BURHAN

Résumé : Fonctions primitives

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

Primitive d'une fonction sur un intervalle

À retenir

Chercher une primitive, c'est dériver à l'envers. On cherche F telle que $F' = f$ en **tout** point d'un intervalle I :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

On dit « **une** primitive » : il en existe plusieurs. Toute affirmation nomme l'intervalle.

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit qu'une fonction F est **une primitive de f sur I** lorsque F est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Méthode : prouver qu'une fonction donnée est une primitive

1. **Dérivabilité.** Nomme l'intervalle I et justifie que F est dérivable sur I : somme, produit, quotient ou composée de fonctions dérivables.
2. **Dérivée.** Calcule $F'(x)$ pour un x quelconque de I.
3. **Identification.** Transforme le résultat jusqu'à retrouver exactement $f(x)$.
4. **Conclusion.** Termine par la phrase complète : « donc F est une primitive de f sur I ».

Aucune intuition ne remplace ce calcul : la question attend la dérivée écrite.

Exemple

Montrons que $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ sur $I =]1, +\infty[$.

Dérivabilité. F est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur I : elle est dérivable sur I.

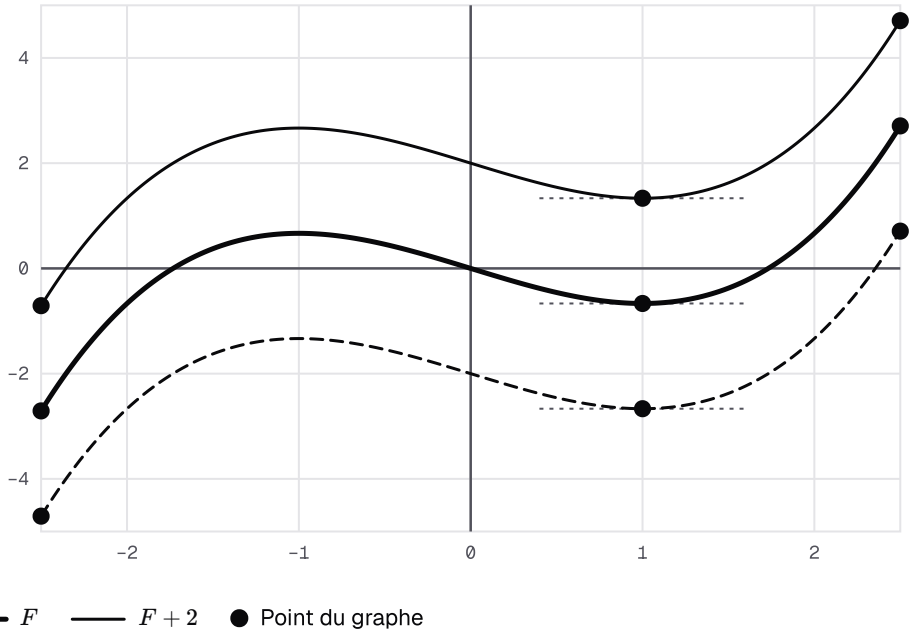
Dérivée. Pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Toutes les primitives, et le rôle de l'intervalle

> **À retenir**
>
> Une primitive connue donne toutes les autres : on lui ajoute une constante réelle k.
>
> Graphiquement, les courbes se déduisent l'une de l'autre par translation verticale.
>
> Cette description exige un **intervalle**.



Les primitives F – 2, F et F + 2 de x ↦ x² – 1 sur $\mathbb{R}$: chaque courbe est l'image d'une autre par une translation verticale, et à l'abscisse 1 leurs tangentes sont parallèles.

> **Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle**
>
> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
>
> - Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.
> - Réciproquement, si G est une primitive de f sur I, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
>
> Les primitives de f sur I sont donc exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Théorème : Existence de primitives pour une fonction continue

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque

L'existence de primitives pour une fonction continue est **admise** dans ce chapitre. Elle sera justifiée avec le calcul intégral.

Pour s'en servir, cite la continuité de la fonction sur un intervalle nommé.

Attention : Hors d'un intervalle, une seule constante ne suffit plus

L'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. Deux primitives peuvent y différer d'une constante distincte sur chaque morceau.

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x^3} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, $G'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$: G a la même dérivée que $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

Pourtant leur différence vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 2 sur $]0, +\infty[$: elle n'est pas constante.

La primitive qui prend une valeur donnée

Propriété : Primitive prenant une valeur donnée en un point

Soit f une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un réel.

Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode : la primitive qui vaut y_0 en x_0

1. **Une primitive.** Trouve une primitive G de f sur l'intervalle I.
2. **Toutes les primitives.** Écris $F(x) = G(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
3. **La condition.** Traduis $F(x_0) = y_0$ en une équation d'inconnue k, puis résous-la.
4. **Conclusion.** Écris : « la primitive de f sur I qui vaut y_0 en x_0 est… ».

L'article « la » est justifié par l'unicité : une seule valeur de k convient.

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto 4x^3 - 6x$ est $x \mapsto x^4 - 3x^2$. Toutes les primitives s'écrivent, avec $k \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = x^4 - 3x^2 + k.$$

La condition $F(2) = 1$ s'écrit $16 - 12 + k = 1$, soit $k = -3$.

Conclusion. La primitive de $x \mapsto 4x^3 - 6x$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 2 est $x \mapsto x^4 - 3x^2 - 3$.

Attention : Une valeur imposée, un point de l'intervalle

Le point x_0 doit appartenir à l'intervalle I. Sur $]0, +\infty[$, imposer une valeur en 0 n'a aucun sens.

Sans condition en un point, dis « une primitive », jamais « la primitive ».

Le tableau des primitives usuelles

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur chacun des intervalles indiqués ; sur un tel intervalle, les primitives de f sont les fonctions $F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle
a (constante réelle)	$a\,x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
x^r ($r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$)	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + m\pi, \dfrac{\pi}{2} + m\pi\right[$, $m \in \mathbb{Z}$

Propriété : Primitive de x ↦ 1/(1 + x²)

La fonction $\arctan$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de cette fonction sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \arctan x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

À retenir

Chaque ligne du tableau se vérifie en dérivant la colonne $F(x)$.

Lis toujours la colonne des intervalles : une puissance négative impose de choisir un côté de 0.

Par exemple, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est $\arctan$, car $\arctan 0 = 0$.

Exemple

Sur $]0, +\infty[$, on écrit $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$. Avec $r = \dfrac{1}{4}$, on a $r \neq -1$ et $r+1 = \dfrac{5}{4}$. Une primitive est donc

$$x \mapsto \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\, x^{\frac{5}{4}}.$$

Contrôle. Pour tout $x > 0$, la dérivée vaut $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{4}\, x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$.

Attention : L'exposant –1 est exclu

La formule $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ exige $r \neq -1$: avec $r = -1$, le dénominateur $r+1$ est nul.

Le tableau ne donne donc aucune primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Elle arrivera avec le chapitre du logarithme.

Somme et produit par un réel

Propriété : Primitives d'une somme et du produit par un réel

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, G une primitive de g sur I, et λ un réel.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I.

Il n'existe aucune règle analogue pour un produit ni pour un quotient : en général, $F\,G$ n'est pas une primitive de $f\,g$.

Méthode : primitiver terme à terme

1. **Découper.** Écris f comme une somme de termes $\lambda \times$ (fonction du tableau), avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. **Lire le tableau.** Pour chaque terme, lis une primitive et vérifie son intervalle.
3. **Additionner.** Additionne les primitives obtenues, avec leurs facteurs λ.
4. **Contrôler.** Dérive le résultat sur l'intervalle choisi.

Exemple

Sur $]0, +\infty[$, cherchons une primitive de $x \mapsto 4\cos x - \dfrac{6}{x^4}$.

Premier terme. La fonction $x \mapsto 4\cos x$ a pour primitive $x \mapsto 4\sin x$.

Second terme. On écrit $-\dfrac{6}{x^4} = -6x^{-4}$. Une primitive de $x \mapsto -6x^{-4}$ est donnée, pour tout $x > 0$, par :

$$-6 \times \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Conclusion. Une primitive est $x \mapsto 4\sin x + \dfrac{2}{x^3}$. Elle convient aussi sur $]-\infty, 0[$.

Attention : Pas de règle du produit

Aucune règle ne donne une primitive d'un produit à partir des primitives des facteurs.

Par exemple, $\sin$ est une primitive de $\cos$. Pourtant la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ a pour dérivée $x \mapsto 2\sin x \cos x$, et non $x \mapsto \cos^2 x$.

En 0, la première vaut 0 et la seconde vaut 1. Cherche plutôt une forme composée, ou transforme l'expression.

Les formes composées

Théorème : Primitive de (v ∘ u) × u′

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, v une fonction définie sur un intervalle J et V une primitive de v sur J. On suppose que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Alors $V \circ u$ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto v\big(u(x)\big) \times u'(x)$.

Propriété : Primitives des formes composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Dans chaque ligne, la fonction de la deuxième colonne est une primitive sur I de celle de la première, sous la condition indiquée.

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'\,u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	aucune
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
$u'\,u^n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \leq -2)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$)	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u' \cos u$	$\sin u$	aucune
$u' \sin u$	$-\cos u$	aucune
$u' (1 + \tan^2 u)$	$\tan u$	il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $u(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + m\pi, \dfrac{\pi}{2} + m\pi\right[$ pour tout $x \in I$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	aucune

De plus, soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle J, et a, b deux réels avec $a \neq 0$. Si $ax + b \in J$ pour tout $x \in I$, alors $x \mapsto \dfrac{1}{a} F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$ sur I.

Puissance entière, n entier naturel

$$\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = u' u^n$$

Inverse, si u ne s'annule pas

$$\left(-\frac{1}{u}\right)' = \frac{u'}{u^2}$$

Racine carrée, si u > 0

$$\left(2\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Sinus et cosinus

$$(\sin u)' = u' \cos u$$
$$(-\cos u)' = u' \sin u$$

Arctangente, sans condition

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Méthode : forme composée et constante à ajuster

1. **Fonction intérieure.** Repère la fonction u et calcule u'.
2. **Constante à ajuster.** Écris $f = \lambda \times$ (forme exacte du tableau), avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. **Condition.** Vérifie la condition de la ligne sur tout l'intervalle : $u > 0$, ou u ne s'annule pas.
4. **Conclusion.** Conclus avec le tableau des formes composées et la linéarité, puis dérive ta réponse.

Rédaction : « on pose $u(x) = \ldots$; u est dérivable sur I et $u'(x) = \ldots$ ».

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, cherchons une primitive de $x \mapsto x^2(x^3+1)^4$.

Fonction intérieure. On pose $u : x \mapsto x^3 + 1$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2$.

Ajustement. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2(x^3+1)^4 = \frac{1}{3}\,u'(x)\,u(x)^4.$$

Conclusion. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{(x^3+1)^5}{5} = \frac{(x^3+1)^5}{15}.$$

Attention : Le facteur 1/a

Avec une fonction intérieure affine, divise par le coefficient de x.

Une primitive de $x \mapsto \sin(3x+2)$ sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3x+2).$$

Sans le facteur $\frac{1}{3}$, la dérivée vaut $3\sin(3x+2)$.

Attention : Sans u', pas de forme composée

La forme $u'\,u^n$ exige le facteur u', à une constante près.

La fonction $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)^3}{3}$ a pour dérivée $x \mapsto 2x(x^2+1)^2$: elle n'est pas une primitive de $x \mapsto (x^2+1)^2$.

En 1, cette dérivée vaut 8, alors que la fonction visée vaut 4.

Attention : Vérifier la condition sur u

Les formes $2\sqrt{u}$ et $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ demandent $u > 0$ sur **tout** l'intervalle ; la forme $-\dfrac{1}{u}$ demande que u ne s'annule pas.

Ainsi $x \mapsto 2\sqrt{x^2-1}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$.

Elle ne l'est sur aucun intervalle qui rencontre $[-1,1]$.

Transformer, identifier des coefficients

Méthode : transformer avant de primitiver

1. **Développer, séparer.** Développe un produit de polynômes ; sépare un quotient par un monôme.
2. **Linéariser.** Utilise les formules rappelées ci-dessous.
3. **Reconnaître.** Fais apparaître une forme du tableau, par exemple $\alpha + \dfrac{\beta}{(x-c)^2}$ par identification.
4. **Primitiver.** Cherche une primitive de chaque terme, puis additionne.

Formules de linéarisation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Exemple

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4\sin(5x)\cos(5x) = 2\sin(10x).$$

Une primitive de $x \mapsto 4\sin(5x)\cos(5x)$ sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto -\frac{1}{5}\cos(10x)$.

Contrôle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée vaut

$$-\frac{1}{5} \times (-10)\sin(10x) = 2\sin(10x).$$

Méthode : déterminer les réels a et b

1. **Dériver.** Dérive la fonction proposée, avec ses coefficients inconnus, sur l'intervalle donné.
2. **Égaler.** Écris que $F'(x)$ est égal à la fonction donnée pour **tout** x de l'intervalle.
3. **Identifier.** Identifie les coefficients des deux numérateurs, puis résous le système.
4. **Conclure.** Vérifie en dérivant la fonction obtenue, et conclus par la phrase complète.

Exemple

Cherchons a et b réels tels que $F : x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ soit une primitive de $x \mapsto \dfrac{1+4x-x^2}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $x^2+1 > 0$. Pour tout réel x :

$$F'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}.$$

Identification. Les numérateurs coïncident pour tout réel x si et seulement si

$$-a = -1, \quad -2b = 4, \quad a = 1.$$

Conclusion. $a = 1$ et $b = -2$.

Étudier une primitive sans l'expliciter

Méthode : étudier une primitive sans formule

1. **Existence.** Justifie que la fonction est continue sur un intervalle nommé. Si une valeur est imposée, cite l'unicité.
2. **Variations.** Utilise $F' = f$: le signe de f donne les variations de F.
3. **Comparaison.** Étudie une différence : si $G(x_0) = F(x_0)$ et $F' \leq G'$ sur I, alors $G - F$ est croissante sur I et nulle en x_0. On en déduit le résultat ci-dessous.
4. **Conclusion.** Conclus sur un intervalle nommé.

Résultat de l'étape 3, pour tout $x \in I$:

$$x \geq x_0 \Rightarrow G(x) \geq F(x)$$
$$x \leq x_0 \Rightarrow G(x) \leq F(x)$$

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{2 + \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $2 + \sin x \geq 1$ pour tout réel x. Soit F sa primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Variations. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \sqrt{2 + \sin x} > 0$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comparaison. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 1$. La fonction $x \mapsto F(x) - x$ a donc une dérivée positive : elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0.

Conclusion.

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) \geq x.$$

Attention : N'invente pas de formule

Quand aucune primitive explicite n'est connue, n'en écris pas une. N'écris pas non plus de valeur de F qui n'est pas donnée.

Tout passe par $F' = f$, par la valeur imposée et par les variations.

Trois questions types

À retenir : Les formes de questions

Voici trois questions types à savoir traiter. Chacune a sa méthode dans ce résumé.

- « Montrer que F est une primitive de f sur I. »
- « Déterminer les réels a et b tels que… »
- « En déduire la primitive de f qui s'annule en… »

Remarque

Les primitives servent ensuite au calcul intégral : calcul d'intégrales, d'aires, et fonctions définies par une intégrale.

Les réflexes de ce chapitre y sont réemployés tels quels.

Rédige chaque réponse comme une preuve courte : nomme l'intervalle, justifie la dérivabilité, calcule, puis conclus par une phrase.

Dis « une primitive » sans condition imposée, « la primitive » avec elle.

Termine par un contrôle en dérivant : il prend quelques secondes et évite la plupart des erreurs de constante.