BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	8

Exercice 1

Deux primitives d'une même fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2+3)^2},$$

ainsi que les fonctions F et H définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 3}$$

et

$$H(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3}.$$

1.

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Regarde le dénominateur $x^2 + 3$: peut-il s'annuler pour un réel x ?

2.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise la dérivée d'un quotient $\left(\frac{p}{r}\right)' = \frac{p'r - pr'}{r^2}$. Développe ensuite le numérateur avant de le comparer à celui de $f(x)$.

3.

Montrer, sans dériver H, que H est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $H(x) - F(x)$ et simplifie la fraction obtenue. Pense ensuite au résultat qui décrit toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle.

Exercice 2

Le tableau usuel, intervalle compris

Pour chaque fonction, on demande une primitive sur l'intervalle indiqué. Nomme à chaque fois la ligne du tableau des primitives usuelles qui sert.

1.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = \dfrac{7}{2x^5}$. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

Écris $f(x) = \dfrac{7}{2}\,x^{-5}$ et cherche la ligne des puissances entières x^n avec $n \leq -2$.

2.

Soit g la fonction définie sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ par $g(x) = 4 + 4\tan^2 x$. Déterminer une primitive de g sur I.

INDICE

Factorise par 4. L'intervalle donné s'écrit $\left]-\dfrac{\pi}{2} + m\pi, \dfrac{\pi}{2} + m\pi\right[$: avec quel entier m ?

3.

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$. Déterminer une primitive de h sur $]0, +\infty[$, puis expliquer pourquoi aucun intervalle de travail ne peut contenir 0.

INDICE

Mets $h(x)$ sous la forme $\lambda \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Pour la seconde partie, cherche où $h(x)$ a un sens.

Exercice 3

Réécrire en puissance rationnelle avant de primitiver

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=4\sqrt[5]{x^3} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}.$$

1.

Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme $\lambda\, x^r$, avec λ réel et r rationnel, pour tout $x>0$.

INDICE

Pour $x>0$, $\sqrt[n]{x^p}=x^{\frac{p}{n}}$. Pour g, écris d'abord le produit $x\sqrt[3]{x}$ comme une seule puissance de x.

2.

Déterminer une primitive F de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Utilise la ligne x^r du tableau avec $r=\dfrac{3}{5}$. Calcule $r+1$ avant de diviser.

3.

Déterminer une primitive G de g sur $]0,+\infty[$, puis l'écrire à l'aide d'une racine cubique.

INDICE

Ici $r=-\dfrac{4}{3}$: vérifie que $r\neq -1$, puis fais attention au signe de $r+1$.

Exercice 4

Linéarité, et le piège du produit

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = 6x^5 - \frac{4}{x^3} + 3\sin x.$$

1.

Déterminer une primitive F de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Cherche une primitive de chacun des trois termes avec le tableau, puis assemble-les par linéarité. Pour le terme du milieu, écris $\dfrac{4}{x^3} = 4x^{-3}$.

2.

Vérifier le résultat de la question 1 en dérivant F.

INDICE

Dérive $\dfrac{2}{x^2}$ sous la forme $2x^{-2}$, et n'oublie pas le signe de la dérivée de $\cos$.

3.

On pose $p(x) = (2x+1)\cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Un élève écrit : « une primitive de $2x+1$ est x^2+x, une primitive de $\cos x$ est $\sin x$, donc $(x^2+x)\sin x$ est une primitive de p sur $\mathbb{R}$. » Montrer qu'il se trompe.

INDICE

Un seul réel suffit : compare, en $x = 0$, la dérivée de la fonction proposée et la valeur $p(0)$.

Exercice 5

Deux formes composées autour d'un trinôme

Dans cet exercice, on cherche des primitives sur $\mathbb{R}$ en reconnaissant une expression de la forme

$$v\big(u(x)\big) \times u'(x),$$

à un facteur constant près.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x - 3)(x^2 - x + 4)^5$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 - x + 4$ et calcule $u'(x)$. Quel facteur constant relie $6x - 3$ à $u'(x)$?

2.

Soit g la fonction donnée par $g(x) = \dfrac{4x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le discriminant de $x^2 + x + 5$ te dit si ce trinôme peut s'annuler. Compare ensuite $4x + 2$ à la dérivée du trinôme.

3.

Vérifier en dérivant que la fonction obtenue à la question 2 est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, valable là où $u > 0$.

Exercice 6

Composer avec une fonction affine

Chaque question demande une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \ell(ax+b)$, où ℓ est une fonction du tableau usuel et $a \neq 0$.

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

INDICE

Ici $a = -2$: pars d'une primitive de $\sin$, puis multiplie par $\dfrac{1}{a}$ sans perdre le signe.

2.

Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{5}, +\infty\right[$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{(5x+2)^3}$.

INDICE

Pars d'une primitive de $t \mapsto t^{-3}$ sur $]0, +\infty[$, et vérifie que $5x+2$ reste dans cet intervalle.

3.

Déterminer une primitive sur $\left]-\infty, \dfrac{7}{2}\right[$ de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{7-2x}$.

INDICE

Pour $t > 0$, écris $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Ici $a = -2$: le signe de a compte.

Exercice 7

Reconnaître une arc tangente

1.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{6}{4+9x^2}$ et $u(x) = \dfrac{3x}{2}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}.$$

Déterminer ensuite une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $1+u(x)^2$ et réduis-le au même dénominateur : tu dois retrouver $4+9x^2$ au numérateur.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{5x}{1+x^4}$. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2$, on a $1+x^4 = 1+u(x)^2$. Compare $5x$ à $u'(x)$.

3.

Calculer $F\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et $G(1)$, où F et G sont les primitives obtenues aux questions 1 et 2.

INDICE

Simplifie d'abord le nombre placé sous l'arc tangente, puis cherche l'angle de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut ce nombre.

Exercice 8

Imposer une valeur en un point

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=4x^3-6x+\frac{1}{x^2}.$$

1.

Déterminer une primitive G de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Linéarité et tableau usuel ; la ligne de $\frac{1}{x^2}$ vaut sur $]0,+\infty[$.

2.

Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ telle que $F(1)=2$.

INDICE

Toutes les primitives de f sur cet intervalle s'écrivent $G+k$. Écris la condition en $x_0=1$ et résous-la en k.

3.

Expliquer pourquoi la primitive obtenue à la question 2 est unique, et pourquoi on ne peut pas imposer une valeur en $x_0=-1$ dans cette situation.

INDICE

Relis les hypothèses de F04 (primitive prenant une valeur donnée en un point) : où doit se trouver le point x_0 ?