BURHAN

Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Entraînement	8

Exercice 1

Ajuster la constante dans deux formes composées

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{(3x^2+2)^4}.$$

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en vérifiant la condition de la forme utilisée.

INDICE

Avec $u(x) = 3x^2 + 2$, le numérateur x n'est pas $u'(x)$: écris $x = \lambda\, u'(x)$. Vérifie ensuite que u ne s'annule pas.

2.

Vérifier en dérivant la primitive obtenue à la question 1.

INDICE

Écris-la sous la forme $\lambda\, u^n$ avec $u(x) = 3x^2 + 2$, puis dérive avec $(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$, valable où u ne s'annule pas.

3.

Soit g la fonction définie sur $]-3, +\infty[$ par

$$g(x) = 5x^2\sqrt{x^3+27}.$$

Déterminer une primitive de g sur $]-3, +\infty[$.

INDICE

Pose $u(x) = x^3 + 27$. Sur quel intervalle a-t-on $u(x) > 0$? Écris ensuite $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 2

Linéariser avant de chercher une primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 6\cos^2(2x) - \sin(2x)\cos(2x).$$

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 3 + 3\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$

INDICE

Utilise $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin a \cos a = \dfrac{\sin(2a)}{2}$, avec $a = 2x$.

2.

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Chaque terme non constant est de la forme $\cos(ax+b)$ ou $\sin(ax+b)$: pars d'une primitive de $\cos$ ou de $\sin$, puis divise par $a = 4$.

3.

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

INDICE

Calcule $F(0)$ en te rappelant que $\cos 0 = 1$, puis ajuste la constante k.

Exercice 3

Séparer une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 13}{(x-3)^2}.$$

1.

Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $x \in]3, +\infty[$:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{(x-3)^2}.$$

INDICE

Réduis $\alpha + \dfrac{\beta}{(x-3)^2}$ au même dénominateur et développe. Il suffit ensuite que les deux numérateurs aient les mêmes coefficients.

2.

En déduire une primitive F de f sur $]3, +\infty[$.

INDICE

Le second terme est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x - 3$. Quelle condition sur u faut-il vérifier ?

3.

Déterminer la primitive de f sur $]3, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 4.

INDICE

Calcule $F(4)$, puis écris la condition sur $F + k$ au point 4.

Exercice 4

La primitive unique d'une forme composée trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^3}.$$

1.

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Encadre $2+\sin x$ à partir de l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$.

2.

Déterminer une primitive G de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $u(x) = 2+\sin x$: f est de la forme $u'\,u^n$ avec un entier n négatif. Quelle condition dois-tu vérifier ?

3.

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$, puis calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Calcule $G(0)$ avec $\sin 0 = 0$, puis ajuste la constante k.

Exercice 5

Quand le domaine n'est pas un intervalle

On note

$$D = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

et on considère la fonction f définie sur D par

$$f(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}.$$

Soit F et G les fonctions définies sur D par

$$F(x) = -\frac{3}{2(2x+1)}$$

et, si $x < -\frac{1}{2}$:

$$G(x) = -\frac{3}{2(2x+1)} + 1,$$

si $x > -\frac{1}{2}$:

$$G(x) = -\frac{3}{2(2x+1)} - 2.$$

1.

Montrer que F et G sont dérivables sur D et que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

INDICE

Dérive F comme $-\frac{3}{2}(2x+1)^{-1}$. Sur chacun des deux intervalles ouverts, G ne diffère de F que d'une constante.

2.

Montrer que la fonction $G - F$ n'est pas constante sur D.

INDICE

Calcule $G(x) - F(x)$ pour un réel x choisi de chaque côté de $-\frac{1}{2}$.

3.

Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas F02, le théorème qui décrit l'ensemble des primitives.

INDICE

Relis l'hypothèse de F02 sur l'ensemble où l'on travaille. L'ensemble D en est-il un exemple ?

Exercice 6

Trouver les coefficients d'une primitive

On note $I = \left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et on considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{6x+7}{\sqrt{2x+3}}.$$

On cherche une primitive de f sur I de la forme $F(x) = (ax+b)\sqrt{2x+3}$, où a et b sont deux réels.

1.

Justifier qu'une telle fonction F est dérivable sur I, et montrer que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \frac{3ax + 3a + b}{\sqrt{2x+3}}.$$

INDICE

Pour $x \in I$, $2x+3 > 0$. Dérive le produit, puis réduis tout au dénominateur $\sqrt{2x+3}$.

2.

Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur I.

INDICE

Il suffit que les numérateurs soient égaux pour tout $x \in I$. Identifie d'abord le coefficient de x, puis le terme constant.

3.

En déduire la primitive de f sur I qui prend la valeur 4 en 3.

INDICE

Le point 3 appartient-il à I ? Calcule ensuite $F(3)$ avec $\sqrt{9} = 3$.

Exercice 7

La fonction tan comme primitive, sur un intervalle décalé

On note $I = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ et on considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = 3 + 3\tan^2(2x).$$

1.

Vérifier que, pour tout $x \in I$, le réel $2x$ appartient à un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[$, avec un entier m à préciser.

INDICE

Multiplie par 2 l'encadrement $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

2.

En déduire une primitive F de f sur I.

INDICE

Reconnais la forme $u'\,(1 + \tan^2 u)$ avec $u(x) = 2x$, et ajuste le facteur 3 avec $u'(x) = 2$.

3.

Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. Expliquer ensuite pourquoi la formule obtenue ne définit pas une primitive de f sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

INDICE

Calcule $\tan\pi$. Pour la seconde partie, regarde ce que devient $2x$ quand $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8

Une primitive connue seulement par sa dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 5}}.$$

Aucune formule du cours ne donne une primitive de f.

1.

Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

INDICE

Justifie d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}$: que vaut au moins $x^4 + 5$? Cherche ensuite le résultat du cours qui donne des primitives, puis celui qui en fixe une.

2.

Étudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$, puis montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout réel x.

INDICE

On ne connaît pas F, mais on connaît sa dérivée. Le dénominateur de $f(x)$ est positif : de quoi dépend le signe de $f(x)$?

3.

Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \quad F(x) \leq \frac{x^2}{2\sqrt{5}}.$$

INDICE

Compare d'abord $f(x)$ et $\frac{x}{\sqrt{5}}$ pour $x \geq 0$. Étudie ensuite la différence entre $x \mapsto \frac{x^2}{2\sqrt{5}}$ et F : que vaut-elle en 0 ?