BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Dériver une fonction pour en primitiver une autre

On note $I =]-\infty, 4[$ et l'on considère les fonctions h et f définies sur I par :

$$h(x) = x\sqrt{4-x}, \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}.$$

1. a) 1 pts

Montrer que h est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad h'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}.$$

INDICE

Pour $x \in I$, $4-x>0$. Dérive $\sqrt{4-x}$ comme $\sqrt{u}$, puis le produit, et réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto 4-x$ est dérivable et strictement positive sur I. Donc $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$. Produit de deux fonctions dérivables sur I, h est dérivable sur I.

Calcul de $h'(x)$. Soit $x \in I$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. h est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.

1. b) 0,75 pts

Étudier les variations de h sur I, puis montrer que h admet sur I un maximum égal à $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

INDICE

Le signe de $h'(x)$ est celui de $8-3x$. Pour la valeur du maximum, simplifie $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

CORRIGÉ

Signe de $h'(x)$. Pour tout $x \in I$, $2\sqrt{4-x} > 0$: $h'(x)$ a le signe de $8-3x$. Ainsi $h'(x) > 0$ si $x < \dfrac{8}{3}$, $h'\left(\dfrac{8}{3}\right) = 0$, et $h'(x) < 0$ si $\dfrac{8}{3} < x < 4$.

Variations. h est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{8}{3}, 4\right[$. Elle atteint donc son maximum sur I en $\dfrac{8}{3}$.

Valeur du maximum.

$$\begin{aligned} h\left(\frac{8}{3}\right) &= \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. h est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{8}{3}, 4\right[$, et admet sur I un maximum égal à $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$, atteint en $\dfrac{8}{3}$.

2. a) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{8}{3\sqrt{4-x}} - \frac{2}{3}\,h'(x).$$

INDICE

Pars du membre de droite : remplace $h'(x)$ par son expression et réduis au dénominateur $3\sqrt{4-x}$.

CORRIGÉ

Soit $x \in I$. D'après 1. a), $\dfrac{2}{3}\,h'(x) = \dfrac{8-3x}{3\sqrt{4-x}}$. Donc :

$$\begin{aligned} &\frac{8}{3\sqrt{4-x}} - \frac{2}{3}\,h'(x) \\ &= \frac{8-(8-3x)}{3\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{3x}{3\sqrt{4-x}} = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{8}{3\sqrt{4-x}} - \dfrac{2}{3}\,h'(x)$.

2. b) 1 pts

En déduire une primitive F de f sur I, puis montrer que, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = -\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}.$$

INDICE

h est une primitive de h' sur I. Pour $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, utilise la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 4-x$: attention, $u'(x) = -1$.

CORRIGÉ

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$. Posons $u(x) = 4-x$: u est dérivable sur I, $u'(x) = -1$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = -\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Comme $2\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I (primitives des formes composées usuelles), $x \mapsto -2\sqrt{4-x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ sur I.

Une primitive de h'. h est dérivable sur I : c'est une primitive de h' sur I.

Une primitive de f. D'après 2. a) et les primitives d'une somme et du produit par un réel, la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{8}{3}\left(-2\sqrt{4-x}\right) - \dfrac{2}{3}\,h(x)$ est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{16}{3}\sqrt{4-x} \\ &\quad -\frac{2}{3}\,x\sqrt{4-x} \\ &= -\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction F définie sur I par $F(x) = -\dfrac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}$ est une primitive de f sur I.

3. 0,5 pts

Déterminer la primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(0) = 0$.

INDICE

Calcule $F(0)$ avec $\sqrt{4} = 2$, puis ajuste la constante.

CORRIGÉ

Forme des primitives. I est un intervalle et F est une primitive de f sur I : les primitives de f sur I sont les fonctions $F + k$, où $k \in \mathbb{R}$ (ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle).

Choix de la constante. Le réel 0 appartient à I, et :

$$F(0) = -\frac{2}{3} \times 8 \times 2 = -\frac{32}{3}.$$

La condition $F(0) + k = 0$ donne $k = \dfrac{32}{3}$. La primitive cherchée est unique (primitive prenant une valeur donnée en un point).

Conclusion. Pour tout $x \in I$:

$$F_0(x) = \frac{32}{3} - \frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}.$$

4. a) 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F_0 sur I et en déduire que :

$$\forall x \in I, \quad F_0(x) \geq 0.$$

INDICE

On a $F_0' = f$, et $\sqrt{4-x} > 0$ sur I : le signe de $f(x)$ est donc celui de x.

CORRIGÉ

Signe de la dérivée. F_0 est une primitive de f sur I : elle est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F_0'(x) = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x}}$. Comme $\sqrt{4-x} > 0$, $F_0'(x)$ a le signe de x et ne s'annule qu'en 0.

Variations. F_0 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 4[$.

Minimum. F_0 admet donc en 0 un minimum sur I, égal à $F_0(0) = 0$. Pour tout $x \in I$:

$$F_0(x) \geq F_0(0) = 0.$$

Conclusion. F_0 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 4[$, et $F_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, avec égalité seulement en $x = 0$.

4. b) 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall x \in I, \quad (x+8)\sqrt{4-x} \leq 16,$$

puis préciser le cas d'égalité.

INDICE

Écris l'inégalité $F_0(x) \geq 0$ avec l'expression de la question 3, puis multiplie par $\frac{3}{2}$.

CORRIGÉ

Traduction de $F_0 \geq 0$. Soit $x \in I$. D'après les questions 3 et 4. a) :

$$\frac{32}{3} - \frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x} \geq 0.$$

En multipliant par $\frac{3}{2} > 0$: $16 - (x+8)\sqrt{4-x} \geq 0$, soit $(x+8)\sqrt{4-x} \leq 16$.

Cas d'égalité. Pour $x \in I$, $(x+8)\sqrt{4-x} = 16 \iff F_0(x) = 0$, et d'après 4. a), $F_0(x) = 0 \iff x = 0$. Vérification : $8 \times \sqrt{4} = 16$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $(x+8)\sqrt{4-x} \leq 16$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

5. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} F_0(x)$ et $\lim\limits_{x \to 4^-} F_0(x)$.

INDICE

Étudie séparément les deux facteurs $x+8$ et $\sqrt{4-x}$ dans chaque cas.

CORRIGÉ

Limite en $-\infty$. Quand x tend vers $-\infty$, $x+8$ tend vers $-\infty$ et $\sqrt{4-x}$ tend vers $+\infty$: leur produit tend vers $-\infty$, et $-\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}$ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} F_0(x) = +\infty.$$

Limite en 4^-. Quand x tend vers 4 par valeurs inférieures, $x+8$ tend vers 12 et $\sqrt{4-x}$ tend vers 0 : leur produit tend vers 0. Donc :

$$\lim_{x \to 4^-} F_0(x) = \frac{32}{3}.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_0(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4^-} F_0(x) = \frac{32}{3}$.

Exercice 2 6,5 pts

Des coefficients à la primitive, puis une équation

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2}.$$

1. a) 1 pts

Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

INDICE

Réduis au dénominateur $(x+1)^2$ et développe $(ax+b)(x+1)^2$. Il suffit ensuite que le numérateur obtenu ait les mêmes coefficients que $2x^3 + 3x^2 + 2$.

CORRIGÉ

Réduction au même dénominateur. Soit $x \in I$. Comme $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$:

$$\begin{aligned}(ax+b)(x+1)^2 + c \\ = ax^3 + (2a+b)x^2 \\ + (a+2b)x + b + c.\end{aligned}$$

Identification. Il suffit que ce numérateur ait les mêmes coefficients que $2x^3 + 3x^2 + 2$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a = 2, \quad 2a + b = 3, \\ a + 2b = 0, \quad b + c = 2.\end{aligned}$$

On obtient $a = 2$, puis $b = -1$ (et l'on vérifie que $a + 2b = 0$), enfin $c = 3$.

Vérification. $(2x-1)(x+1)^2 + 3 = 2x^3 + 3x^2 + 2$.

Conclusion. $a = 2, b = -1, c = 3$ et, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

1. b) 1 pts

Montrer que f est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2 - \frac{6}{(x+1)^3}.$$

En déduire les variations de f sur I.

INDICE

Dérive l'écriture obtenue à la question 1. a). Pour le signe, compare $(x+1)^3$ au nombre 3.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur $(x+1)^2$ ne s'annule pas sur I : elle est dérivable sur I. D'après 1. a), et comme la dérivée de $x \mapsto (x+1)^{-2}$ sur I est $x \mapsto -2(x+1)^{-3}$, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - 6(x+1)^{-3} \\ &= 2 - \frac{6}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2\left((x+1)^3 - 3\right)}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Signe de $f'(x)$. Pour $x \in I$, $(x+1)^3 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $(x+1)^3 - 3$. La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in I$, $(x+1)^3 \geq 3$ équivaut à $x + 1 \geq \sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire à $x \geq \sqrt[3]{3} - 1$.

Ainsi $f'(x) < 0$ sur $\left]-1, \sqrt[3]{3} - 1\right[$, $f'\left(\sqrt[3]{3} - 1\right) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\sqrt[3]{3} - 1, +\infty\right[$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $\left]-1, \sqrt[3]{3} - 1\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt[3]{3} - 1, +\infty\right[$.

2. a) 1 pts

Montrer que $f\left(\sqrt[3]{3}-1\right)=3\sqrt[3]{3}-3$, puis que :

$$\forall x \in I, \quad f(x)>0.$$

INDICE

Avec $x+1=\sqrt[3]{3}$, on a $(x+1)^2=\sqrt[3]{9}$. Écris $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$ comme une puissance de 3.

CORRIGÉ

Calcul de la valeur. Posons $x_1=\sqrt[3]{3}-1$, de sorte que $x_1+1=3^{\frac{1}{3}}$. On a $2x_1-1=2\sqrt[3]{3}-3$ et :

$$\begin{aligned}\frac{3}{(x_1+1)^2}&=\frac{3}{3^{\frac{2}{3}}}\\&=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}.\end{aligned}$$

D'après 1. a), $f(x_1)=2\sqrt[3]{3}-3+\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-3$.

Signe du minimum. $f(x_1)=3\left(\sqrt[3]{3}-1\right)>0$, car $3>1$ et la fonction cube est strictement croissante, donc $\sqrt[3]{3}>1$. D'après 1. b), f décroît sur $]-1,x_1]$ et croît sur $[x_1,+\infty[$: $f(x_1)$ est le minimum de f sur I.

Conclusion. $f\left(\sqrt[3]{3}-1\right)=3\sqrt[3]{3}-3$ et, pour tout $x\in I$, $f(x)\geq f(x_1)>0$.

2. b) 0,75 pts

Soit G la fonction définie sur I par $G(x)=x^2-x-\dfrac{3}{x+1}$. Vérifier que G est une primitive de f sur I.

INDICE

Écris $\dfrac{3}{x+1}$ comme $3(x+1)^{-1}$ avant de dériver, puis compare avec l'écriture de 1. a).

CORRIGÉ

Dérivabilité. G est la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle dont le dénominateur $x+1$ ne s'annule pas sur I : G est dérivable sur I.

Calcul de $G'(x)$. La dérivée de $x\mapsto -3(x+1)^{-1}$ sur I est $x\mapsto 3(x+1)^{-2}$, soit $x\mapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Soit $x\in I$:

$$\begin{aligned}G'(x)&=2x-1+\frac{3}{(x+1)^2}\\&=f(x),\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de 1. a).

Conclusion. G est dérivable sur I et $G'=f$ sur I : G est une primitive de f sur I (définition d'une primitive sur un intervalle).

2. c) 0,5 pts

En déduire la primitive F de f sur I telle que $F(0) = 1$.

INDICE

Les primitives de f sur I s'écrivent $G + k$: calcule $G(0)$.

CORRIGÉ

Forme des primitives. I est un intervalle et G est une primitive de f sur I : les primitives de f sur I sont les fonctions $G + k$, où $k \in \mathbb{R}$ (ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle).

Choix de la constante. Le réel 0 appartient à I et $G(0) = -3$. La condition $G(0) + k = 1$ donne $k = 4$. La primitive cherchée est unique (primitive prenant une valeur donnée en un point).

Conclusion. Pour tout $x \in I$:

$$F(x) = x^2 - x - \frac{3}{x+1} + 4.$$

3. a) 0,5 pts

Étudier le sens de variation de F sur I.

INDICE

Le sens de variation d'une fonction dérivable se lit sur le signe de sa dérivée.

CORRIGÉ

F est une primitive de f sur I : elle est dérivable sur I et $F' = f$. D'après 2. a), pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x) > 0.$$

Conclusion. F est strictement croissante sur I.

3. b) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$.

INDICE

Près de -1, seul le terme $-\dfrac{3}{x+1}$ pose question : quel est le signe de $x+1$? En $+\infty$, écris $x^2 - x = x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

CORRIGÉ

Limite en -1^+. Quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, $x+1$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc $-\dfrac{3}{x+1}$ tend vers $-\infty$. Comme $x^2 - x + 4$ tend vers 6 :

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour $x>0$, $x^2 - x = x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$: ce produit tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $\dfrac{3}{x+1}$ tend vers 0. Donc :

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to -1^+} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$.

3. c) 1 pts

Montrer que l'équation $F(x)=0$ admet une unique solution α dans I, et que $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$.

INDICE

F est continue et strictement croissante sur I : pense au théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone. Calcule ensuite $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

CORRIGÉ

Existence et unicité. F est dérivable, donc continue, et strictement croissante sur l'intervalle I (3. a)). Elle réalise donc une bijection de I sur l'intervalle de bornes ses limites en -1^+ et en $+\infty$, c'est-à-dire, d'après 3. b), sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Le réel 0 a donc un unique antécédent α dans I.

Localisation. On calcule :

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 6 + 4 \\ &= -\frac{5}{4} < 0, \end{aligned}$$

et $F(0) = -3 + 4 = 1 > 0$. Ainsi $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) < F(\alpha) < F(0)$, et comme F est strictement croissante, $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$.

Conclusion. L'équation $F(x)=0$ admet une unique solution α dans I, et $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$.

Exercice 3 5,75 pts

Une primitive étudiée sans formule

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}.$$

Aucune formule du cours ne fournit une primitive de φ : on étudie l'une d'elles sans l'expliciter.

1. 0,75 pts

Montrer qu'il existe une unique primitive Φ de φ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi(0) = 0$.

INDICE

Deux résultats du cours servent : l'un donne des primitives à une fonction continue sur un intervalle, l'autre fixe la constante. Commence par la continuité de φ.

CORRIGÉ

Continuité de φ. Pour tout réel x, $1 + x^4 \geq 1 > 0$. La fonction φ est l'inverse d'une fonction polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: elle est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Existence. D'après l'existence de primitives pour une fonction continue, φ, continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Unicité. Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 (primitive prenant une valeur donnée en un point).

Conclusion. Il existe une unique primitive Φ de φ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi(0) = 0$.

2. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de Φ sur $\mathbb{R}$, puis donner le signe de $\Phi(x)$ selon le signe de x.

INDICE

Que vaut $\Phi'(x)$? Utilise ensuite la valeur $\Phi(0) = 0$.

CORRIGÉ

Variations. Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = \varphi(x) > 0.$$

Donc Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Signe. Comme $\Phi(0) = 0$, la stricte croissance donne $\Phi(x) < \Phi(0) = 0$ pour $x < 0$, et $\Phi(x) > \Phi(0) = 0$ pour $x > 0$.

Conclusion. Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(x)$ a le signe de x : strictement négatif si $x < 0$, nul si $x = 0$, strictement positif si $x > 0$.

3. 1 pts

Montrer que $\Phi(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, et que $\Phi(x) \geq x$ pour tout $x \leq 0$.

INDICE

Étudie le sens de variation de $x \mapsto x - \Phi(x)$ sur $\mathbb{R}$, en comparant $\varphi(x)$ à 1. Attention : la conclusion n'a pas le même sens de part et d'autre de 0.

CORRIGÉ

Fonction auxiliaire. Soit D_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $D_1(x) = x - \Phi(x)$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} D_1'(x) &= 1 - \varphi(x) \\ &= \frac{x^4}{1+x^4} \geq 0. \end{aligned}$$

Variations. D_1 est donc croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $D_1(0) = 0 - \Phi(0) = 0$.

Comparaison avec $D_1(0)$.

- Pour $x \geq 0$: $D_1(x) \geq D_1(0) = 0$, donc $\Phi(x) \leq x$.
- Pour $x \leq 0$: $D_1(x) \leq D_1(0) = 0$, donc $\Phi(x) \geq x$.

Conclusion. $\Phi(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, et $\Phi(x) \geq x$ pour tout $x \leq 0$.

4. a) 1 pts

Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(x) \geq \arctan x.$$

INDICE

Compare $\varphi(x)$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$ lorsque $0 \leq x \leq 1$: lequel des deux nombres x^4 et x^2 est le plus grand ?

CORRIGÉ

Fonction auxiliaire. Soit D_2 la fonction définie sur $[0,1]$ par $D_2(x) = \Phi(x) - \arctan x$. Elle est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} D_2'(x) &= \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^4)(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$, et le dénominateur est strictement positif : $D_2'(x) \geq 0$.

Variations. D_2 est croissante sur $[0,1]$ et $D_2(0) = \Phi(0) - \arctan 0 = 0$. Donc $D_2(x) \geq D_2(0) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1]$, $\Phi(x) \geq \arctan x$.

4. b) 0,25 pts

En déduire un encadrement de $\Phi(1)$.

INDICE

Utilise la question 4. a) en $x = 1$, puis la question 3.

CORRIGÉ

Minoration. La question 4. a) en $x = 1$ donne $\Phi(1) \geq \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Majoration. La question 3 en $x = 1 \geq 0$ donne $\Phi(1) \leq 1$.

Conclusion.

$$\frac{\pi}{4} \leq \Phi(1) \leq 1.$$

5. 1 pts

Soit K la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $K(x) = \Phi(x) + \dfrac{1}{3x^3}$. Montrer que K est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Calcule $K'(x)$ et réduis $\varphi(x) - \dfrac{1}{x^4}$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivée. K est la somme de Φ et d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$: elle y est dérivable. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^{-3}$ est $x \mapsto -x^{-4}$. Donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} K'(x) &= \varphi(x) - \frac{1}{x^4} \\ &= \frac{x^4 - (1 + x^4)}{x^4(1 + x^4)} \\ &= -\frac{1}{x^4(1 + x^4)}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x \geq 1$, $x^4(1 + x^4) > 0$, donc $K'(x) < 0$.

Conclusion. K est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

6. 0,5 pts

En déduire que :

$$\forall x \geq 1, \quad \Phi(x) \leq \Phi(1) + \frac{1}{3}.$$

INDICE

Compare $K(x)$ et $K(1)$, puis reviens à $\Phi(x)$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 1$. D'après la question 5, K est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc $K(x) \leq K(1)$, c'est-à-dire :

$$\Phi(x) + \frac{1}{3x^3} \leq \Phi(1) + \frac{1}{3}.$$

Comme $\frac{1}{3x^3} > 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leq \Phi(1) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3} \\ &\leq \Phi(1) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 1$, $\Phi(x) \leq \Phi(1) + \frac{1}{3}$.

7. 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq \frac{4}{3}.$$

INDICE

Rassemble les majorations déjà obtenues : elles ne portent pas toutes sur le même intervalle.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 0$.

Minoration. D'après la question 2, $\Phi(x) \geq 0$.

Majoration, selon la position de x.

- Si $0 \leq x \leq 1$, la question 3 donne $\Phi(x) \leq x \leq 1 \leq \frac{4}{3}$.
- Si $x \geq 1$, les questions 6 et 4. b) donnent $\Phi(x) \leq \Phi(1) + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Conclusion.

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq \frac{4}{3}.$$

Exercice 4 4,75 pts

Des puissances de la tangente à un encadrement de π

On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'on considère les fonctions g et f définies sur I par :

$$g(x) = \tan^2 x, \qquad f(x) = \tan^4 x.$$

1. 0,75 pts

Déterminer une primitive G de g sur I, en écrivant $g(x)$ à l'aide de $1 + \tan^2 x$.

INDICE

Ajoute puis retranche 1. Le tableau des primitives usuelles donne une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ sur un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[$: quelle valeur de m convient ici ?

CORRIGÉ

Écriture de g. Pour tout $x \in I$:

$$g(x) = \left(1 + \tan^2 x\right) - 1.$$

Primitives des deux termes. L'intervalle I est de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[$ avec $m = 0$. D'après le tableau des primitives des fonctions usuelles, $x \mapsto \tan x$ est une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ sur I, et $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur I.

Conclusion. D'après les primitives d'une somme et du produit par un réel, la fonction G définie sur I par

$$G(x) = \tan x - x$$

est une primitive de g sur I.

2. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \left(1 + \tan^2 x\right)\tan^2 x - g(x)$.

INDICE

Développe le produit du membre de droite.

CORRIGÉ

Soit $x \in I$:

$$\begin{aligned}&\left(1 + \tan^2 x\right)\tan^2 x - g(x)\\ &= \tan^2 x + \tan^4 x - \tan^2 x\\ &= \tan^4 x = f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \left(1 + \tan^2 x\right)\tan^2 x - g(x)$.

2. b) 1 pts

En déduire la primitive F de f sur I telle que $F(0) = 0$, et montrer que, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$$

INDICE

Dans $\left(1 + \tan^2 x\right) \tan^2 x$, reconnais une forme $u' \, u^n$ en posant $u(x) = \tan x$. Combine ensuite avec la question 1, puis ajuste la constante.

CORRIGÉ

Le terme $\left(1 + \tan^2 x\right) \tan^2 x$. Posons $u(x) = \tan x$: u est dérivable sur I et $u'(x) = 1 + \tan^2 x$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $\left(1 + \tan^2 x\right) \tan^2 x = u'(x) \, u(x)^2$. D'après les primitives des formes composées usuelles (forme $u' \, u^n$ avec $n = 2$, sans condition), $x \mapsto \dfrac{\tan^3 x}{3}$ en est une primitive sur I.

Toutes les primitives de f. D'après 2. a), la question 1 et les primitives d'une somme et du produit par un réel, $x \mapsto \dfrac{\tan^3 x}{3} - (\tan x - x)$ est une primitive de f sur I. Comme I est un intervalle, les primitives de f sur I sont les fonctions F_k, où k décrit $\mathbb{R}$, définies sur I par :

$$F_k(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + k.$$

Choix de la constante. $0 \in I$ et $\tan 0 = 0$: la condition $F(0) = 0$ donne $k = 0$. Cette primitive est unique (primitive prenant une valeur donnée en un point).

Conclusion. Pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x.$$

3. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de G sur I, puis montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan x \geq x.$$

INDICE

Que vaut $G'(x)$? Calcule aussi $G(0)$.

CORRIGÉ

Variations de G. G est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $G'(x) = g(x) = \tan^2 x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$. Donc G est strictement croissante sur I.

Comparaison avec $G(0)$. Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) \geq G(0) = 0$, c'est-à-dire $\tan x - x \geq 0$.

Conclusion. G est strictement croissante sur I et, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geq x$.

4. 0,75 pts

Étudier le sens de variation de F sur I. En déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan x \leq x + \frac{\tan^3 x}{3}.$$

INDICE

Raisonne comme à la question 3, avec $F' = f$ et $F(0) = 0$, puis isole $\tan x$.

CORRIGÉ

Variations de F. F est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x) = \tan^4 x \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$. Donc F est strictement croissante sur I.

Comparaison avec $F(0)$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) \geq F(0) = 0$, soit :

$$\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x \geq 0.$$

Conclusion. F est strictement croissante sur I et, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan x \leq x + \frac{\tan^3 x}{3}.$$

5. 1 pts

En utilisant les questions 3 et 4 avec $x = \frac{\pi}{6}$, montrer que :

$$\frac{16\sqrt{3}}{9} \leq \pi \leq 2\sqrt{3}.$$

INDICE

On a $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calcule $\tan^3 \frac{\pi}{6}$, écris les deux inégalités, puis isole π dans chacune.

CORRIGÉ

Valeurs en $\frac{\pi}{6}$. Le réel $\frac{\pi}{6}$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc :

$$\tan^3 \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Majoration de π. La question 3 en $x = \frac{\pi}{6}$ donne $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\pi \leq 2\sqrt{3}$.

Minoration de π. La question 4 en $x = \frac{\pi}{6}$ donne $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{27}$, puisque $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{27}$. Donc :

$$\frac{\pi}{6} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{8\sqrt{3}}{27},$$

puis, en multipliant par $6 > 0$, $\pi \geq \frac{48\sqrt{3}}{27} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Conclusion.

$$\frac{16\sqrt{3}}{9} \leq \pi \leq 2\sqrt{3}.$$

Exercice 5 6 pts

Une primitive fixée par une tangente

On considère les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}, \qquad h(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Le plan est muni d'un repère ; on parle de la courbe représentative d'une fonction dans ce repère.

1. a) 0,75 pts

Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

INDICE

h est un quotient de deux polynômes : vérifie que le dénominateur ne s'annule pas, puis applique la formule de la dérivée d'un quotient.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout réel x, $1+x^2 \geq 1 > 0$. La fonction h est le quotient de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de dérivation d'un quotient, avec $(x)' = 1$ et $\left(1+x^2\right)' = 2x$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

1. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = h'(x) + \frac{1}{1+x^2}.$$

INDICE

Réduis le membre de droite au dénominateur $\left(1+x^2\right)^2$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 1. a) :

$$\begin{aligned} & h'(x) + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - x^2 + \left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{2}{\left(1+x^2\right)^2} = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = h'(x) + \frac{1}{1+x^2}$.

2. 0,75 pts

En déduire que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x}{1+x^2} + \arctan x + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de h' sur $\mathbb{R}$ est connue sans calcul. Pour le second terme, pense à la fonction $\arctan$. Une primitive trouvée, comment obtient-on toutes les autres ?

CORRIGÉ

Une primitive de f. h est dérivable sur $\mathbb{R}$: c'est une primitive de h' sur $\mathbb{R}$. D'après le cours (primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$), $\arctan$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. D'après 1. b) et les primitives d'une somme, $h + \arctan$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Toutes les primitives. $\mathbb{R}$ est un intervalle : les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $h + \arctan + k$, où $k \in \mathbb{R}$ (ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle).

Conclusion. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2} + \arctan x + k,$$

où k décrit $\mathbb{R}$.

3. 1 pts

Montrer qu'il existe une unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet, au point d'abscisse 1, une tangente passant par l'origine du repère, et que, pour tout réel x :

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

INDICE

Pour une primitive F_k, écris l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 : son coefficient directeur est $F_k'(1) = f(1)$. Traduis « passe par l'origine » en une condition sur $F_k(1)$.

CORRIGÉ

Tangente d'une primitive. Soit $k \in \mathbb{R}$ et F_k la primitive $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x + k$ de la question 2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_k'(1) = f(1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + F_k(1).$$

Passage par l'origine. Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $0 = -\dfrac{1}{2} + F_k(1)$, c'est-à-dire $F_k(1) = \dfrac{1}{2}$. Or $F_k(1) = \dfrac{1}{2} + \arctan 1 + k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4} + k$. Ainsi :

$$F_k(1) = \frac{1}{2} \iff k = -\frac{\pi}{4}.$$

Existence et unicité. D'après la question 2, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions F_k, $k \in \mathbb{R}$, et une seule valeur de k convient : c'est l'unique primitive de f qui vaut $\dfrac{1}{2}$ en 1 (primitive prenant une valeur donnée en un point).

Conclusion. Il existe une unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition, et, pour tout réel x :

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

4. 1 pts

Étudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Le signe de F' se lit sur f. Pour $x \neq 0$, écris $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$.

CORRIGÉ

Variations. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x) > 0,$$

car $f(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limite du quotient. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$. Quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), $x + \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), donc $\dfrac{x}{1+x^2}$ tend vers 0.

Limites de F. Avec les limites rappelées de $\arctan$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}, \\ \lim_{x\to-\infty} F(x) &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\dfrac{3\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

5. `0,5 pts`

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{3\pi}{4} < F(x) < \frac{\pi}{4}.$$

INDICE

Fixe x. Compare $F(x)$ à $F(x+1)$, puis $F(x+1)$ à $F(t)$ pour $t \geq x+1$, et fais tendre t vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Majoration stricte. Pour tout $t \geq x+1$, la croissance de F donne $F(t) \geq F(x+1)$. Par passage à la limite dans cette inégalité large quand t tend vers $+\infty$, on obtient $\frac{\pi}{4} \geq F(x+1)$. Comme F est strictement croissante et $x < x+1$:

$$F(x) < F(x+1) \leq \frac{\pi}{4}.$$

Minoration stricte. De même, pour tout $t \leq x-1$, $F(t) \leq F(x-1)$. Quand t tend vers $-\infty$, on obtient :

$$-\frac{3\pi}{4} \leq F(x-1) < F(x).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $-\frac{3\pi}{4} < F(x) < \frac{\pi}{4}$.

6. 0,75 pts

Soit A la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $A(x)=\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que A est constante sur $]0,+\infty[$, puis que :

$$\forall x>0,\quad A(x)=\frac{\pi}{2}.$$

INDICE

Dérive $x\mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ comme une composée, puis calcule $A'(x)$. Quelle conclusion tire-t-on d'une dérivée nulle sur un intervalle ?

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: par composition et somme, A est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Dérivée. Soit $x>0$. Par dérivation d'une composée :

$$\begin{aligned}A'(x)&=\frac{1}{1+x^2}\\&\quad-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\\&=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0.\end{aligned}$$

Constance. Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante : A est constante sur $]0,+\infty[$, de valeur $A(1)=2\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. A est constante sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $A(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 0,75 pts

En déduire que :

$$\forall t > 0, \quad \arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

INDICE

Écris l'inégalité $F(x) < \frac{\pi}{4}$ de la question 5 pour $x > 0$, remplace $\arctan x$ grâce à la question 6, puis pose $t = \frac{1}{x}$.

CORRIGÉ

Soit $t > 0$; posons $x = \frac{1}{t}$, qui est strictement positif.

Inégalité de la question 5. On a $F(x) < \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire :

$$\frac{x}{1+x^2} + \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$

Remplacement de $\arctan x$. Comme $x > 0$, la question 6 donne $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$. L'inégalité devient $\frac{x}{1+x^2} < \arctan t$.

Retour à t. Comme $x = \frac{1}{t}$:

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t}{t^2+1}.$$

Conclusion.

$$\forall t > 0, \quad \arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$