BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	8

Exercice 1

Deux primitives d'une même fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2+3)^2},$$

ainsi que les fonctions F et H définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 3}$$

et

$$H(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3}.$$

1.

Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Regarde le dénominateur $x^2 + 3$: peut-il s'annuler pour un réel x ?

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc :

$$x^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

Le dénominateur de F ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. F est le quotient de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise la dérivée d'un quotient $\left(\frac{p}{r}\right)' = \frac{p'r - pr'}{r^2}$. Développe ensuite le numérateur avant de le comparer à celui de $f(x)$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la dérivée d'un quotient, $F'(x) = \frac{N(x)}{(x^2+3)^2}$, avec :

$$\begin{aligned} N(x) &= 2(x^2+3) \\ &\quad - (2x-1)(2x) \\ &= 2x^2 + 6 - 4x^2 + 2x \\ &= -2x^2 + 2x + 6. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2+3)^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$. Par définition d'une primitive (FO1), F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3.

Montrer, sans dériver H, que H est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $H(x) - F(x)$ et simplifie la fraction obtenue. Pense ensuite au résultat qui décrit toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x)$ et $F(x)$ ont le même dénominateur x^2+3. Le numérateur de $H(x) - F(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x + 2 - (2x - 1) \\ &= x^2 + 2x + 2 - 2x + 1 \\ &= x^2 + 3. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(x) - F(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} = 1.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = F(x) + 1$.

Or F est une primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (question 2). D'après F02 (ensemble des primitives sur un intervalle), pour tout réel k, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Avec $k = 1$, H est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, sans qu'il ait fallu dériver H.

Exercice 2

Le tableau usuel, intervalle compris

Pour chaque fonction, on demande une primitive sur l'intervalle indiqué. Nomme à chaque fois la ligne du tableau des primitives usuelles qui sert.

1.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = \dfrac{7}{2x^5}$. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

Écris $f(x) = \dfrac{7}{2}\,x^{-5}$ et cherche la ligne des puissances entières x^n avec $n \leq -2$.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = \dfrac{7}{2}\,x^{-5}$.

L'exposant $n = -5$ est un entier tel que $n \leq -2$, et $]-\infty, 0[$ est un intervalle qui ne contient pas 0. La ligne x^n du tableau des primitives usuelles (F05) donne : $x \mapsto \dfrac{x^{-4}}{-4}$ est une primitive de $x \mapsto x^{-5}$ sur cet intervalle.

Par linéarité (F07, produit par le réel $\dfrac{7}{2}$), on pose, pour tout $x < 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{7}{2} \times \frac{x^{-4}}{-4} \\ &= -\frac{7}{8x^4}. \end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $]-\infty, 0[$.

2.

Soit g la fonction définie sur $I = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ par $g(x) = 4 + 4\tan^2 x$. Déterminer une primitive de g sur I.

INDICE

Factorise par 4. L'intervalle donné s'écrit $\left]-\dfrac{\pi}{2} + m\pi, \dfrac{\pi}{2} + m\pi\right[$: avec quel entier m ?

CORRIGÉ

Pour tout $x \in I$, $g(x) = 4\left(1 + \tan^2 x\right)$.

L'intervalle I a la forme de la ligne $1 + \tan^2$ du tableau, avec $m = 1$:

$$I = \left]-\frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right[.$$

D'après le tableau des primitives usuelles (F05), $\tan$ est donc une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ sur I.

Conclusion. Par linéarité (F07), la fonction G définie par $G(x) = 4\tan x$ est une primitive de g sur I.

3.

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$. Déterminer une primitive de h sur $]0,+\infty[$, puis expliquer pourquoi aucun intervalle de travail ne peut contenir 0.

INDICE

Mets $h(x)$ sous la forme $\lambda\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Pour la seconde partie, cherche où $h(x)$ a un sens.

CORRIGÉ

Pour tout $x>0$, $h(x)=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. D'après le tableau des primitives usuelles (F05), $x\mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$. Par linéarité (F07), on pose :

$$H(x)=\frac{5}{2}\times 2\sqrt{x}=5\sqrt{x}.$$

Ensuite, $h(x)$ n'a de sens que si $\sqrt{x}$ existe et n'est pas nul, c'est-à-dire si $x>0$. Un intervalle contenant 0 contiendrait donc un point où h n'est pas définie.

Conclusion. H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$. Sur un intervalle contenant 0, h n'est pas définie partout : on ne peut pas y chercher de primitive de h.

Exercice 3

Réécrire en puissance rationnelle avant de primitiver

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=4\sqrt[5]{x^3} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}.$$

1.

Écrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme $\lambda\, x^r$, avec λ réel et r rationnel, pour tout $x>0$.

INDICE

Pour $x>0$, $\sqrt[n]{x^p}=x^{\frac{p}{n}}$. Pour g, écris d'abord le produit $x\sqrt[3]{x}$ comme une seule puissance de x.

CORRIGÉ

Soit $x>0$. Comme $x>0$, chaque racine s'écrit comme une puissance rationnelle de x :

$$\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}},$$
$$x\sqrt[3]{x}=x^1\times x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}.$$

Conclusion. Pour tout $x>0$: $f(x)=4\,x^{\frac{3}{5}}$ et $g(x)=2\,x^{-\frac{4}{3}}$.

2.

Déterminer une primitive F de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Utilise la ligne x^r du tableau avec $r=\dfrac{3}{5}$. Calcule $r+1$ avant de diviser.

CORRIGÉ

L'exposant $r=\dfrac{3}{5}$ est rationnel et $r\neq -1$, avec $r+1=\dfrac{8}{5}$. La ligne x^r du tableau des primitives usuelles (F05) donne : $x\mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ est une primitive de $x\mapsto x^r$ sur $]0,+\infty[$.

Par linéarité (F07), on pose, pour tout $x>0$:

$$F(x)=4\times\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}$$
$$=\frac{5}{2}\,x^{\frac{8}{5}}.$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

3.

Déterminer une primitive G de g sur $]0,+\infty[$, puis l'écrire à l'aide d'une racine cubique.

INDICE

Ici $r=-\dfrac{4}{3}$: vérifie que $r\neq -1$, puis fais attention au signe de $r+1$.

CORRIGÉ

L'exposant $r=-\dfrac{4}{3}$ est rationnel et $r\neq -1$, avec $r+1=-\dfrac{1}{3}$. D'après le tableau des primitives usuelles (F05, ligne x^r) et la linéarité (F07), on pose, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= 2\times\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -6\,x^{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{6}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Vérification. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -6\times\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} \\ &= 2\,x^{-\frac{4}{3}} = g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. G est une primitive de g sur $]0,+\infty[$, et $G(x)=-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

Exercice 4

Linéarité, et le piège du produit

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=6x^5-\frac{4}{x^3}+3\sin x.$$

1.

Déterminer une primitive F de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Cherche une primitive de chacun des trois termes avec le tableau, puis assemble-les par linéarité. Pour le terme du milieu, écris $\dfrac{4}{x^3}=4x^{-3}$.

CORRIGÉ

On travaille sur l'intervalle $]0,+\infty[$, terme à terme, avec le tableau des primitives usuelles (F05) et la linéarité (F07).

- $x\mapsto x^6$ est une primitive de $x\mapsto 6x^5$ (ligne x^n avec $n=5$, puis produit par 6).
- $x\mapsto \dfrac{x^{-2}}{-2}$ est une primitive de $x\mapsto x^{-3}$ (ligne x^n avec $n=-3\le -2$). Donc $x\mapsto -4\times\dfrac{x^{-2}}{-2}=\dfrac{2}{x^2}$ est une primitive de $x\mapsto -\dfrac{4}{x^3}$.
- $x\mapsto -3\cos x$ est une primitive de $x\mapsto 3\sin x$ (ligne $\sin$).

Par linéarité (somme), on pose, pour tout $x>0$:

$$F(x)=x^6+\frac{2}{x^2}-3\cos x.$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

2.

Vérifier le résultat de la question 1 en dérivant F.

INDICE

Dérive $\dfrac{2}{x^2}$ sous la forme $2x^{-2}$, et n'oublie pas le signe de la dérivée de $\cos$.

CORRIGÉ

Les fonctions $x\mapsto x^6$, $x\mapsto 2x^{-2}$ et $\cos$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, où $x^2\neq 0$. Donc F y est dérivable et, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}F'(x)&=6x^5+2\times(-2)\,x^{-3}\\&\quad+3\sin x\\&=6x^5-\frac{4}{x^3}+3\sin x\\&=f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x\in]0,+\infty[\,,\ F'(x)=f(x)$: le résultat de la question 1 est confirmé.

3.

On pose $p(x) = (2x+1)\cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Un élève écrit : « une primitive de $2x+1$ est x^2+x, une primitive de $\cos x$ est $\sin x$, donc $(x^2+x)\sin x$ est une primitive de p sur $\mathbb{R}$. » Montrer qu'il se trompe.

INDICE

Un seul réel suffit : compare, en $x = 0$, la dérivée de la fonction proposée et la valeur $p(0)$.

CORRIGÉ

Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = (x^2+x)\sin x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q'(x) &= (2x+1)\sin x \\ &\quad + (x^2+x)\cos x. \end{aligned}$$

En $x = 0$: $Q'(0) = 0$, alors que $p(0) = 1$. Donc $Q' \neq p$.

Conclusion. Q n'est pas une primitive de p sur $\mathbb{R}$: l'élève se trompe. La linéarité (F07) concerne la somme et le produit par un réel ; il n'existe aucune règle de ce type pour le produit de deux fonctions.

Exercice 5

Deux formes composées autour d'un trinôme

Dans cet exercice, on cherche des primitives sur $\mathbb{R}$ en reconnaissant une expression de la forme

$$v\big(u(x)\big) \times u'(x),$$

à un facteur constant près.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x-3)(x^2-x+4)^5$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 - x + 4$ et calcule $u'(x)$. Quel facteur constant relie $6x - 3$ à $u'(x)$?

CORRIGÉ

Posons $u(x) = x^2 - x + 4$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x - 1$. Donc $6x - 3 = 3\,u'(x)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 3\,u'(x)\,u(x)^5.$$

La ligne $u'\,u^n$ du tableau des formes composées (F09), avec $n = 5$, ne demande aucune condition : $\dfrac{u^6}{6}$ est une primitive de $u'\,u^5$ sur $\mathbb{R}$. Par linéarité (F07), on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{(x^2-x+4)^6}{6} \\ &= \frac{(x^2-x+4)^6}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Soit g la fonction donnée par $g(x) = \dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+5}}$. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le discriminant de x^2+x+5 te dit si ce trinôme peut s'annuler. Compare ensuite $4x+2$ à la dérivée du trinôme.

CORRIGÉ

Domaine. Posons $u(x) = x^2+x+5$. Son discriminant vaut $1-20 = -19 < 0$ et son coefficient dominant est positif, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) > 0.$$

Ainsi $\sqrt{u(x)}$ existe et n'est pas nul pour tout réel x : g est définie sur $\mathbb{R}$.

Forme reconnue. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x+1$. Donc $4x+2 = 2\,u'(x)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Primitive. La ligne $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ du tableau des formes composées (F09) exige $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui vient d'être établi. Donc $2\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. g est définie sur $\mathbb{R}$ et, par linéarité (F07), la fonction G définie par $G(x) = 4\sqrt{x^2+x+5}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3.

Vérifier en dérivant que la fonction obtenue à la question 2 est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, valable là où $u > 0$.

CORRIGÉ

Comme $u(x) > 0$ pour tout réel x, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 4 \times \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+5}} \\ &= \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+5}} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Composer avec une fonction affine

Chaque question demande une primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \ell(ax+b)$, où ℓ est une fonction du tableau usuel et $a \neq 0$.

1.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

INDICE

Ici $a = -2$: pars d'une primitive de $\sin$, puis multiplie par $\dfrac{1}{a}$ sans perdre le signe.

CORRIGÉ

On a $f(x) = \sin(ax+b)$ avec $a = -2 \neq 0$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$. D'après le tableau des primitives usuelles (F05), $-\cos$ est une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$.

La règle de composition avec une fonction affine (F09, dernier point) donne la fonction F définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{-2}\left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{3} - 2x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right). \end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{5}, +\infty\right[$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{(5x+2)^3}$.

INDICE

Pars d'une primitive de $t \mapsto t^{-3}$ sur $]0, +\infty[$, et vérifie que $5x+2$ reste dans cet intervalle.

CORRIGÉ

D'après le tableau des primitives usuelles (F05, ligne x^n avec $n = -3$), $t \mapsto \dfrac{t^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2t^2}$ est une primitive de $t \mapsto t^{-3}$ sur $J =]0, +\infty[$.

Pour tout $x > -\dfrac{2}{5}$, on a $5x+2 > 0$, donc $5x+2 \in J$. La règle de composition avec une fonction affine (F09), avec $a = 5$, donne la fonction G définie par :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{2(5x+2)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{10(5x+2)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. G est une primitive de g sur $\left]-\dfrac{2}{5}, +\infty\right[$.

3.

Déterminer une primitive sur $\left]-\infty, \dfrac{7}{2}\right[$ de la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{7-2x}$.

INDICE

Pour $t > 0$, écris $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Ici $a = -2$: le signe de a compte.

CORRIGÉ

Pour $t > 0$, $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. D'après le tableau des primitives usuelles (F05, ligne x^r avec $r = \dfrac{1}{2}$), $t \mapsto \dfrac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x < \dfrac{7}{2}$, on a $7 - 2x > 0$. La règle de composition avec une fonction affine (F09), avec $a = -2$ et $b = 7$, donne la fonction H définie par :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{-2} \times \frac{2}{3}\,(7-2x)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\,(7-2x)\sqrt{7-2x}. \end{aligned}$$

Conclusion. H est une primitive de h sur $\left]-\infty, \dfrac{7}{2}\right[$.

Exercice 7

Reconnaître une arc tangente

1.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{6}{4+9x^2}$ et $u(x) = \dfrac{3x}{2}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}.$$

Déterminer ensuite une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $1+u(x)^2$ et réduis-le au même dénominateur : tu dois retrouver $4+9x^2$ au numérateur.

CORRIGÉ

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \dfrac{3}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1+u(x)^2 &= 1 + \frac{9x^2}{4} \\ &= \frac{4+9x^2}{4}, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{4+9x^2} \\ &= \frac{6}{4+9x^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La ligne $\dfrac{u'}{1+u^2}$ du tableau des formes composées (F09) ne demande aucune condition.

Conclusion. L'égalité est établie pour tout réel x, et la fonction F définie par $F(x) = \arctan\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{5x}{1+x^4}$. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2$, on a $1+x^4 = 1+u(x)^2$. Compare $5x$ à $u'(x)$.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = x^2$: u est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $1+x^4 = 1+u(x)^2$. Donc $5x = \dfrac{5}{2}\,u'(x)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}.$$

Conclusion. D'après le tableau des formes composées (F09, ligne $\dfrac{u'}{1+u^2}$) et la linéarité (F07), la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{5}{2}\arctan\left(x^2\right)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3.

Calculer $F\left(\frac{2}{3}\right)$ et $G(1)$, où F et G sont les primitives obtenues aux questions 1 et 2.

INDICE

Simplifie d'abord le nombre placé sous l'arc tangente, puis cherche l'angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut ce nombre.

CORRIGÉ

On a $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$, donc $F\left(\frac{2}{3}\right) = \arctan 1$. Or $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

De même, $G(1) = \frac{5}{2} \arctan 1 = \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{4}$.

Conclusion. $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $G(1) = \frac{5\pi}{8}$.

Exercice 8

Imposer une valeur en un point

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=4x^3-6x+\frac{1}{x^2}.$$

1.

Déterminer une primitive G de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Linéarité et tableau usuel ; la ligne de $\frac{1}{x^2}$ vaut sur $]0,+\infty[$.

CORRIGÉ

Sur $]0,+\infty[$, le tableau des primitives usuelles (F05) et la linéarité (F07) donnent :

- $x\mapsto x^4$ est une primitive de $x\mapsto 4x^3$;
- $x\mapsto -3x^2$ est une primitive de $x\mapsto -6x$;
- $x\mapsto -\frac{1}{x}$ est une primitive de $x\mapsto \frac{1}{x^2}$.

Conclusion. Par somme (F07), la fonction G définie par $G(x)=x^4-3x^2-\frac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

2.

Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ telle que $F(1)=2$.

INDICE

Toutes les primitives de f sur cet intervalle s'écrivent $G+k$. Écris la condition en $x_0=1$ et résous-la en k.

CORRIGÉ

D'après F02 (ensemble des primitives sur un intervalle), les primitives de f sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x\mapsto G(x)+k$, avec $k\in\mathbb{R}$. Pour une telle fonction, la condition en 1 s'écrit $G(1)+k=2$. Or $G(1)=1-3-1=-3$, donc :

$$\begin{aligned} G(1)+k=2 &\Leftrightarrow -3+k=2\\ &\Leftrightarrow k=5. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>0$:

$$F(x)=x^4-3x^2-\frac{1}{x}+5.$$

3.

Expliquer pourquoi la primitive obtenue à la question 2 est unique, et pourquoi on ne peut pas imposer une valeur en $x_0 = -1$ dans cette situation.

INDICE

Relis les hypothèses de F04 (primitive prenant une valeur donnée en un point) : où doit se trouver le point x_0 ?

CORRIGÉ

La fonction f admet des primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (question 1), et $x_0 = 1$ appartient à cet intervalle. D'après F04 (primitive prenant une valeur donnée en un point), il existe une unique primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui vaut 2 en 1. Le calcul de la question 2 le confirme : la condition impose une seule valeur de k.

En revanche, $-1 \notin]0, +\infty[$: les primitives de f sur cet intervalle ne sont pas définies en -1. La condition $F(-1) = y_0$ n'a donc pas de sens ici.

Conclusion. La primitive de la question 2 est unique par F04, car $1 \in]0, +\infty[$. En $x_0 = -1$, hors de l'intervalle, F04 ne s'applique pas : on ne peut y imposer aucune valeur.