BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 — 6 pts

Dériver une fonction pour en primitiver une autre

On note $I =]-\infty, 4[$ et l'on considère les fonctions h et f définies sur I par :

$$h(x) = x\sqrt{4-x}, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}.$$

1. a) — 1 pts

Montrer que h est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad h'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}.$$

INDICE

Pour $x \in I$, $4-x>0$. Dérive $\sqrt{4-x}$ comme $\sqrt{u}$, puis le produit, et réduis au même dénominateur.

1. b) — 0,75 pts

Étudier les variations de h sur I, puis montrer que h admet sur I un maximum égal à $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

INDICE

Le signe de $h'(x)$ est celui de $8-3x$. Pour la valeur du maximum, simplifie $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

2. a) — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{8}{3\sqrt{4-x}} - \frac{2}{3}\,h'(x).$$

INDICE

Pars du membre de droite : remplace $h'(x)$ par son expression et réduis au dénominateur $3\sqrt{4-x}$.

2. b) — 1 pts

En déduire une primitive F de f sur I, puis montrer que, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = -\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}.$$

INDICE

h est une primitive de h' sur I. Pour $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, utilise la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 4-x$: attention, $u'(x) = -1$.

3. — 0,5 pts

Déterminer la primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(0) = 0$.

INDICE

Calcule $F(0)$ avec $\sqrt{4} = 2$, puis ajuste la constante.

4. a) 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F_0 sur I et en déduire que :

$$\forall x \in I, \quad F_0(x) \geq 0.$$

INDICE

On a $F_0' = f$, et $\sqrt{4-x} > 0$ sur I : le signe de $f(x)$ est donc celui de x.

4. b) 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall x \in I, \quad (x+8)\sqrt{4-x} \leq 16,$$

puis préciser le cas d'égalité.

INDICE

Écris l'inégalité $F_0(x) \geq 0$ avec l'expression de la question 3, puis multiplie par $\frac{3}{2}$.

5. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F_0(x)$ et $\lim\limits_{x \to 4^-} F_0(x)$.

INDICE

Étudie séparément les deux facteurs $x+8$ et $\sqrt{4-x}$ dans chaque cas.

Exercice 2 6,5 pts

Des coefficients à la primitive, puis une équation

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2}.$$

1. a) 1 pts

Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

INDICE

Réduis au dénominateur $(x+1)^2$ et développe $(ax+b)(x+1)^2$. Il suffit ensuite que le numérateur obtenu ait les mêmes coefficients que $2x^3 + 3x^2 + 2$.

1. b) 1 pts

Montrer que f est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2 - \frac{6}{(x+1)^3}.$$

En déduire les variations de f sur I.

INDICE

Dérive l'écriture obtenue à la question 1. a). Pour le signe, compare $(x+1)^3$ au nombre 3.

2. a) 1 pts

Montrer que $f\left(\sqrt[3]{3} - 1\right) = 3\sqrt[3]{3} - 3$, puis que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) > 0.$$

INDICE

Avec $x + 1 = \sqrt[3]{3}$, on a $(x+1)^2 = \sqrt[3]{9}$. Écris $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$ comme une puissance de 3.

2. b) 0,75 pts

Soit G la fonction définie sur I par $G(x) = x^2 - x - \dfrac{3}{x+1}$. Vérifier que G est une primitive de f sur I.

INDICE

Écris $\dfrac{3}{x+1}$ comme $3(x+1)^{-1}$ avant de dériver, puis compare avec l'écriture de 1. a).

2. c) 0,5 pts

En déduire la primitive F de f sur I telle que $F(0) = 1$.

INDICE

Les primitives de f sur I s'écrivent $G + k$: calcule $G(0)$.

3. a) 0,5 pts

Étudier le sens de variation de F sur I.

INDICE

Le sens de variation d'une fonction dérivable se lit sur le signe de sa dérivée.

3. b) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

INDICE

Près de -1, seul le terme $-\dfrac{3}{x+1}$ pose question : quel est le signe de $x+1$? En $+\infty$, écris $x^2 - x = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

3. c) 1 pts

Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet une unique solution α dans I, et que $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$.

INDICE

F est continue et strictement croissante sur I : pense au théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone. Calcule ensuite $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 3 5,75 pts

Une primitive étudiée sans formule

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

Aucune formule du cours ne fournit une primitive de φ : on étudie l'une d'elles sans l'expliciter.

1. 0,75 pts

Montrer qu'il existe une unique primitive Φ de φ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi(0) = 0$.

INDICE

Deux résultats du cours servent : l'un donne des primitives à une fonction continue sur un intervalle, l'autre fixe la constante. Commence par la continuité de φ.

2. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de Φ sur $\mathbb{R}$, puis donner le signe de $\Phi(x)$ selon le signe de x.

INDICE

Que vaut $\Phi'(x)$? Utilise ensuite la valeur $\Phi(0) = 0$.

3. 1 pts

Montrer que $\Phi(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, et que $\Phi(x) \geq x$ pour tout $x \leq 0$.

INDICE

Étudie le sens de variation de $x \mapsto x - \Phi(x)$ sur $\mathbb{R}$, en comparant $\varphi(x)$ à 1. Attention : la conclusion n'a pas le même sens de part et d'autre de 0.

4. a) 1 pts

Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(x) \geq \arctan x.$$

INDICE

Compare $\varphi(x)$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$ lorsque $0 \leq x \leq 1$: lequel des deux nombres x^4 et x^2 est le plus grand ?

4. b) 0,25 pts

En déduire un encadrement de $\Phi(1)$.

INDICE

Utilise la question 4. a) en $x = 1$, puis la question 3.

5. 1 pts

Soit K la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $K(x)=\Phi(x)+\dfrac{1}{3x^3}$. Montrer que K est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

INDICE

Calcule $K'(x)$ et réduis $\varphi(x)-\dfrac{1}{x^4}$ au même dénominateur.

6. 0,5 pts

En déduire que :

$$\forall x\geq 1,\quad \Phi(x)\leq \Phi(1)+\frac{1}{3}.$$

INDICE

Compare $K(x)$ et $K(1)$, puis reviens à $\Phi(x)$.

7. 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall x\geq 0,\quad 0\leq \Phi(x)\leq \frac{4}{3}.$$

INDICE

Rassemble les majorations déjà obtenues : elles ne portent pas toutes sur le même intervalle.

Exercice 4 4,75 pts

Des puissances de la tangente à un encadrement de π

On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'on considère les fonctions g et f définies sur I par :

$$g(x) = \tan^2 x, \qquad f(x) = \tan^4 x.$$

1. 0,75 pts

Déterminer une primitive G de g sur I, en écrivant $g(x)$ à l'aide de $1 + \tan^2 x$.

INDICE

Ajoute puis retranche 1. Le tableau des primitives usuelles donne une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ sur un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[$: quelle valeur de m convient ici ?

2. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \left(1 + \tan^2 x\right)\tan^2 x - g(x)$.

INDICE

Développe le produit du membre de droite.

2. b) 1 pts

En déduire la primitive F de f sur I telle que $F(0) = 0$, et montrer que, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$$

INDICE

Dans $\left(1 + \tan^2 x\right)\tan^2 x$, reconnais une forme $u' \, u^n$ en posant $u(x) = \tan x$. Combine ensuite avec la question 1, puis ajuste la constante.

3. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de G sur I, puis montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan x \geq x.$$

INDICE

Que vaut $G'(x)$? Calcule aussi $G(0)$.

4. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F sur I. En déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan x \leq x + \frac{\tan^3 x}{3}.$$

INDICE

Raisonne comme à la question 3, avec $F' = f$ et $F(0) = 0$, puis isole $\tan x$.

5. 1 pts

En utilisant les questions 3 et 4 avec $x = \dfrac{\pi}{6}$, montrer que :

$$\frac{16\sqrt{3}}{9} \leq \pi \leq 2\sqrt{3}.$$

INDICE

On a $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Calcule $\tan^3\dfrac{\pi}{6}$, écris les deux inégalités, puis isole π dans chacune.

Exercice 5 6 pts

Une primitive fixée par une tangente

On considère les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}, \qquad h(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Le plan est muni d'un repère ; on parle de la courbe représentative d'une fonction dans ce repère.

1. a) 0,75 pts

Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

INDICE

h est un quotient de deux polynômes : vérifie que le dénominateur ne s'annule pas, puis applique la formule de la dérivée d'un quotient.

1. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = h'(x) + \frac{1}{1+x^2}.$$

INDICE

Réduis le membre de droite au dénominateur $\left(1+x^2\right)^2$.

2. 0,75 pts

En déduire que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de h' sur $\mathbb{R}$ est connue sans calcul. Pour le second terme, pense à la fonction $\arctan$. Une primitive trouvée, comment obtient-on toutes les autres ?

3. 1 pts

Montrer qu'il existe une unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet, au point d'abscisse 1, une tangente passant par l'origine du repère, et que, pour tout réel x :

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

INDICE

Pour une primitive F_k, écris l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 : son coefficient directeur est $F_k'(1) = f(1)$. Traduis « passe par l'origine » en une condition sur $F_k(1)$.

4. 1 pts

Étudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Le signe de F' se lit sur f. Pour $x \neq 0$, écris $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$.

5. 0,5 pts

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{3\pi}{4} < F(x) < \frac{\pi}{4}.$$

INDICE

Fixe x. Compare $F(x)$ à $F(x+1)$, puis $F(x+1)$ à $F(t)$ pour $t \geq x+1$, et fais tendre t vers $+\infty$.

6. 0,75 pts

Soit A la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $A(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que A est constante sur $]0,+\infty[$, puis que :

$$\forall x > 0, \quad A(x) = \frac{\pi}{2}.$$

INDICE

Dérive $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ comme une composée, puis calcule $A'(x)$. Quelle conclusion tire-t-on d'une dérivée nulle sur un intervalle ?

7. 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad \arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

INDICE

Écris l'inégalité $F(x) < \dfrac{\pi}{4}$ de la question 5 pour $x > 0$, remplace $\arctan x$ grâce à la question 6, puis pose $t = \dfrac{1}{x}$.