BURHAN

Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Entraînement	8

Exercice 1

Ajuster la constante dans deux formes composées

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{(3x^2+2)^4}.$$

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en vérifiant la condition de la forme utilisée.

INDICE

Avec $u(x) = 3x^2 + 2$, le numérateur x n'est pas $u'(x)$: écris $x = \lambda\, u'(x)$. Vérifie ensuite que u ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x) = 3x^2 + 2$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 6x$, donc $x = \dfrac{1}{6}\, u'(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{6}\, u'(x)\, u(x)^{-4}.$$

Condition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \geq 2 > 0$: u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La ligne $u'\, u^n$ ($n \leq -2$) des formes composées usuelles (F09) s'applique avec $n = -4$: $\dfrac{u^{-3}}{-3}$ est une primitive de $u'\, u^{-4}$ sur $\mathbb{R}$.

Primitive. Par linéarité (F07), on définit F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{6} \times \frac{(3x^2+2)^{-3}}{-3} \\ &= -\frac{1}{18(3x^2+2)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction $F : x \mapsto -\dfrac{1}{18(3x^2+2)^3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Vérifier en dérivant la primitive obtenue à la question 1.

INDICE

Écris-la sous la forme $\lambda\, u^n$ avec $u(x) = 3x^2 + 2$, puis dérive avec $(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$, valable où u ne s'annule pas.

CORRIGÉ

On a $F = -\dfrac{1}{18}\, u^{-3}$, où $u : x \mapsto 3x^2 + 2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la dérivée de u^{-3} est $-3\, u'\, u^{-4}$, avec $u'(x) = 6x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3 \times 6x}{18}\, (3x^2+2)^{-4} \\ &= \frac{x}{(3x^2+2)^4} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $F' = f$ sur $\mathbb{R}$: la primitive obtenue à la question 1 est confirmée.

3.

Soit g la fonction définie sur $]-3,+\infty[$ par

$$g(x)=5x^2\sqrt{x^3+27}.$$

Déterminer une primitive de g sur $]-3,+\infty[$.

INDICE

Pose $u(x)=x^3+27$. Sur quel intervalle a-t-on $u(x)>0$? Écris ensuite $\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$.

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x)=x^3+27$: u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=3x^2$, donc $5x^2=\dfrac{5}{3}\,u'(x)$.

Signe de u. Soit $x>-3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x^3>(-3)^3=-27$, c'est-à-dire $u(x)>0$. Ainsi, pour tout $x\in\,]-3,+\infty[$:

$$g(x)=\frac{5}{3}\,u'(x)\,u(x)^{\frac{1}{2}}.$$

Primitive. La condition $u>0$ de la ligne $u'\,u^r$ des formes composées usuelles (F09), avec $r=\dfrac{1}{2}$, est vérifiée sur cet intervalle : $\dfrac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $u'\,u^{\frac{1}{2}}$. Par linéarité (F07), on définit G sur $]-3,+\infty[$ par :

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}\,u(x)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{10}{9}\,(x^3+27)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Avec une racine : $G(x)=\dfrac{10}{9}\,(x^3+27)\sqrt{x^3+27}$.

Conclusion. G est une primitive de g sur $]-3,+\infty[$.

Exercice 2

Linéariser avant de chercher une primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 6\cos^2(2x) - \sin(2x)\cos(2x).$$

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 3 + 3\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$

INDICE

Utilise $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin a \cos a = \dfrac{\sin(2a)}{2}$, avec $a = 2x$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $a = 2x$. Les formules de duplication donnent :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2},$$
$$\sin a \cos a = \frac{\sin(2a)}{2}.$$

Avec $2a = 4x$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 \times \frac{1+\cos(4x)}{2} \\ &\quad - \frac{\sin(4x)}{2} \\ &= 3 + 3\cos(4x) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sin(4x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = 3 + 3\cos(4x) - \dfrac{1}{2}\sin(4x)$.

2.

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Chaque terme non constant est de la forme $\cos(ax+b)$ ou $\sin(ax+b)$: pars d'une primitive de $\cos$ ou de $\sin$, puis divise par $a=4$.

CORRIGÉ

On cherche une primitive de chaque terme sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto 3x$ est une primitive de la constante 3.
- D'après les formes composées usuelles (F09) avec $a=4$, $x \mapsto \dfrac{1}{4}\sin(4x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(4x)$.
- De même, $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\cos(4x)$ est une primitive de $x \mapsto \sin(4x)$.

Le coefficient de $\sin(4x)$ dans f est $-\dfrac{1}{2}$, et $-\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Conclusion. Par linéarité (F07), la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 3x + \frac{3}{4}\sin(4x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

INDICE

Calcule $F(0)$ en te rappelant que $\cos 0 = 1$, puis ajuste la constante k.

CORRIGÉ

D'après l'ensemble des primitives sur un intervalle (F02), les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Comme $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$, on a $F(0) = 0 + 0 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$. La condition $F(0)+k=0$ donne $k = -\dfrac{1}{8}$.

Conclusion. D'après la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04), cette primitive est unique. C'est la fonction F_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_0(x) = 3x + \frac{3}{4}\sin(4x) + \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{8}.$$

Exercice 3

Séparer une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]3, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 13}{(x-3)^2}.$$

1.

Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $x \in]3, +\infty[$:

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{(x-3)^2}.$$

INDICE

Réduis $\alpha + \dfrac{\beta}{(x-3)^2}$ au même dénominateur et développe. Il suffit ensuite que les deux numérateurs aient les mêmes coefficients.

CORRIGÉ

Soit $x > 3$. On réduit $\alpha + \dfrac{\beta}{(x-3)^2}$ au dénominateur $(x-3)^2$; son numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &\alpha(x-3)^2 + \beta \\ &= \alpha x^2 - 6\alpha x + 9\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Il suffit que les deux numérateurs aient les mêmes coefficients : $\alpha = 2$, $-6\alpha = -12$ et $9\alpha + \beta = 13$. On obtient $\alpha = 2$ et $\beta = -5$.

Vérification. $2(x-3)^2 - 5 = 2x^2 - 12x + 13$.

Conclusion. Avec $\alpha = 2$ et $\beta = -5$, pour tout $x > 3$:

$$f(x) = 2 - \frac{5}{(x-3)^2}.$$

2.

En déduire une primitive F de f sur $]3, +\infty[$.

INDICE

Le second terme est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x - 3$. Quelle condition sur u faut-il vérifier ?

CORRIGÉ

Posons $u(x) = x - 3$. La fonction u est dérivable sur $]3, +\infty[$, avec $u'(x) = 1$, et $u(x) > 0$ sur cet intervalle : u ne s'annule pas.

D'après la ligne $\dfrac{u'}{u^2}$ des formes composées usuelles (F09), $-\dfrac{1}{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ sur $]3, +\infty[$. Or, pour tout $x > 3$, $f(x) = 2 - 5\,\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$.

Conclusion. Par linéarité (F07), la fonction F définie sur $]3, +\infty[$ par

$$F(x) = 2x + \frac{5}{x - 3}$$

est une primitive de f sur cet intervalle.

3.

Déterminer la primitive de f sur $]3, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 4.

INDICE

Calcule $F(4)$, puis écris la condition sur $F + k$ au point 4.

CORRIGÉ

Le point 4 appartient à $]3, +\infty[$. D'après l'ensemble des primitives sur un intervalle (F02), les primitives de f sur cet intervalle sont les fonctions $F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

On a $F(4) = 8 + 5 = 13$. La condition $F(4) + k = 0$ donne $k = -13$.

Conclusion. D'après la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04), la primitive cherchée est unique :

$$x \mapsto 2x + \frac{5}{x - 3} - 13.$$

Exercice 4

La primitive unique d'une forme composée trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^3}.$$

1.

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Encadre $2+\sin x$ à partir de l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc :

$$1 \leq 2+\sin x \leq 3.$$

Ainsi $(2+\sin x)^3 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas : f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer une primitive G de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $u(x) = 2+\sin x$: f est de la forme $u'\,u^n$ avec un entier n négatif. Quelle condition dois-tu vérifier ?

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x) = 2+\sin x$: u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \cos x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u'(x)\,u(x)^{-3}$.

Condition. D'après la question 1, u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La ligne $u'\,u^n$ ($n \leq -2$) des formes composées usuelles (F09) s'applique avec $n = -3$.

Conclusion. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{(2+\sin x)^{-2}}{-2} \\ &= -\frac{1}{2(2+\sin x)^2} \end{aligned}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$, puis calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Calcule $G(0)$ avec $\sin 0 = 0$, puis ajuste la constante k.

CORRIGÉ

D'après l'ensemble des primitives sur un intervalle (F02), les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Constante. Comme $\sin 0 = 0$, on a $G(0) = -\dfrac{1}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{8}$. La condition $G(0) + k = 0$ donne $k = \dfrac{1}{8}$. D'après la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04), la primitive cherchée est unique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(2 + \sin x)^2}.$$

Calcul de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Comme $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{18} \\ &= \frac{9 - 4}{72} \\ &= \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

Conclusion. $F(x) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2(2 + \sin x)^2}$ pour tout réel x, et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{5}{72}$.

Exercice 5

Quand le domaine n'est pas un intervalle

On note

$$D = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

et on considère la fonction f définie sur D par

$$f(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}.$$

Soit F et G les fonctions définies sur D par

$$F(x) = -\frac{3}{2(2x+1)}$$

et, si $x < -\frac{1}{2}$:

$$G(x) = -\frac{3}{2(2x+1)} + 1,$$

si $x > -\frac{1}{2}$:

$$G(x) = -\frac{3}{2(2x+1)} - 2.$$

1.

Montrer que F et G sont dérivables sur D et que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

INDICE

Dérive F comme $-\frac{3}{2}(2x+1)^{-1}$. Sur chacun des deux intervalles ouverts, G ne diffère de F que d'une constante.

CORRIGÉ

Dérivée de F. Pour tout $x \in D$, $2x+1 \neq 0$. Donc $F : x \mapsto -\frac{3}{2}(2x+1)^{-1}$ est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{3}{2} \times (-1) \\ &\quad \times 2\,(2x+1)^{-2} \\ &= \frac{3}{(2x+1)^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Dérivée de G. Sur l'intervalle ouvert $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, $G = F + 1$; sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $G = F - 2$. Sur chacun de ces intervalles, G est donc dérivable et $G' = F' = f$.

Conclusion. F et G sont dérivables sur D, et $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

2.

Montrer que la fonction $G - F$ n'est pas constante sur D.

INDICE

Calcule $G(x) - F(x)$ pour un réel x choisi de chaque côté de $-\frac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Il suffit de trouver deux points de D où $G - F$ prend des valeurs différentes.

- Comme $-1 < -\frac{1}{2}$, on a $(G - F)(-1) = 1$.
- Comme $0 > -\frac{1}{2}$, on a $(G - F)(0) = -2$.

Conclusion. Comme $1 \neq -2$, la fonction $G - F$ n'est pas constante sur D.

3.

Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas F02, le théorème qui décrit l'ensemble des primitives.

INDICE

Relis l'hypothèse de F02 sur l'ensemble où l'on travaille. L'ensemble D en est-il un exemple ?

CORRIGÉ

Hypothèse de F02. Le théorème sur l'ensemble des primitives (F02) suppose que l'on travaille sur un **intervalle** I.

D **n'est pas un intervalle.** Les réels -1 et 0 appartiennent à D, mais $-\frac{1}{2}$, situé entre eux, n'y appartient pas. F02 ne s'applique donc pas sur D : il n'y a aucune contradiction.

Sur chaque intervalle. F02 s'applique en revanche sur chacun des deux intervalles qui composent D : $G - F$ y est bien constante, égale à 1 à gauche et à -2 à droite.

Conclusion. Le résultat ne contredit pas F02. Les primitives de f sur D s'obtiennent en ajoutant à F une constante sur chaque intervalle, les deux constantes étant indépendantes.

Exercice 6

Trouver les coefficients d'une primitive

On note $I = \left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et on considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{6x+7}{\sqrt{2x+3}}.$$

On cherche une primitive de f sur I de la forme $F(x) = (ax+b)\sqrt{2x+3}$, où a et b sont deux réels.

1.

Justifier qu'une telle fonction F est dérivable sur I, et montrer que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \frac{3ax+3a+b}{\sqrt{2x+3}}.$$

INDICE

Pour $x \in I$, $2x+3 > 0$. Dérive le produit, puis réduis tout au dénominateur $\sqrt{2x+3}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout $x \in I$, $2x+3 > 0$. La fonction $x \mapsto 2x+3$ est dérivable et strictement positive sur I, donc $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable sur I, de dérivée :

$$x \mapsto \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

Par produit, F est dérivable sur I.

Calcul. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\sqrt{2x+3} + \frac{ax+b}{\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{a(2x+3)+ax+b}{\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{3ax+3a+b}{\sqrt{2x+3}}. \end{aligned}$$

Conclusion. F est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = \dfrac{3ax+3a+b}{\sqrt{2x+3}}$.

2.

Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur I.

INDICE

Il suffit que les numérateurs soient égaux pour tout $x \in I$. Identifie d'abord le coefficient de x, puis le terme constant.

CORRIGÉ

Condition suffisante. D'après la question 1, il suffit que $3ax + 3a + b = 6x + 7$ pour tout $x \in I$. Il suffit donc que :

$$3a = 6 \quad \text{et} \quad 3a + b = 7.$$

On obtient $a = 2$ et $b = 1$.

Vérification. Avec ces valeurs, la question 1 donne, pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = \frac{6x + 7}{\sqrt{2x + 3}} = f(x).$$

Conclusion. Pour $a = 2$ et $b = 1$, la fonction F définie sur I par

$$F(x) = (2x + 1)\sqrt{2x + 3}$$

est une primitive de f sur I.

3.

En déduire la primitive de f sur I qui prend la valeur 4 en 3.

INDICE

Le point 3 appartient-il à I ? Calcule ensuite $F(3)$ avec $\sqrt{9} = 3$.

CORRIGÉ

Le point 3 appartient à I, et $F(3) = 7 \times \sqrt{9} = 21$.

D'après l'ensemble des primitives sur un intervalle (F02), les primitives de f sur I sont les fonctions $F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. La condition $21 + k = 4$ donne $k = -17$.

Conclusion. D'après la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04), la primitive cherchée est unique :

$$x \mapsto (2x + 1)\sqrt{2x + 3} - 17.$$

Exercice 7

La fonction tan comme primitive, sur un intervalle décalé

On note $I = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ et on considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = 3 + 3\tan^2(2x).$$

1.

Vérifier que, pour tout $x \in I$, le réel $2x$ appartient à un intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[$, avec un entier m à préciser.

INDICE

Multiplie par 2 l'encadrement $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Soit $x \in I$. On multiplie l'encadrement $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ par $2 > 0$:

$$\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}.$$

Or :

$$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[= \left]-\frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right[.$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $2x$ appartient à l'intervalle de la forme annoncée avec $m = 1$: l'entier cherché est $m = 1$.

2.

En déduire une primitive F de f sur I.

INDICE

Reconnais la forme $u'\left(1 + \tan^2 u\right)$ avec $u(x) = 2x$, et ajuste le facteur 3 avec $u'(x) = 2$.

CORRIGÉ

Forme reconnue. Posons $u(x) = 2x$: u est dérivable sur I et $u'(x) = 2$. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3}{2}\, & u'(x) \\ & \times \left(1 + \tan^2 u(x)\right). \end{aligned}$$

Condition. D'après la question 1, $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right[$ pour tout $x \in I$. La condition de la ligne $u'\left(1 + \tan^2 u\right)$ des formes composées usuelles (F09) est donc vérifiée : $\tan u$ est une primitive de $u'\left(1 + \tan^2 u\right)$ sur I.

Conclusion. Par linéarité (F07), la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \frac{3}{2}\tan(2x)$$

est une primitive de f sur I.

3.

Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$. Expliquer ensuite pourquoi la formule obtenue ne définit pas une primitive de f sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

INDICE

Calcule $\tan \pi$. Pour la seconde partie, regarde ce que devient $2x$ quand $x = \frac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Primitive nulle en $\frac{\pi}{2}$. Le point $\frac{\pi}{2}$ appartient à I, et :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\tan \pi = 0.$$

D'après la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04), la primitive de f sur I qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ est unique : c'est F elle-même ($k = 0$).

Intervalle plus grand. Le réel $\frac{\pi}{4}$ appartient à $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $2x = \frac{\pi}{2}$, où $\tan$ n'est pas définie. Ni f ni F ne sont donc définies en ce point.

Conclusion. La primitive cherchée est $x \mapsto \frac{3}{2}\tan(2x)$. Cette formule ne définit pas une primitive de f sur $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$, car elle n'a pas de sens en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 8

Une primitive connue seulement par sa dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 5}}.$$

Aucune formule du cours ne donne une primitive de f.

1.

Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

INDICE

Justifie d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}$: que vaut au moins $x^4 + 5$? Cherche ensuite le résultat du cours qui donne des primitives, puis celui qui en fixe une.

CORRIGÉ

Continuité de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 5 \geq 5 > 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^4 + 5}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Quotient de fonctions continues, f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Existence. D'après l'existence de primitives pour une fonction continue (F03), f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Comme $0 \in \mathbb{R}$, la primitive prenant une valeur donnée en un point (F04) donne une unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

2.

Étudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$, puis montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout réel x.

INDICE

On ne connaît pas F, mais on connaît sa dérivée. Le dénominateur de $f(x)$ est positif : de quoi dépend le signe de $f(x)$?

CORRIGÉ

Signe de F'. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Comme $\sqrt{x^4 + 5} > 0$, $f(x)$ a le signe de x :

- $f(x) < 0$ pour $x < 0$;
- $f(0) = 0$;
- $f(x) > 0$ pour $x > 0$.

Variations. F est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet donc en 0 un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $F(0) = 0$.

Conclusion. F décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, et $F(x) \geq 0$ pour tout réel x.

3.

Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \quad F(x) \leq \frac{x^2}{2\sqrt{5}}.$$

INDICE

Compare d'abord $f(x)$ et $\dfrac{x}{\sqrt{5}}$ pour $x \geq 0$. Étudie ensuite la différence entre $x \mapsto \dfrac{x^2}{2\sqrt{5}}$ et F : que vaut-elle en 0 ?

CORRIGÉ

Comparaison des dérivées. Soit $x \geq 0$. On a $x^4 + 5 \geq 5$, donc $\sqrt{x^4+5} \geq \sqrt{5}$. Comme $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+5}} \leq \frac{x}{\sqrt{5}}.$$

Fonction auxiliaire. Soit D la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$D(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{5}} - F(x).$$

Elle est dérivable et, pour tout $x \geq 0$, $D'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5}} - f(x) \geq 0$. Donc D est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$: pour tout $x \geq 0$, $D(x) \geq D(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq \dfrac{x^2}{2\sqrt{5}}$.