section suivante détaille ce geste). Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Par imparité, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

Variations de F : x ↦ ∫₀ˣ √(4 + t⁴) dt, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de −∞ à +∞, avec F(0) = 0.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | + | | + | |
| $F(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## À toi

**À toi : Rédige une étude**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Rédige la preuve de : $F$ est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Vérifie que l'intégrande est continue et paire sur $\mathbb{R}$ : $\cos(-t) = \cos t$.

**Indice 2**

Encadre $2+\cos t$ entre $1$ et $3$, puis déduis-en un minorant de l'intégrande.

**Indice 3**

Point délicat : n'intègre ce minorant que pour $x \geq 0$, bornes dans l'ordre croissant.

**Réponse**

« Pour tout réel $t$, $2+\cos t \geq 1 > 0$ : l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est paire, car $\cos(-t) = \cos t$, et la borne fixe vaut $0$ : $F$ est impaire.

$F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $F'(x) = \dfrac{1}{2+\cos x} > 0$ : $F$ est strictement croissante.

Enfin $2+\cos t \leq 3$, donc $\dfrac{1}{2+\cos t} \geq \dfrac{1}{3}$. Pour $x \geq 0$, on intègre de $0$ à $x$ : $F(x) \geq \dfrac{x}{3}$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. »

**Remarque : Coin examen : fonction définie par une intégrale**

Une fonction définie par une intégrale est étudiée dans 8 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). Les questions s'enchaînent ainsi :

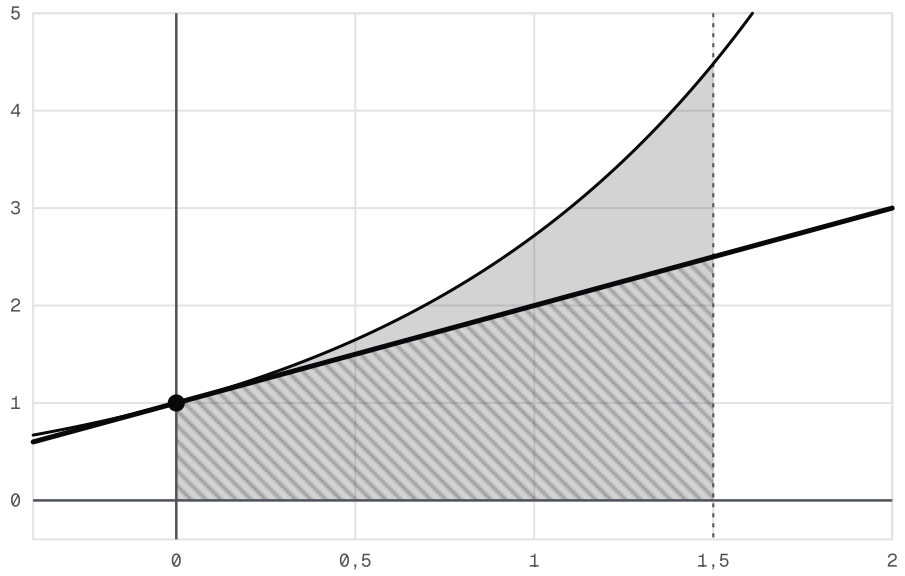
- « montrer que $F$ est dérivable sur $I$ et calculer $F'(x)$ » : continuité de l'intégrande, puis le théorème ;
- « en déduire les variations de $F$ » : signe de $F'(x)$ ;
- « montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\cdots \leq F(x) \leq \ldots$ » : encadrement de l'intégrande, puis intégration ;
- « en déduire la limite de $F$ en $+\infty$ » : comparaison ou gendarmes.

Chaque réponse nomme l'hypothèse qu'elle utilise.

## Intégrer une inégalité

## Intégrer dans le bon sens

Deux courbes, l'une sous l'autre sur un segment : l'aire sous la plus basse est la plus petite. C'est l'ordre de l'intégrale. Il fabrique des inégalités entre fonctions définies par une intégrale, et des limites. Le seul piège est le sens des bornes.




$y = e^t$ $y = 1 + t$ $x = \frac{3}{2}$ Point du graphe Domaine teinté Domaine hachuré

**Sur [0, 3/2], la droite y = 1 + t reste sous la courbe de t ↦ $e^t$ : le domaine hachuré sous la droite tient dans le domaine teinté sous la courbe, et son aire est plus petite.**

**Vérifie : Un sens à décider**

Pour tout réel $t$, $e^t \geq 1 + t$. Soit $x < 0$. Quelle inégalité obtient-on en intégrant entre $0$ et $x$ ?

**A.** $e^x - 1 \geq x + \dfrac{x^2}{2}$

**Faux.**

Les bornes $0$ et $x$ sont dans l'ordre décroissant : le sens change.

**B.** Aucune, car $x$ est négatif.

**Faux.**

On peut intégrer ; il faut seulement retourner les bornes, puis le sens.

**C.** $e^x - 1 \leq x + \dfrac{x^2}{2}$

**Juste.**

Juste : pour $x < 0$, on intègre sur $[x, 0]$, et l'inégalité se retourne.

**D.** $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2}$

**Faux.**

Une inégalité entre intégrandes ne donne pas une égalité ; les deux membres diffèrent en $x = -1$.

**Correction**

Pour $x < 0$, on intègre sur $[x, 0]$ : $\displaystyle\int_x^0 e^t \,\mathrm{d}t \geq \int_x^0 (1+t)\,\mathrm{d}t$, soit $1 - e^x \geq -x - \dfrac{x^2}{2}$. En multipliant par $-1$ : $e^x - 1 \leq x + \dfrac{x^2}{2}$.

**Méthode : intégrer une inégalité**

1. **Encadrer l'intégrande** : $g_1(t) \leq f(t) \leq g_2(t)$ pour tout $t$ du segment, avec $g_1$ et $g_2$ simples à intégrer.
2. **Ordonner les bornes** : intégrer de $\alpha$ à $\beta$ avec $\alpha \leq \beta$ ; si les bornes sont $x$ et $a$ avec $x < a$, intégrer de $x$ à $a$.
3. **Intégrer** l'encadrement par l'ordre de l'intégrale, puis **calculer** les intégrales de $g_1$ et $g_2$.
4. **Conclure** : écrire l'inégalité obtenue, ou passer à la limite par comparaison ou par les gendarmes.

**Rédaction attendue.** « Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $g_1(t) \leq f(t) \leq g_2(t)$. Ces fonctions sont continues et $\alpha \leq \beta$ ; par l'ordre de l'intégrale, . . . Donc . . . »

**Exemple : Exemple guidé : encadrer arctan**

**Énoncé.** Montre que, pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.

**Encadrer.** Pour tout réel $t$, $(1-t^2)(1+t^2) = 1 - t^4 \leq 1$, donc $1 - t^2 \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Et $\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$.

**Intégrer.** Soit $x \geq 0$. Les trois fonctions sont continues sur $[0, x]$ et $0 \leq x$ ; par l'ordre de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &\leq \int_0^x 1\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**Conclusion.** Avec $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, on obtient $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.

**Trouve l'erreur : Une rédaction à vérifier**

Un élève veut encadrer $\arctan x$ pour $x < 0$. Il écrit : « pour tout $t$, $1 - t^2 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$ ; j'intègre de $0$ à $x$ : $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$. » Où est l'erreur ?

**A.** L'encadrement de $\dfrac{1}{1+t^2}$ est faux pour $t < 0$.

**Faux.**

L'encadrement vaut pour tout réel $t$ : il ne dépend que de $t^2$.

**B.** Le calcul de $\displaystyle\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t$ est faux.

**Faux.**

Cette intégrale vaut bien $x - \dfrac{x^3}{3}$, pour tout réel $x$.

**C.** Il n'y a pas d'erreur : $\arctan$ est impaire.

**Faux.**

Pour $x = -1$ : $x - \dfrac{x^3}{3} = -\dfrac{2}{3}$, alors que $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} < -\dfrac{2}{3}$.

**D.** Les bornes $0$ et $x$ sont dans l'ordre décroissant.

**Juste.**

Juste : pour $x < 0$, on obtient $x \leq \arctan x \leq x - \dfrac{x^3}{3}$.

**Correction**

Pour $x < 0$, on intègre sur $[x, 0]$ : $\displaystyle\int_x^0 (1-t^2)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leq \int_x^0 1\,\mathrm{d}t$. Cela donne $-x + \dfrac{x^3}{3} \leq -\arctan x \leq -x$. Donc $x \leq \arctan x \leq x - \dfrac{x^3}{3}$ : l'encadrement s'inverse.

## Une limite par encadrement

**Exemple : Exemple guidé : une limite sans calculer l'intégrale**

**Énoncé.** Soit $H(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$, la fonction de la section précédente. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} H(x)$.

**Encadrer.** Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 3x]$, $e^x \leq e^t \leq e^{3x}$ et $t > 0$, donc $\dfrac{e^x}{t} \leq \dfrac{e^t}{t} \leq \dfrac{e^{3x}}{t}$.

**Intégrer.** Comme $x < 3x$, et avec $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(3x) - \ln x = \ln 3$ :

$$e^x \ln 3 \leq H(x) \leq e^{3x} \ln 3.$$

**Conclure.** Les deux membres tendent vers $\ln 3$ quand $x$ tend vers $0$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = \ln 3$.

**Vérifie : Et en l'infini ?**

Avec le même encadrement, que dire de $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x)$ ?

**A.** Elle vaut $\ln 3$, comme en $0$.

**Faux.**

En $+\infty$, le minorant $e^x \ln 3$ ne tend plus vers $\ln 3$.

**B.** Elle vaut $+\infty$, car $H(x) \leq e^{3x} \ln 3$.

**Faux.**

Un majorant qui tend vers $+\infty$ ne donne aucune limite.

**C.** Elle vaut $+\infty$, car $H(x) \geq e^x \ln 3$.

**Juste.**

Juste : un minorant qui tend vers $+\infty$ entraîne la même limite.

**D.** On ne peut pas conclure : les deux membres diffèrent.

**Faux.**

Le minorant suffit pour une limite infinie.

**Correction**

Pour $x > 0$, $H(x) \geq e^x \ln 3$, avec $\ln 3 > 0$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \ln 3 = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = +\infty$. Le majorant, lui, ne sert pas ici.

**À toi : Rédige une inégalité**

Rédige la preuve de : pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Écris $\ln(1+x)$ comme une intégrale de $0$ à $x$.

**Indice 2**

Pour $t \geq 0$, compare $\dfrac{1}{1+t}$ à $1 - t$ et à $1$ : calcule $(1-t)(1+t)$.

**Indice 3**

Point délicat : précise que $0 \leq x$ avant d'intégrer.

**Réponse**

« Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est continue sur $[0, x]$, et $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Pour $t \geq 0$, $(1-t)(1+t) = 1 - t^2 \leq 1$, donc $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t}$ ; et $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$. Comme $0 \leq x$, l'ordre de l'intégrale donne $\displaystyle\int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(1+x) \leq \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, soit $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. »

## Approcher une aire par des rectangles

### Quatre rectangles

Prends $f(t) = 1 + t^2$ sur $[0, 2]$. On découpe $[0, 2]$ en quatre morceaux de longueur $\dfrac{1}{2}$, de bornes $0$, $\dfrac{1}{2}$, $1$, $\dfrac{3}{2}$ et $2$. Sur chaque morceau, on pose un rectangle dont la hauteur est la valeur de $f$ au bord **gauche**. La somme de leurs aires vaut

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

**Devine : Au-dessus ou au-dessous ?**

L'aire exacte sous la courbe vaut $\int_0^2 (1+t^2)\,\mathrm{d}t$. D'après toi, comment se place $\frac{15}{4}$ par rapport à elle ?

**A.** $\frac{15}{4}$ est égal à l'aire exacte.

**Faux.**

L'aire exacte vaut $\frac{14}{3}$, et $\frac{15}{4} \neq \frac{14}{3}$.

**B.** $\frac{15}{4}$ est plus petit que l'aire exacte.

**Juste.**

Juste : $f$ est croissante sur $[0,2]$, donc chaque rectangle est sous la courbe.

**C.** $\frac{15}{4}$ est plus grand que l'aire exacte.

**Faux.**

Chaque hauteur est la plus petite valeur de $f$ sur son morceau : le rectangle est sous la courbe.

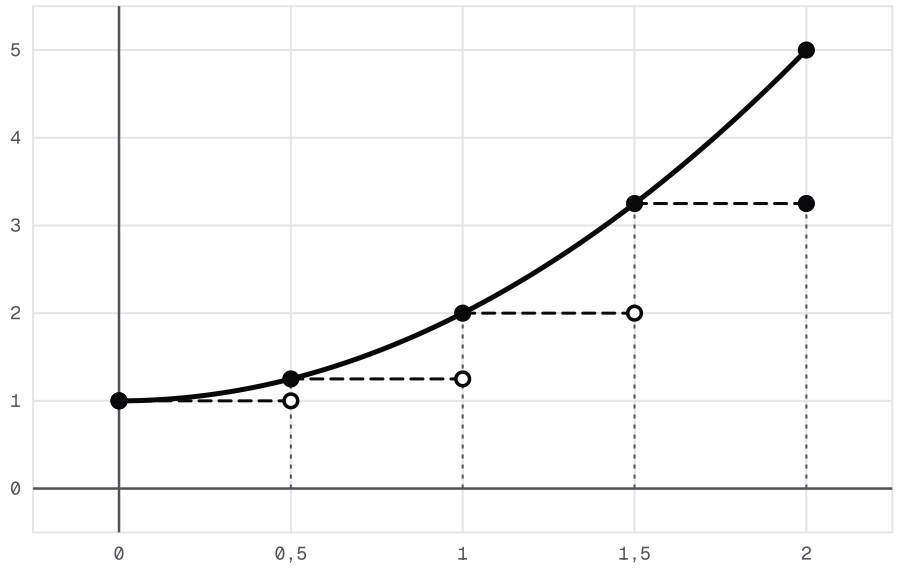
**D.** On ne peut rien dire sans calculer l'aire exacte.

**Faux.**

La croissance de $f$ suffit à placer chaque rectangle.

**Correction**

$f$ est croissante sur $[0,2]$. Sur chaque morceau, la valeur au bord gauche est la plus petite : chaque rectangle est sous la courbe. Donc $\frac{15}{4}$ est inférieur à l'aire exacte, $\int_0^2 (1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{14}{3}$. L'écart vaut $\frac{14}{3} - \frac{15}{4} = \frac{11}{12}$.




**La courbe de f : t ↦ 1 + t² sur [0, 2] et les quatre rectangles à gauche : leurs hauteurs 1, 5/4, 2 et 13/4 sont les valeurs de f aux bords gauches.**

Borne exclue en x = 0,5 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1,25.

Borne exclue en x = 1,5 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 2.

## Les sommes de Riemann

**Définition : Sommes de Riemann (méthode des rectangles)**

Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, et $n$ un entier naturel non nul. On partage $[a, b]$ en $n$ intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$, de bornes $x_k = a + kh$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

On appelle **sommes de Riemann** de $f$ sur $[a, b]$ les deux nombres :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

$S_n$ est la somme des aires algébriques des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$ (rectangles à gauche) ; $T_n$ celle des rectangles de hauteur $f(x_{k+1})$ (rectangles à droite).

**En clair.** On coupe $[a, b]$ en $n$ morceaux de même longueur $h$. $S_n$ prend la hauteur au bord gauche de chaque morceau, $T_n$ au bord droit. Les deux sommes ont $n$ termes, multipliés par la largeur $h$. Pour $f(t) = 1 + t^2$ sur $[0, 2]$ et $n = 4$, on trouve $S_4 = \dfrac{15}{4}$ et $T_4 = \dfrac{23}{4}$. Si $f$ prend des valeurs négatives, un rectangle situé sous l'axe compte négativement.

**Vérifie : La bonne écriture**

Laquelle de ces écritures est la somme $S_n$ de $t \mapsto e^t$ sur $[0,1]$ ?

**A.** $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$

**Faux.**

Les indices vont de $1$ à $n$ : c'est $T_n$, avec les rectangles à droite.

**B.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

**Faux.**

Il manque la largeur $h = \dfrac{1}{n}$ de chaque rectangle.

**C.** $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

**Juste.**

Juste : $h = \dfrac{1}{n}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$, et $k$ va de $0$ à $n-1$.

**D.** $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{k}$

**Faux.**

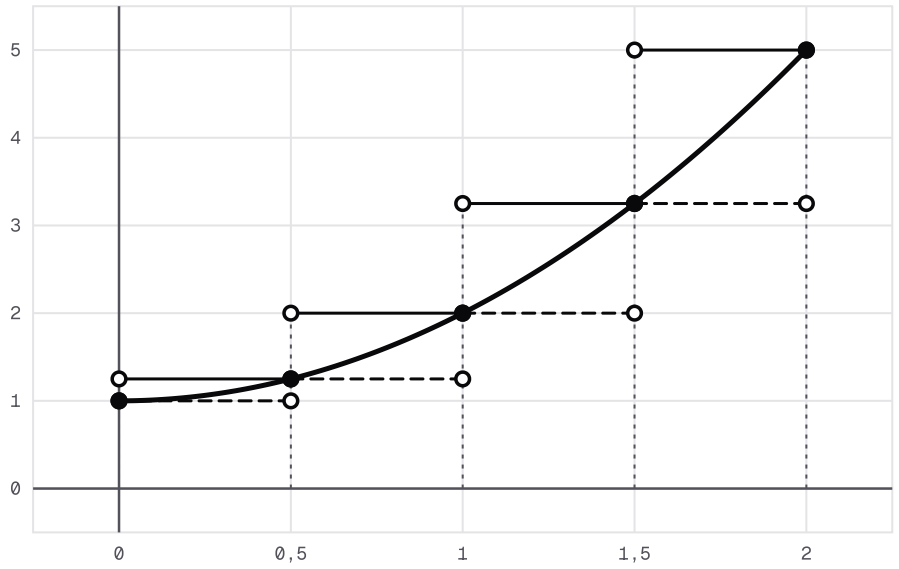
Les points sont $x_k = \dfrac{k}{n}$, pas $k$ : on sortirait de $[0,1]$.

**Correction**

Ici $a = 0$ et $b = 1$, donc $h = \dfrac{1}{n}$ et $x_k = \dfrac{k}{n}$. La somme $S_n$ prend les bords gauches, d'indices $0$ à $n-1$ : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$.

## Encadrer l'intégrale

Pour $f(t) = 1 + t^2$ et $n = 4$, on a trouvé $S_4 = \dfrac{15}{4}$ et $T_4 = \dfrac{23}{4}$ ; l'intégrale vaut $\dfrac{14}{3}$. Elle est bien entre les deux, et $T_4 - S_4 = 2$. **Pourquoi est-ce vrai** pour toute fonction croissante ? Sur chaque morceau, la courbe est coincée entre deux hauteurs. On intègre sur le morceau, puis on additionne.




**Pour f(t) = 1 + t² et n = 4 : l'escalier pointillé des rectangles à gauche ($S_4$) reste sous la courbe, l'escalier plein des rectangles à droite ($T_4$) passe au-dessus. L'intégrale est prise entre les deux sommes.**

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 3,25.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1,25.

Sauts en x ≈ 0,5, x ≈ 1, x ≈ 1,5, x ≈ 0,5, x ≈ 1, x ≈ 1,5 : le point plein appartient à la courbe ; le point creux en est exclu, à une ordonnée calculée de l'autre côté du saut.

**Propriété : Encadrement d'une intégrale par les rectangles**

Soit $f$ une fonction continue et croissante sur $[a, b]$, avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $S_n, T_n$ ses sommes de Riemann (F05). Alors :

$$S_n \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq T_n \qquad \text{et} \qquad T_n - S_n = \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}.$$

Si $f$ est continue et décroissante sur $[a, b]$, les inégalités sont inversées : $T_n \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n$, et $S_n - T_n = \dfrac{(b-a)\big(f(a)-f(b)\big)}{n}$.

Dans les deux cas, les suites $(S_n)$ et $(T_n)$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, la croissance de $f$ donne $f(x_k) \leq f(t) \leq f(x_{k+1})$. Comme $x_k < x_{k+1}$, on intègre cette inégalité (ordre de l'intégrale) : $h\,f(x_k) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq h\,f(x_{k+1})$.

**Étape 2.** On somme pour $k$ de $0$ à $n-1$. Par la relation de Chasles, la somme des intégrales vaut $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ; à gauche on obtient $S_n$, à droite $T_n$.

**Étape 3.** Les termes communs s'éliminent : $T_n - S_n = h\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \dfrac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}$.

**Étape 4.** Si $f$ est décroissante, $-f$ est croissante ; on applique les étapes 1 à 3 à $-f$, puis on multiplie par $-1$ (linéarité).

**Étape 5.** L'intégrale est comprise entre $S_n$ et $T_n$, dont l'écart $\dfrac{(b-a)|f(b)-f(a)|}{n}$ tend vers $0$ : par le théorème des gendarmes, $(S_n)$ et $(T_n)$ convergent vers l'intégrale.

À retenir **: Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Le geste se fait **sur chaque petit intervalle**. On encadre $f(t)$ par ses valeurs aux deux bords, grâce à la monotonie. On intègre cet encadrement, les bornes étant dans l'ordre croissant. Puis on **somme**, et la relation de Chasles recolle les morceaux. L'écart $T_n - S_n$ se calcule seul : presque tous les termes s'éliminent. Comme cet écart tend vers $0$, les gendarmes donnent la limite commune des deux sommes.

**Vérifie : L'écart entre les deux sommes**

Pour $f$ croissante, pourquoi $T_n - S_n$ vaut-il $h\big(f(b)-f(a)\big)$ ?

**A.** Par la relation de Chasles, appliquée aux $n$ morceaux.
**Faux.**
Chasles recolle les intégrales ; ici, on compare deux sommes de valeurs de $f$.

**B.** Car $f$ croissante donne $f(b) - f(a) \geq 0$.
**Faux.**
Ce signe dit que $T_n \geq S_n$, pas combien vaut l'écart.

**C.** Car tous les rectangles ont la même aire.
**Faux.**
Les hauteurs $f(x_k)$ changent d'un rectangle à l'autre.

**D.** Les termes communs aux deux sommes s'éliminent.
**Juste.**
Juste : il ne reste que $f(x_n)$ dans $T_n$ et $f(x_0)$ dans $S_n$.

**Correction**
$T_n = h\big(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big)$ et $S_n = h\big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$. Les termes d'indices $1$ à $n-1$ figurent dans les deux sommes. Il reste $T_n - S_n = h\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = h\big(f(b) - f(a)\big)$.

## Le rôle de la monotonie

Exemple **: Contre-exemple : sans monotonie, pas d'encadrement**

Soit $f(t) = (t-1)^2$ sur $[0, 2]$ : elle décroît, puis croît. Avec $n = 2$, on a $h = 1$ et les points $0$, $1$, $2$. Alors $S_2 = f(0) + f(1) = 1$ et $T_2 = f(1) + f(2) = 1$. Or $\displaystyle\int_0^2 (t-1)^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$. L'intégrale n'est pas comprise entre $S_2$ et $T_2$ : sans la monotonie sur tout $[a, b]$, l'encadrement peut être faux.

**Exemple : Exemple guidé : encadrer une intégrale par deux rectangles**

**Énoncé.** Avec $n = 2$, encadre $\displaystyle\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t$ par les sommes de Riemann de $t \mapsto t^2$.

**Monotonie.** La fonction $f : t \mapsto t^2$ est continue et croissante sur $[0, 1]$.

**Encadrement.** D'après l'encadrement par les rectangles, $S_2 \leq \displaystyle\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t \leq T_2$.

**Calcul.** Ici $h = \dfrac{1}{2}$, et les points sont $0$, $\dfrac{1}{2}$ et $1$. Donc $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{8}$ et $T_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} + 1\right) = \dfrac{5}{8}$.

**Conclusion.** $\dfrac{1}{8} \leq \displaystyle\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t \leq \dfrac{5}{8}$. Le calcul exact donne $\dfrac{1}{3}$, qui est bien entre les deux.

**À toi : Rédige un encadrement de π**

Avec $n = 2$, rédige un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ par des rectangles, puis déduis-en un encadrement de $\pi$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Étudie le sens de variation de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[0, 1]$.

**Indice 2**

Avec $h = \dfrac{1}{2}$, les points sont $0$, $\dfrac{1}{2}$ et $1$ : calcule $S_2$ et $T_2$.

**Indice 3**

Point délicat : lequel de $S_2$ et $T_2$ est le plus grand ? Cela dépend du sens de variation. Ensuite, l'intégrale vaut $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

**Réponse**

« La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et décroissante sur $[0, 1]$. Avec $n = 2$ : $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{9}{10}$ et $T_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{20}$. Comme $f$ est décroissante, $T_2 \leq \displaystyle\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t \leq S_2$. Or cette intégrale vaut $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Donc $\dfrac{13}{20} \leq \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{9}{10}$, soit $\dfrac{13}{5} \leq \pi \leq \dfrac{18}{5}$. »

## Les sommes de Riemann convergent

## Majorer l'erreur

**Vérifie : Combien de rectangles ?**

Pour $f(t) = 1 + t^2$ sur $[0, 2]$, l'encadrement par les rectangles donne $T_n - S_n = \dfrac{8}{n}$. Quel est le plus petit entier $n$ pour lequel cet écart est au plus $\dfrac{1}{100}$ ?

**A.** $n = 80$

**Faux.**
$\dfrac{8}{80} = \dfrac{1}{10}$ : l'écart est encore trop grand.

**B.** $n = 100$

**Faux.**
$\dfrac{8}{100}$ dépasse $\dfrac{1}{100}$.

**C.** $n = 8000$

**Faux.**
Cet entier convient, mais ce n'est pas le plus petit.

**D.** $n = 800$

**Juste.**
Juste : $\dfrac{8}{n} \leq \dfrac{1}{100}$ équivaut à $n \geq 800$.

**Correction**
Ici $T_n - S_n = \dfrac{(2-0)\big(f(2) - f(0)\big)}{n} = \dfrac{2 \times 4}{n} = \dfrac{8}{n}$. Pour $n \geq 1$, $\dfrac{8}{n} \leq \dfrac{1}{100}$ équivaut à $n \geq 800$. Le plus petit entier qui convient est $800$. Pour une fonction non monotone, il faut un autre outil.

L'encadrement précédent exige une fonction monotone. Or beaucoup de fonctions montent puis descendent. Quand $f'$ est bornée, l'erreur des rectangles reste pourtant majorée par un nombre de la forme $\dfrac{c}{n}$.

**Petit rappel** (inégalité des accroissements finis). Si $f$ est dérivable sur $[a, b]$ et si $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|$ pour tous $s$, $t$ de $[a, b]$.

**Pourquoi est-ce vrai** ? Sur un morceau de largeur $h$, $f$ varie peu : ce rappel mesure de combien. On intègre cette mesure, puis on additionne les morceaux.

**Théorème : Majoration de l'erreur de la méthode des rectangles**

Soit $f$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, avec $a < b$, et $M$ un réel tel que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes de Riemann $S_n$ et $T_n$ de $f$ (F05) vérifient :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \qquad \text{et} \qquad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

En conséquence, les suites $(S_n)$ et $(T_n)$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Démonstration**

**Étape 1.** La fonction $f$, dérivable sur $[a,b]$, y est continue. Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $t \in [x_k, x_{k+1}]$. Sur $[x_k,t]$, $f$ est continue, dérivable et $|f'| \leq M$ : l'inégalité des accroissements finis donne $-M(t-x_k) \leq f(t)-f(x_k) \leq M(t-x_k)$.

**Étape 2.** Comme $x_k < x_{k+1}$, on intègre (ordre, linéarité) ; avec $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t-x_k)\,\mathrm{d}t = \frac{Mh^2}{2}$ : $\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - h\,f(x_k)\right| \leq \frac{Mh^2}{2}$, car l'intégrale de la constante $f(x_k)$ vaut $h\,f(x_k)$.

**Étape 3.** On somme ces encadrements pour $k$ de $0$ à $n-1$ (Chasles) : l'écart entre l'intégrale et $S_n$ est au plus $n \times \dfrac{Mh^2}{2} = \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$.

**Étape 4.** Pour $T_n$, l'IAF sur $[t, x_{k+1}]$ donne $|f(t)-f(x_{k+1})| \leq M(x_{k+1}-t)$, d'intégrale $\dfrac{Mh^2}{2}$ ; on conclut comme aux étapes 2 et 3.

**Étape 5.** Comme $\dfrac{M(b-a)^2}{2n}$ tend vers $0$, le théorème des gendarmes donne les deux limites.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve compare $f(t)$ à la hauteur $f(x_k)$ du rectangle, **point par point**, grâce à l'inégalité des accroissements finis. Elle intègre ensuite cet écart sur chaque morceau : on obtient au plus $\dfrac{Mh^2}{2}$ par morceau. Avec $n$ morceaux, l'erreur totale est au plus $\dfrac{M(b-a)^2}{2n}$ : un majorant qui décroît comme $\dfrac{1}{n}$. Aucune monotonie n'est demandée : seulement une borne sur $|f'|$.

**Vérifie : D'où vient le carré ?**

Dans la preuve, pourquoi l'erreur sur un morceau est-elle majorée par $\dfrac{Mh^2}{2}$, et non par $Mh$ ?

**A.** On intègre $M(t-x_k)$ de $x_k$ à $x_{k+1}$.

**Juste.**

Juste : cette intégrale vaut $\dfrac{Mh^2}{2}$.

**B.** On a élevé l'inégalité des accroissements finis au carré.

**Faux.**

Aucune inégalité n'est élevée au carré : le carré vient d'un calcul d'intégrale.

**C.** Car il y a $n$ morceaux, chacun de largeur $h$.

**Faux.**

Le nombre de morceaux intervient à l'étape suivante, quand on additionne.

**D.** Car on traite $S_n$ et $T_n$, d'où le facteur $2$.

**Faux.**

Les deux sommes sont traitées séparément ; le $2$ vient de $\displaystyle\int_0^h s\,\mathrm{d}s = \frac{h^2}{2}$.

**Correction**

L'écart $|f(t) - f(x_k)|$ est au plus $M(t - x_k)$ : il est petit près de $x_k$, plus grand au bout. En intégrant de $x_k$ à $x_{k+1}$, on obtient $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k)\,\mathrm{d}t = \frac{Mh^2}{2}$. C'est la moitié de $Mh \times h$ : l'aire d'un triangle, pas d'un rectangle.

## Toute fonction continue

**Exemple : une dérivée non bornée**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \sqrt{t}$. Elle n'est pas dérivable en $0$, et pour $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ dépasse tout réel $M$ près de $0$. La majoration de l'erreur ne s'applique donc pas.

Mais $f$ est continue et croissante, et l'encadrement par les rectangles donne, pour tout $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - S_n \\ &\leq T_n - S_n = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Les sommes convergent donc quand même, vers $\dfrac{2}{3}$. Chaque résultat a ses hypothèses ; on choisit celui qui s'applique.

**Théorème : Convergence des sommes de Riemann**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Les sommes de Riemann $S_n$ et $T_n$ de $f$ (F05) convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier, pour toute fonction $f$ continue sur $[0, 1]$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

**Démonstration**

Idée de la preuve. Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction continue $f$ atteint un minimum $\alpha_k$ et un maximum $\beta_k$ (image d'un segment, admise au chapitre de la continuité). L'intégrale (ordre de l'intégrale et Chasles), $S_n$ et $T_n$ sont toutes comprises entre $h\sum \alpha_k$ et $h\sum \beta_k$, donc l'écart entre l'intégrale et $S_n$ (ou $T_n$) est au plus $(b - a)$ fois le plus grand des écarts $\beta_k - \alpha_k$.

**Étape omise** : montrer que le plus grand des écarts $\beta_k - \alpha_k$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Elle repose sur la continuité uniforme de $f$ sur $[a, b]$, hors programme.

Quand $f$ est monotone (F06) ou dérivable à dérivée bornée (F07), cette étape est remplacée par un calcul, et la convergence est démontrée.

**Remarque : ce que l'esquisse laisse de côté**

La preuve de ce théorème est une **esquisse**. L'étape omise demande que l'écart entre le maximum et le minimum de $f$ sur un morceau tende vers $0$ sur tous les morceaux à la fois. Elle repose sur la **continuité uniforme**, hors programme. Deux cas sont démontrés en entier : $f$ monotone, par l'encadrement par les rectangles, et $f$ dérivable à dérivée bornée, par la majoration de l'erreur.

## Choisir le nombre de rectangles

**Méthode : approcher une intégrale par des rectangles**

1. **Écrire** $S_n$ ou $T_n$ : pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, points $x_k = a + kh$, indices de $0$ à $n-1$ ou de $1$ à $n$.
2. **Contrôler l'erreur** : si $f$ est monotone, l'intégrale est entre $S_n$ et $T_n$, dont l'écart vaut $\dfrac{(b-a)\lvert f(b)-f(a)\rvert}{n}$ ; si $\lvert f'\rvert \leq M$, l'erreur est au plus $\dfrac{M(b-a)^2}{2n}$.
3. **Choisir** $n$ pour que cette borne soit inférieure à la précision demandée.
4. **Conclure** par une valeur approchée et sa précision.

**Rédaction attendue.** « La fonction $f$ est dérivable sur $[a,b]$ et $\lvert f'(t)\rvert \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$. D'après la majoration de l'erreur, $\left\lvert \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right\rvert \leq \ldots$ Il suffit donc que $\ldots$ »

**Exemple : Exemple guidé : choisir le nombre de rectangles**

**Énoncé.** Combien de rectangles suffisent pour approcher $\displaystyle\int_0^2 \cos(3t)\,\mathrm{d}t$ à $10^{-2}$ près par $S_n$ ?

**Majorer la dérivée.** $f : t \mapsto \cos(3t)$ est dérivable sur $[0,2]$ et $\lvert f'(t)\rvert = 3\lvert\sin(3t)\rvert \leq 3$. On prend $M = 3$.

**Appliquer.** L'erreur est au plus $\dfrac{3 \times 2^2}{2n} = \dfrac{6}{n}$.

**Choisir.** $\dfrac{6}{n} \leq \dfrac{1}{100}$ dès que $n \geq 600$. Avec $n = 600$, $S_{600}$ approche l'intégrale à $10^{-2}$ près. Ici, on connaît la valeur exacte, $\dfrac{\sin 6}{3}$ : elle permet de contrôler le résultat.

**Vérifie : Quel résultat s'applique ?**

Pour $f(t) = \lvert t-1\rvert$ sur $[0,2]$, quel résultat du cours assure que $S_n$ converge vers l'intégrale ?

**A.** L'encadrement par les rectangles, car $f$ est monotone.

**Faux.**
$f$ décroît sur $[0,1]$ puis croît sur $[1,2]$ : elle n'est pas monotone sur $[0,2]$.

**B.** La convergence des sommes de Riemann, car $f$ est continue.

**Juste.**

Juste : $f$ est continue sur $[0,2]$, et cela suffit.

**C.** La majoration de l'erreur, car $|f'| \leq 1$.

**Faux.**

$f$ n'est pas dérivable en $1$ : l'hypothèse « dérivable sur $[a,b]$ » manque.

**D.** Aucun : $f$ n'a pas de dérivée en $1$.

**Faux.**

La convergence ne demande que la continuité.

**Correction**

$f$ est continue sur $[0,2]$, mais elle n'est ni monotone sur $[0,2]$ ni dérivable en $1$. Parmi les trois résultats, seul le théorème de convergence pour une fonction continue s'applique. On pourrait aussi couper $[0,2]$ en $[0,1]$ et $[1,2]$, où $f$ est monotone.

**À toi : Rédige une précision**

Soit $S_n$ la somme à gauche de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$. Rédige la preuve de : $\left|\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - S_n\right| \leq \dfrac{1}{2n}$. Donne ensuite un entier $n$ qui assure une précision de $10^{-3}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Calcule la dérivée de $t \mapsto \ln(1+t)$ et majore sa valeur absolue sur $[0,1]$.

**Indice 2**

Applique la majoration de l'erreur avec $a=0$, $b=1$ et ce majorant $M$.

**Indice 3**

Point délicat : résous $\dfrac{1}{2n} \leq 10^{-3}$ pour un entier $n \geq 1$.

**Réponse**

« La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Pour $t \in [0,1]$, $0 < f'(t) \leq 1$ : on prend $M = 1$. La majoration de l'erreur donne $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n\right| \leq \dfrac{1 \times 1^2}{2n} = \dfrac{1}{2n}$. Or $\dfrac{1}{2n} \leq 10^{-3}$ dès que $n \geq 500$. Donc $n = 500$ convient. »

## Reconnaître une somme de Riemann

## Reconnaître la forme

Le théorème de convergence se lit aussi à l'envers. Une somme de $n$ termes, d'allure compliquée, peut cacher une somme de Riemann. Sa limite est alors une intégrale, que l'on calcule ensuite par une primitive. Le geste clé : faire apparaître $\dfrac{1}{n}$ devant la somme et des quotients $\dfrac{k}{n}$ dedans.

**Devine : Une somme qui ne s'annule pas**

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ pour $n \geq 1$. Chaque terme tend vers $0$. D'après toi, vers quoi tend $u_n$ ?

**A.** $0$, car chaque terme tend vers $0$.

**Faux.**

Le nombre de termes grandit avec $n$ : on ne peut pas conclure terme à terme.

**B.** $1$

**Faux.**

Calcule $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{3}{4}$ : la suite descend sous $1$.

**C.** $\frac{1}{2}$

**Juste.**

Juste : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$, qui tend vers $\int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

**D.** $+\infty$, car il y a de plus en plus de termes.

**Faux.**

Les termes sont de plus en plus petits : $u_n \leq n \times \frac{n}{n^2} = 1$.

**Correction**

On écrit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$ : c'est la somme $T_n$ de $t \mapsto t$ sur $[0, 1]$. Cette fonction est continue, donc $u_n$ tend vers $\int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. On peut le vérifier : $u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

**Méthode : limite d'une somme par une somme de Riemann**

1. **Factoriser** pour faire apparaître $\frac{1}{n}$ devant la somme et des quotients $\frac{k}{n}$ dans le terme général, par exemple en divisant par une puissance de $n$.
2. **Identifier** la fonction $f$, le segment $[a, b]$ et les indices : de $0$ à $n-1$ pour $S_n$, de $1$ à $n$ pour $T_n$.
3. **Vérifier** que $f$ est continue sur $[a, b]$.
4. **Conclure** par le théorème de convergence, puis **calculer** l'intégrale.

**Rédaction attendue.** « Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f : t \mapsto \ldots$ est continue sur $[0, 1]$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \ldots$ »

## Deux sommes à transformer

**Exemple : Exemple guidé : un quotient**

**Énoncé.** Calcule la limite de $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+k}$.

**Factoriser.** Pour $n \geq 1$, $\dfrac{1}{2n+k} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{2+\frac{k}{n}}$. Donc $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(t) = \dfrac{1}{2+t}$.

**Vérifier.** $f$ est continue sur $[0,1]$ ; les indices vont de $0$ à $n-1$ : c'est $S_n$.

**Conclure.** D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t} \\ &= \ln 3 - \ln 2 \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Exemple **: Exemple guidé : une puissance de n à répartir**

**Énoncé.** Calcule la limite de $w_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2+3k^2}$.

**Factoriser.** Pour $1 \leq k \leq n$, $k\sqrt{n^2+3k^2} = n^2 \times \dfrac{k}{n}\sqrt{1+3\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$. Donc $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(t) = t\sqrt{1+3t^2}$, continue sur $[0,1]$.

**Conclure.** C'est la somme $T_n$ de $f$ sur $[0,1]$. Une primitive de $f$ est $t \mapsto \dfrac{1}{9}(1+3t^2)^{\frac{3}{2}}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{8-1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Exemple **: Exemple guidé : un segment qui ne commence pas en 0**

**Énoncé.** Calcule la limite de $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$.

**Lire les indices.** Pour $n \geq 1$, $\dfrac{n}{k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Les points $\dfrac{k}{n}$ vont de $1+\dfrac{1}{n}$ à $2$, avec le pas $\dfrac{1}{n}$.

**Réindexer.** On pose $k = n + j$ : $j$ va de $1$ à $n$, et $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(1+\frac{j}{n}\right)$, avec $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

**Vérifier.** Le segment est $[1,2]$, le pas vaut $h = \dfrac{1}{n}$ et les points sont $x_j = 1 + jh$, de $j = 1$ à $n$ : c'est la somme $T_n$ de $f$ sur $[1,2]$. Et $f$ est continue sur $[1,2]$.

**Conclure.**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

**Attention : le segment se lit sur les indices**

✗ « $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} e^{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t$ ».

✓ Le pas vaut $\frac{1}{n}$, mais les points $\frac{k}{n}$ vont jusqu'à $\frac{2n}{n} = 2$. On coupe la somme en $k = n$. Les indices $1$ à $n$ donnent la somme $T_n$ de $t \mapsto e^t$ sur $[0, 1]$. Avec $k = n + j$, les indices $n + 1$ à $2n$ donnent sa somme $T_n$ sur $[1, 2]$. Par la relation de Chasles, la limite vaut $\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 e^t\,\mathrm{d}t$, soit $\int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t = e^2 - 1$. Avant de conclure, vérifie trois choses : le pas, les indices extrêmes et le segment couvert.

## À toi

**Vérifie : Un segment à lire**

Vers quoi tend $\sum_{k=n}^{3n-1} \frac{1}{k}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**A.** $\ln 3$

**Juste.**

Juste : coupée en $k = 2n$, la somme donne deux sommes de Riemann de $t \mapsto \frac{1}{t}$, sur $[1, 2]$ et sur $[2, 3]$.

**B.** $0$, car chaque terme est au plus $\frac{1}{n}$.

**Faux.**

Il y a $2n$ termes, chacun supérieur à $\frac{1}{3n}$ : la somme dépasse $\frac{2}{3}$.

**C.** $\ln 2$

**Faux.**

Le segment n'est pas $[1, 2]$ : les points $\frac{k}{n}$ vont de $1$ à presque $3$.

**D.** $2\ln 3$

**Faux.**

Le nombre de termes, $2n$, est déjà compensé par le pas $\frac{1}{n}$ sur un segment de longueur $2$.

**Correction**

On écrit $\frac{1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{k}{n}}$. Les points $\frac{k}{n}$ vont de $1$ à $\frac{3n-1}{n}$, avec le pas $\frac{1}{n}$. On coupe la somme en $k = 2n$. Avec $k = n + j$, puis $k = 2n + j$, où $j$ va de $0$ à $n - 1$, on obtient les sommes $S_n$ de $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, 2]$ et sur $[2, 3]$. Comme $f$ est continue sur $[1, 3]$, la relation de Chasles donne la limite $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 3$.

**À toi : Rédige une limite de somme**

Soit $z_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\, e^{\frac{k}{n}}$ pour $n \geq 1$. Rédige le calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Écris $\dfrac{k}{n^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{k}{n}$ pour faire apparaître une somme de Riemann.

**Indice 2**

Identifie $f(t) = t\, e^t$, le segment $[0, 1]$ et les indices.

**Indice 3**

Point délicat : calcule $\displaystyle\int_0^1 t\, e^t \,\mathrm{d}t$ par une intégration par parties : dérive le facteur $t$, primitive le facteur $e^t$.

**Réponse**

« Pour $n \geq 1$, $z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(t) = t\, e^t$, continue sur $[0, 1]$. C'est la somme $S_n$ de $f$ sur $[0, 1]$ : d'après le théorème de convergence, elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 t\, e^t \,\mathrm{d}t$.

Notons $L = \displaystyle\int_0^1 t\, e^t \,\mathrm{d}t$. Par parties, en dérivant $t \mapsto t$ et en primitivant $t \mapsto e^t$, fonctions à dérivées continues sur $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} L &= \left[t\, e^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t \\ &= e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$. »

**Remarque : Coin examen : sommes et intégrales**

Les sommes de Riemann, ou l'encadrement d'une somme par des intégrales, figurent dans 8 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). La question type est « montrer que la suite converge et calculer sa limite ». La rédaction attendue tient en trois temps :

- écrire la somme sous la forme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, en nommant $f$ ;
- dire que $f$ est continue sur le segment ;
- conclure par le théorème, puis calculer l'intégrale.

## Encadrer une somme par des intégrales

## Un escalier autour de la courbe

**Devine : Une marche et une aire**

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. D'après toi, dans quel ordre sont les nombres $\dfrac{1}{4}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $1$ ?

**A.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{4} \leq 1$

**Faux.**

L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$, plus grand que $\dfrac{1}{4}$.

**B.** $\dfrac{1}{4} \leq 1 \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

**Faux.**

Sur $[1, 2]$, l'intégrande est au plus $1$, sur un intervalle de longueur $1$ : l'intégrale ne dépasse pas $1$ .

**C.** $\dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq 1$

**Juste.**

Juste : la valeur en $2$ minore l'intégrande, la valeur en $1$ la majore.

**D.** Les trois nombres sont égaux.

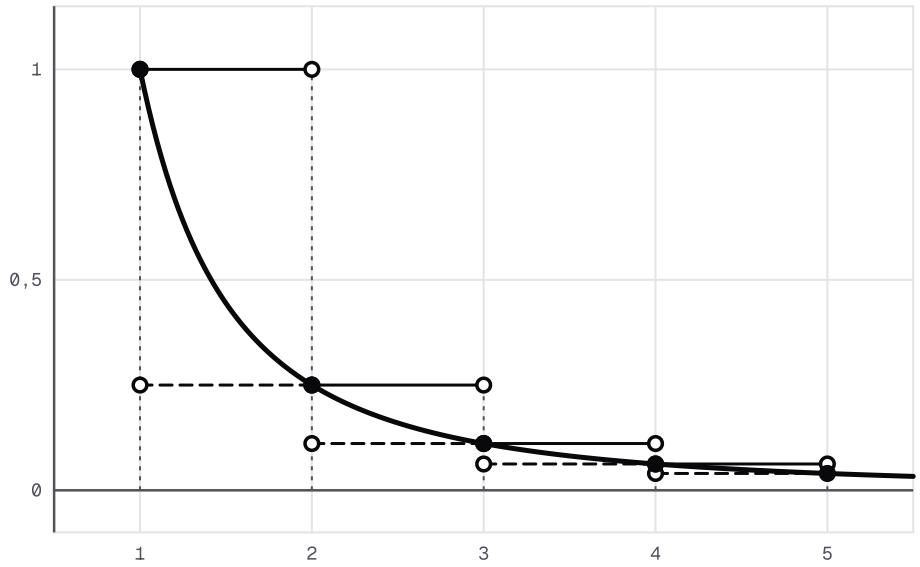
**Faux.**

$\dfrac{1}{4} \neq 1$ : ces nombres ne peuvent pas être égaux.

**Correction**

Pour $t \in [1, 2]$, la décroissance donne $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{1^2} = 1$. Comme $1 < 2$, on intègre sur un intervalle de longueur $1$ : $\dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq 1$. Le calcul le confirme : l'intégrale vaut $\left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^2 = \dfrac{1}{2}$.

Sur $[k, k+1]$, une fonction décroissante reste entre $f(k+1)$ et $f(k)$. Les rectangles de largeur $1$ et de hauteurs $f(k+1)$ ou $f(k)$ forment deux escaliers : l'un sous la courbe, l'autre au-dessus. **Pourquoi est-ce vrai** pour toute la somme ? On encadre sur chaque marche, puis on additionne les marches.




$y = \frac{1}{t^2}$ $f(k)$ $f(k+1)$ Point du graphe Point exclu du graphe

**Pour f(t) = 1/t², décroissante sur [1, 5] : sur chaque marche [k, k + 1], la courbe passe entre le rectangle de hauteur f(k + 1), en pointillés, et celui de hauteur f(k), en trait plein.**

Borne exclue en x = 5 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,0625.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,25.

Sauts en x ≈ 2, x ≈ 3, x ≈ 4, x ≈ 2, x ≈ 3, x ≈ 4 : le point plein appartient à la courbe ; le point creux en est exclu, à une ordonnée calculée de l'autre côté du saut.

**Propriété : Encadrement d'une somme par des intégrales**

Soit $p$ un entier et $f$ une fonction continue et décroissante sur $[p, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq p$ :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k),$$

et, pour tout entier $n > p$ :

$$\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k).$$

Si $f$ est continue et croissante sur $[p, +\infty[$, les inégalités sont inversées.

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $k \geq p$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$, la décroissance de $f$ donne $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. Comme $k < k+1$, on intègre (ordre de l'intégrale), avec $\int_k^{k+1} c\,\mathrm{d}t = c$ pour toute constante $c$ : on obtient la première inégalité.

**Étape 2.** Soit $n > p$. On somme la première inégalité pour $k$ de $p$ à $n-1$. Par la relation de Chasles, la somme des intégrales vaut $\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t$. À gauche, le changement d'indice $j = k+1$ donne $\sum_{j=p+1}^{n} f(j)$.

**Étape 3.** Si $f$ est croissante, $-f$ est décroissante : on applique les étapes 1 et 2 à $-f$, puis on multiplie par $-1$ (linéarité).

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

C'est le geste des rectangles, avec un pas égal à $1$. On encadre $f(t)$ sur $[k, k+1]$ grâce à la **monotonie**, puis on intègre : une marche de largeur $1$ a pour aire sa hauteur. On somme ensuite, et Chasles recolle les intégrales. Le seul soin porte sur les **indices** extrêmes : la somme de gauche commence à $p+1$, celle de droite s'arrête à $n-1$.

**Vérifie : Le décalage d'indice**

Après sommation, pourquoi la somme de gauche s'écrit-elle $\sum_{k=p+1}^{n} f(k)$ ?

**A.** La relation de Chasles décale tous les indices.

**Faux.**

Chasles porte sur les intégrales, pas sur les indices de la somme.

**B.** On pose $j = k+1$ dans $\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1)$.

**Juste.**

Juste : quand $k$ va de $p$ à $n-1$, $j$ va de $p+1$ à $n$.

**C.** La décroissance de $f$ supprime le terme $f(p)$.

**Faux.**

La monotonie donne l'encadrement ; elle ne retire aucun terme.

**D.** C'est une coquille : il faudrait $\sum_{k=p}^{n-1} f(k)$.

**Faux.**

Cette somme est celle de droite ; à gauche, ce sont les valeurs aux bords droits des marches.

**Correction**

Sur $[k, k+1]$, le minorant est $f(k+1)$. On somme pour $k$ de $p$ à $n-1$ : on obtient $\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1)$.

Avec $j = k+1$, l'indice $j$ va de $p+1$ à $n$ : c'est $\sum_{j=p+1}^{n} f(j)$.

## La méthode et ses limites

**Méthode : encadrer une somme par des intégrales**

1. **Choisir** la fonction $f$ telle que la somme s'écrive avec des $f(k)$, et établir sa **monotonie** sur l'intervalle utile.
2. **Encadrer** $f(t)$ sur $[k, k+1]$ par $f(k)$ et $f(k+1)$, puis intégrer, bornes dans l'ordre croissant.
3. **Sommer** en contrôlant les indices extrêmes, puis **calculer** l'intégrale par une primitive.
4. **Exploiter** l'encadrement obtenu : valeur approchée, limite par comparaison, ou limite d'un quotient.

Pour $f$ croissante, l'encadrement s'écrit $f(k) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1)$ : les sommes de la minoration et de la majoration échangent leurs indices.

**Rédaction attendue.** « La fonction $f$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq 1$ et tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. Comme $k < k+1$, on intègre : … En sommant pour $k$ de 1 à $n-1$ : … »

**Exemple : Exemple guidé : la somme des inverses**

**Énoncé.** Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montre que $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$ pour $n \geq 1$.

**Encadrer.** $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq 1$ :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

**Sommer.** L'inégalité de droite, sommée de $k = 1$ à $n$, donne $\ln(n+1) \leq u_n$. Celle de gauche, sommée de $k = 1$ à $n-1$, donne $u_n - 1 \leq \ln n$.

**Conclusion.** Pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$.

**Prolongement.** Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$ :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers $1$, car $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Par les gendarmes, $\dfrac{u_n}{\ln n}$ tend vers $1$.

**Vérifie : Une conséquence**

Avec l'encadrement $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$, que peut-on dire de la suite $(u_n)$ ?

**A.** Elle converge, car elle est majorée par $1 + \ln n$.

**Faux.**

$1 + \ln n$ dépend de $n$ et tend vers $+\infty$ : ce n'est pas un majorant constant.

**B.** Elle tend vers $1$, comme $\dfrac{u_n}{\ln n}$.

**Faux.**

C'est le quotient par $\ln n$ qui tend vers $1$, pas $u_n$.

**C.** On ne peut rien dire sans calculer $u_n$.

**Faux.**

Le minorant suffit pour une limite infinie.

**D.** Elle tend vers $+\infty$, car $u_n \geq \ln(n+1)$.

**Juste.**

Juste : le minorant tend vers $+\infty$.

**Correction**

Pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \ln(n+1)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite diverge, mais lentement, à la manière de $\ln n$.

## Fonction croissante, fonction non monotone

Exemple **: Exemple guidé : une fonction croissante**

**Énoncé.** Soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$. Montre que $\dfrac{n^3}{3} \leq s_n \leq \dfrac{n^3}{3} + n^2$ pour $n \geq 1$, puis trouve la limite de $\dfrac{s_n}{n^3}$.

**Encadrer.** $t \mapsto t^2$ est continue et **croissante** sur $[0, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq 0$, les inégalités sont inversées :

$$k^2 \leq \int_k^{k+1} t^2 \,\mathrm{d}t \leq (k+1)^2.$$

**Sommer** pour $k$ de $0$ à $n-1$, avec $\displaystyle\int_0^n t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{n^3}{3}$. À droite, les termes $(k+1)^2$ donnent $s_n$ : $\dfrac{n^3}{3} \leq s_n$. À gauche, la somme va de $0^2$ à $(n-1)^2$, soit $s_n - n^2$ : $s_n - n^2 \leq \dfrac{n^3}{3}$.

**Conclure.** On divise par $n^3$ : $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{s_n}{n^3} \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{n}$. Par les gendarmes, la limite vaut $\dfrac{1}{3}$.

Exemple **: Contre-exemple : sans monotonie**

Soit $f(t) = \sin^2(\pi t)$, continue sur $[0, +\infty[$ mais pas monotone. Pour tout entier $k$, $f(k) = 0$. Pourtant $\sin^2(\pi t) = \dfrac{1 - \cos(2\pi t)}{2}$, donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. L'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$ est donc fausse : sans la monotonie sur $[p, +\infty[$, l'encadrement peut être faux.

**À toi : Rédige un encadrement**

Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $n \geq 2$. Rédige la preuve de : $2\sqrt{n+1} - 2 \leq v_n \leq 2\sqrt{n} - 1$. Déduis-en $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\sqrt{n}}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ ; une primitive est $t \mapsto 2\sqrt{t}$.

**Indice 2**

Encadre $\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, puis somme de $k = 1$ à $n$ d'un côté, de $k = 1$ à $n-1$ de l'autre.

**Indice 3**

Point délicat : quel est le premier terme de la somme, et pourquoi la majoration le met-elle à part ?

**Réponse**

« La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq 1$ : $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. En sommant l'inégalité de droite de $k = 1$ à $n$ : $2\sqrt{n+1} - 2 \leq v_n$. En sommant celle de gauche de $k = 1$ à $n-1$ : $v_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2$. On divise par $\sqrt{n} > 0$ : les deux membres tendent vers $2$. Par les gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\sqrt{n}} = 2$. »

## Suites définies par une intégrale

## La puissance qui écrase

**Devine : Une limite à deviner**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. D'après toi, vers quoi tend $I_n$ ?

**A.** $2$, la valeur de $1+t^2$ en $1$.

**Faux.**

En $t = 1$, $t^n = 1$ ; mais ailleurs, $t^n$ écrase l'intégrande.

**B.** $0$

**Juste.**

Juste : $I_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3}$, qui tend vers $0$.

**C.** $1$, car $t^n \leq 1$.

**Faux.**

$t^n \leq 1$ donne seulement $I_n \leq \frac{4}{3}$, sans limite.

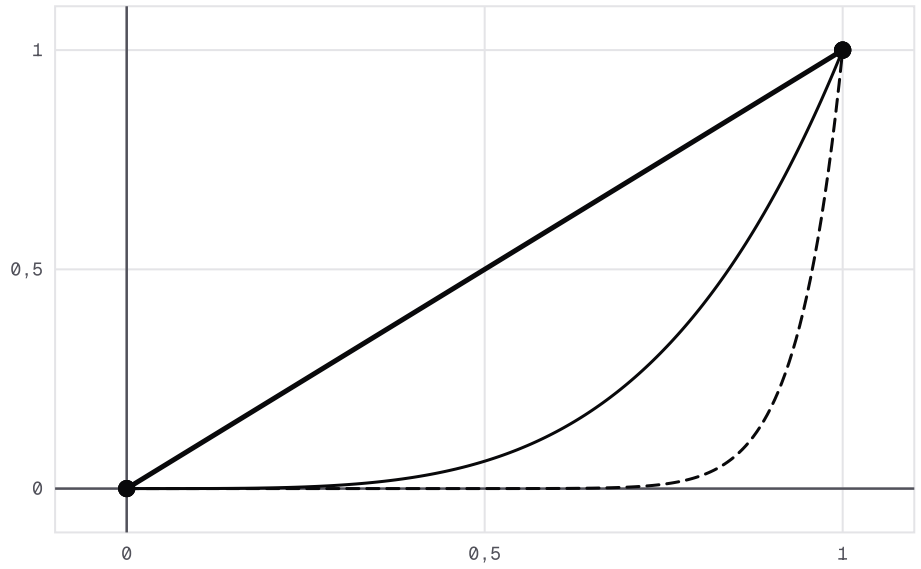
**D.** $+\infty$, car $n$ grandit.

**Faux.**

$0 \leq t^n \leq 1$ sur $[0,1]$ : l'intégrale reste bornée.

**Correction**

Le calcul est direct : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t^n + t^{n+2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3}$. Cette suite tend vers $0$. Sur $[0,1[$, $t^n$ devient très petit ; seul le voisinage de $1$ résiste, et sa part s'éteint.




**Les fonctions x ↦ x, x ↦ x⁴ et x ↦ x¹⁶ sur [0, 1] : plus l'exposant grandit, plus la courbe se colle à l'axe, sauf près de 1.**

Sur $[0,1]$, $0 \leq t^n \leq 1$, et l'aire sous $t \mapsto t^n$ vaut $\dfrac{1}{n+1}$. Une fonction continue $g$ reste bornée sur $[0,1]$ : le produit $t^n g(t)$ est donc écrasé à son tour. **Pourquoi est-ce vrai** sans calculer l'intégrale ? On encadre l'intégrande, puis on intègre. Le signe et la monotonie se lisent aussi sur l'intégrande.

## Deux propriétés

**Propriété : Signe, monotonie et convergence d'une suite d'intégrales**

Soit $a < b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ une fonction continue sur $[a,b]$ ; on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \geq 0$, alors $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$, alors la suite $(I_n)$ est décroissante.
- Si les deux conditions sont réunies, la suite $(I_n)$ converge, et sa limite est positive ou nulle.

**Démonstration**

**Étape 1.** Comme $a < b$ et $f_n \geq 0$ sur $[a,b]$, la positivité de l'intégrale donne $I_n \geq 0$.

**Étape 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_a^b \big(f_n(t) - f_{n+1}(t)\big)\,\mathrm{d}t$. L'intégrande est continue et positive sur $[a,b]$ et $a < b$ : cette intégrale est positive. Donc $I_{n+1} \leq I_n$ pour tout $n$ : $(I_n)$ est décroissante.

**Étape 3.** Sous les deux conditions, $(I_n)$ est décroissante et minorée par $0$ : elle converge (critère de convergence d'une suite monotone). Sa limite $\ell$ vérifie $\ell \geq 0$ (passage à la limite dans l'inégalité $I_n \geq 0$).

**Propriété : Limite de $\int_0^1 t^n g(t)\,dt$**

Soit $g$ une fonction continue sur $[0,1]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

**Démonstration**

**Étape 1.** La fonction $g$ est continue sur le segment $[0,1]$ : elle y est bornée (image d'un segment). Il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que $|g(t)| \leq M$ pour tout $t \in [0,1]$.

**Étape 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [0,1]$, $t^n \geq 0$, donc $-Mt^n \leq t^n g(t) \leq Mt^n$. Comme $0 < 1$, on intègre (ordre de l'intégrale), avec $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ : $-\frac{M}{n+1} \leq J_n \leq \frac{M}{n+1}$.

**Étape 3.** Les suites $\left(-\frac{M}{n+1}\right)$ et $\left(\frac{M}{n+1}\right)$ tendent vers $0$. Le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

**Vérifie : L'argument de la monotonie**

Pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t$, avec $g$ continue et positive sur $[0,1]$, pourquoi $(I_n)$ est-elle décroissante ?

**A.** Parce que $I_n$ tend vers $0$.

**Faux.**

Une suite qui tend vers $0$ peut osciller : la limite ne donne pas la monotonie.

**B.** Parce que $I_n \geq 0$ pour tout $n$.

**Faux.**

Le signe ne dit rien du sens de variation.

**C.** Parce que $I_n \leq \dfrac{M}{n+1}$, qui décroît.

**Faux.**

Un majorant décroissant n'oblige pas la suite à décroître.

**D.** Parce que $t^{n+1}g(t) \leq t^n g(t)$ sur $[0,1]$.

**Juste.**
Juste : on compare les intégrandes, puis on intègre dans l'ordre croissant.

**Correction**
Pour $t \in [0,1]$, $t^{n+1} = t \times t^n \leq t^n$, et $g(t) \geq 0$ : donc $t^{n+1}g(t) \leq t^n g(t)$. Les intégrandes sont continues et $0 < 1$ : par l'ordre de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$. Le signe de $g$ compte : si $g$ change de signe, cette comparaison tombe.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Les deux preuves lisent tout sur l'**intégrande**. Le signe : intégrande positive, bornes dans l'ordre croissant. La monotonie : on écrit $I_n - I_{n+1}$ comme **une seule** intégrale, de signe connu. La limite : on borne $|g|$ par $M$, on intègre l'encadrement, puis les gendarmes concluent. Jamais on ne fait tendre $n$ vers $+\infty$ sous l'intégrale.

**Exemple : Contre-exemple : l'ordre des bornes**

Le premier point de la propriété exige $a < b$. Avec des bornes dans l'ordre décroissant, la conclusion tombe : $t^n \geq 0$ sur $[0,1]$, mais $\displaystyle\int_1^0 t^n \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n+1} < 0$ pour tout $n$. Une suite d'intégrales s'écrit donc d'abord avec sa plus petite borne en bas.

## Étudier une suite d'intégrales

**Méthode : étudier une suite définie par une intégrale**

1. **Signe** : signe de l'intégrande sur le segment, bornes dans l'ordre croissant.
2. **Monotonie** : comparer $f_{n+1}(t)$ et $f_n(t)$, ou écrire $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale.
3. **Limite** : encadrer l'intégrande par des fonctions simples, intégrer, conclure par les gendarmes.
4. **Récurrence** : une intégration par parties relie $I_{n+1}$ à $I_n$ ; on l'exploite pour un calcul ou une autre limite.

**Rédaction attendue.** « Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$. Ces fonctions sont continues et $a < b$ ; par l'ordre de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$. Donc $(I_n)$ est décroissante. »

**Exemple : Exemple guidé : signe, monotonie, limite**

**Énoncé.** Soit $\displaystyle I_n = \int_0^1 t^n e^{2t} \,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étudie le signe, la monotonie et la limite de $(I_n)$.

**Signe.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $[0,1]$, $t^n e^{2t} \geq 0$ et $0 < 1$ : par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

**Monotonie.** Pour $t \in [0,1]$, $t^{n+1} \leq t^n$ et $e^{2t} > 0$, donc $t^{n+1}e^{2t} \leq t^n e^{2t}$. Comme $0 < 1$, l'ordre de l'intégrale donne $I_{n+1} \leq I_n$. Rappel du chapitre des suites : une suite décroissante et minorée converge. Donc $(I_n)$ converge.

**Limite.** Pour $t \in [0,1]$, $e^{2t} \leq e^2$, donc $0 \leq t^n e^{2t} \leq e^2 t^n$. On intègre : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exemple **: Exemple guidé : une relation de récurrence**

**Énoncé.** Pour la même suite, montre que $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$, puis trouve la limite de $nI_n$.

**Rappel.** Une intégration par parties porte sur un produit de deux fonctions de dérivées continues. On dérive un facteur, on primitive l'autre. L'intégrale vaut alors le crochet du produit, moins l'intégrale du produit « dérivée fois primitive ».

**Par parties.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive $t \mapsto t^{n+1}$ et on primitive $t \mapsto e^{2t}$ en $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$ ; ces fonctions ont des dérivées continues sur $[0,1]$ :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{t^{n+1}e^{2t}}{2}\right]_0^1 \\ &\quad - \frac{n+1}{2} I_n \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n. \end{aligned}$$

En multipliant par $2$, on obtient $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$.

**Limite.** Donc $(n+1)I_n = e^2 - 2I_{n+1}$, qui tend vers $e^2$, car $(I_{n+1})$ tend vers $0$. Comme $nI_n = (n+1)I_n - I_n$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e^2$.

**À toi : Rédige une relation de récurrence**

Soit $K_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Rédige la preuve de : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = (n+1)K_n - \dfrac{1}{e}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Quel facteur dériver, lequel primitiver ? Le facteur $t^{n+1}$ perd un degré quand on le dérive.

**Indice 2**

Que vaut le crochet $\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1$ aux deux bornes ?

**Indice 3**

Point délicat : vérifie que le facteur $n+1$ apparaît, et que le signe de la primitive $-e^{-t}$ est bien suivi.

**Réponse**

« Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ ont des dérivées continues sur $[0,1]$, à savoir $t \mapsto (n+1)t^n$ et $t \mapsto e^{-t}$. Par intégration par parties, $K_{n+1}$ est la somme du crochet $\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{e}$ et de $\displaystyle\int_0^1 (n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)K_n$. Ainsi :

$$K_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)K_n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = (n+1)K_n - \dfrac{1}{e}$. »

## Le piège de la limite

**Attention : pas de limite sous l'intégrale**

✗ « Pour $t \in [0,1[$, $(n+1)t^n$ tend vers $0$, donc $\displaystyle\int_0^1 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t$ tend vers $0$ ».

✓ Pour tout $n$, $\displaystyle\int_0^1 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\right]_0^1 = 1$. La limite vaut $1$, pas $0$. Que l'intégrande tende vers $0$ en chaque point ne dit rien de l'intégrale. Seul un encadrement démontré permet de conclure.

**Trouve l'erreur : Une limite mal justifiée**

Un élève écrit : « pour $t \in [0,1[$, $t^n$ tend vers $0$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$ ». Que penser de cette rédaction ?

**A.** Elle est juste et complète.

**Faux.**

La conclusion est vraie, mais l'argument ne vaut rien : l'encadré précédent montre un cas où il donne un résultat faux.

**B.** Conclusion vraie, mais il manque un encadrement.

**Juste.**

Juste : on encadre l'intégrande, puis on conclut par les gendarmes.

**C.** La conclusion est fausse : la limite vaut $\dfrac{1}{3}$.

**Faux.**

La limite vaut bien $0$ : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

**D.** Il faut d'abord calculer l'intégrale exactement.

**Faux.**

Aucun calcul exact n'est nécessaire : un encadrement suffit.

**Correction**

On ne passe pas à la limite sous l'intégrale. Rédaction correcte : « pour $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{2+t} \leq \dfrac{t^n}{2}$. Comme $0 < 1$, on intègre : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2(n+1)}$. Par les gendarmes, la limite vaut $0$. »

**À toi : Rédige l'étude d'une suite**

Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$. Rédige la preuve de : $(J_n)$ est positive, décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Sur $[0,1]$, étudie le signe de $\ln(1+t)$ et compare $t^{n+1}$ à $t^n$.

**Indice 2**

Majore $\ln(1+t)$ par $\ln 2$ sur $[0,1]$, grâce à la croissance de $\ln$.

**Indice 3**

Point délicat : intègre l'encadrement de $0$ à $1$, puis conclus par les gendarmes.

**Réponse**

« Pour $t \in [0,1]$, $1 \leq 1+t \leq 2$, donc $0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$. Les intégrandes sont continues et $0 < 1$. D'une part, $t^n \ln(1+t) \geq 0$, donc $J_n \geq 0$. D'autre part, $t^{n+1} \leq t^n$, donc $t^{n+1}\ln(1+t) \leq t^n \ln(1+t)$ et $J_{n+1} \leq J_n$. Enfin, $0 \leq t^n \ln(1+t) \leq \ln 2 \times t^n$ ; on intègre : $0 \leq J_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$. Par les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. »

**Remarque : Coin examen : suite définie par des intégrales**

Dans 4 des 16 sujets consultés, une suite définie par des intégrales est étudiée ; ces sujets couvrent les sessions 2017-2022 et 2024-2025. Les questions suivent l'ordre de la méthode :

- « montrer que $I_n \geq 0$ », puis « montrer que $(I_n)$ est décroissante » : comparaison des intégrandes ;
- « en déduire que $(I_n)$ converge » : suite décroissante et minorée ;
- « montrer que $0 \leq I_n \leq \ldots$ », puis « en déduire la limite » ;
- « par une intégration par parties, montrer que … » : relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$.

## Ce que tu sais faire et démontrer

**À retenir**

- Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et si $a \in I$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $I$, de dérivée $f$, et s'annule en $a$.
- Avec des bornes $u(x)$ et $v(x)$ à valeurs dans $I$ : $H'(x) = u'(x)\,f\big(u(x)\big) - v'(x)\,f\big(v(x)\big)$.

- On intègre une inégalité seulement avec des bornes dans l'ordre croissant.
- Pour $f$ continue sur $[0,1]$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Pour $f$ monotone, $f(k)$ et $f(k+1)$ encadrent $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- La limite d'une suite d'intégrales vient d'un encadrement, jamais d'un passage à la limite sous l'intégrale.

**Le mot du prof.** Tu sais maintenant dériver une fonction dont tu ne connais aucune formule, et l'étudier jusqu'à ses limites. Tu sais transformer une somme en intégrale, et une intégrale en encadrement. Ces gestes servent dans les problèmes d'analyse : ce sont des points que tu peux aller chercher avec méthode.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions et suites définies par une intégrale » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)