BURHAN

Fonctions primitives

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-primitives/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

Remonter de la dérivée à la fonction

Le compteur d'un scooter affiche sa vitesse à chaque instant. Avec ces seules vitesses, peux-tu retrouver la distance parcourue ?

C'est la question de ce chapitre : on connaît une dérivée, on cherche la fonction.

En dérivation, tu partais de F pour calculer F'. Ici, tu fais le chemin inverse. Par exemple, on cherche une fonction F, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x :

$$F'(x) = 6x^2 + 2.$$

Devine : Combien de solutions ?

Combien de fonctions F, dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 6x^2 + 2$?

A. Aucune : on ne peut pas remonter une dérivée.

Faux.

On peut : $x \mapsto 2x^3 + 2x$ convient, car sa dérivée vaut $6x^2 + 2$.

B. Une seule : $x \mapsto 2x^3 + 2x$.

Faux.

Elle convient, mais elle n'est pas seule : ajoute 5, la dérivée ne change pas.

C. Deux : $x \mapsto 2x^3 + 2x$ et son opposée.

Faux.

La dérivée de $x \mapsto -2x^3 - 2x$ vaut $-6x^2 - 2$: le signe change tout.

D. Une infinité.

Juste.

Juste : $x \mapsto 2x^3 + 2x + k$ convient pour tout réel k.

Correction

La fonction $x \mapsto 2x^3 + 2x$ convient : sa dérivée est $x \mapsto 6x^2 + 2$.

Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 2x^3 + 2x + k$ convient aussi, car la dérivée d'une constante est nulle.

Il y a donc une infinité de solutions. Ce chapitre montre qu'il n'y en a pas d'autres, à condition de travailler sur un **intervalle**.

À la fin du chapitre, tu sauras retrouver une fonction à partir de sa dérivée, dans les cas usuels.

Tu sauras aussi **démontrer** qu'une fonction est une primitive d'une autre, rédaction comprise.

Enfin, tu sauras étudier une primitive dont tu ne connais aucune formule.

Primitive d'une fonction sur un intervalle

Le mot primitive

Petit rappel. Tu connais les dérivées usuelles : $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Tu sais aussi que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, mais pas en 0 :

$$\forall x > 0, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ce dernier détail va compter : une primitive se cherche toujours **sur un intervalle**.

Vérifie : Dans quel sens ?

Soit $F(x) = x^3 - 5x$ pour tout réel x. On dira que F est une primitive de f lorsque $F' = f$. Quelle est cette fonction f ?

A. $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5x^2}{2}$

Faux.

Tu as remonté au lieu de dériver : ici, c'est F qu'on dérive.

B. $x \mapsto 3x^2 - 5$

Juste.

Juste : on dérive F terme à terme.

C. $x \mapsto 3x^2$

Faux.

La dérivée de $x \mapsto -5x$ est -5, pas 0.

D. $x \mapsto 6x$

Faux.

C'est la dérivée seconde de F : tu as dérivé deux fois.

Indice 1

Le mot « primitive » regarde vers l'arrière : F est la fonction avant dérivation.

Correction

Pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 - 5$. Donc F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 5$.

Une primitive est une fonction **avant** dérivation ; f est sa dérivée.

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit qu'une fonction F est **une primitive de f sur I** lorsque F est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

En clair. F est une primitive de f sur I quand dériver F redonne f en chaque point de I. Il y a deux exigences :

- F est dérivable en tout point de I ;
- l'égalité vaut en **tout** point de I.

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

On dit « **une** primitive » : l'activité d'ouverture en a montré une infinité.

Rédiger la preuve

Méthode : montrer que F est une primitive de f sur I

1. **Annoncer l'intervalle** I, puis justifier la dérivabilité de F sur I : somme, produit, quotient ou composée de fonctions dérivables.
2. **Dériver** : fixer $x \in I$ et calculer $F'(x)$.
3. **Réduire** l'expression obtenue jusqu'à reconnaître $f(x)$.
4. **Écrire la conclusion** en entier, en nommant F, f et l'intervalle.

Exemple : Exemple guidé : une rédaction complète

Énoncé. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (2x-1)\sqrt{x}$, et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x-1}{2\sqrt{x}}$. Montre que F est une primitive de f sur $I =]0, +\infty[$.

Dérivabilité. Les fonctions $x \mapsto 2x-1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$. Donc F, leur produit, est dérivable sur I.

Calcul. Soit $x \in I$. On dérive le produit, puis on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sqrt{x} \\ &\quad + (2x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x + 2x - 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x-1}{2\sqrt{x}} = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Donc F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Vérifie : La dernière ligne

Un élève étudie $G(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$. Il a justifié la dérivabilité et trouvé $G'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Quelle conclusion écrit-il ?

A. Donc $G' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ pour tout réel x.

Faux.

C'est le calcul, pas la conclusion. Et il ne vaut pas pour tout réel : la racine n'existe pas pour $x < 0$.

B. Donc $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ est une primitive de G.

Faux.

Le sens est inversé : c'est G qui est une primitive de sa dérivée.

C. Donc G est une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Juste.

Juste : G, sa dérivée et l'intervalle sont nommés.

D. Donc G est la seule primitive de $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Faux.

Il y en a une infinité : on écrit « une primitive », et l'intervalle manque.

Correction

La conclusion attendue est :

« Donc G est une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$. »

Elle nomme la fonction, dit « une » primitive et précise l'intervalle où G' a été calculée.

Le piège de l'intervalle

Attention : l'intervalle fait partie de la réponse

✗ « F est une primitive de f. »

✓ « F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. »

Sans intervalle, la phrase est incomplète. Dans l'exemple guidé, on ne peut pas prendre $[0, +\infty[$: $f(0)$ n'existe pas, et F n'est pas dérivable en 0, car son taux d'accroissement en 0 tend vers $-\infty$:

$$\forall h > 0, \quad \frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{2h - 1}{\sqrt{h}}.$$

À toi : Rédige ta première preuve

Soit $G(x) = x\sin x + \cos x$ pour tout réel x. Rédige la preuve de : « G est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos x$ ».

Indice 1
Commence par la dérivabilité : de quelles fonctions G est-elle faite ?
Indice 2
Dérive $x \mapsto x\sin x$ comme un produit, puis ajoute la dérivée de $\cos$.
Indice 3
Point délicat : deux termes s'annulent. Termine par la phrase de conclusion, intervalle compris.

Réponse
« **Dérivabilité.** Les fonctions $x \mapsto x$, $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit et somme.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \sin x + x\cos x \\ &\quad - \sin x \\ &= x\cos x. \end{aligned}$$

Conclusion. Donc G est une primitive de $x \mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$. »

Toutes les primitives, et le rôle de l'intervalle

Une famille de courbes

Devine : Deux courbes, une même dérivée

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$: F est une primitive de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$. On pose aussi $G(x) = F(x) + 2$. Comment la courbe de G se place-t-elle par rapport à celle de F ?

A. Elle est translatée de 2 vers le haut.

Juste.
Juste : chaque point monte de 2, et la pente en chaque abscisse ne change pas.

B. Elle est translatée de 2 vers la droite.

Faux.
Ce serait la courbe de $x \mapsto F(x-2)$. Ajouter 2 à l'image fait monter la courbe.

C. Elle coupe celle de F en un point.

Faux.
Pour tout réel x, $G(x) - F(x) = 2$: les deux courbes ne se rencontrent jamais.

D. Elle a des tangentes plus raides.

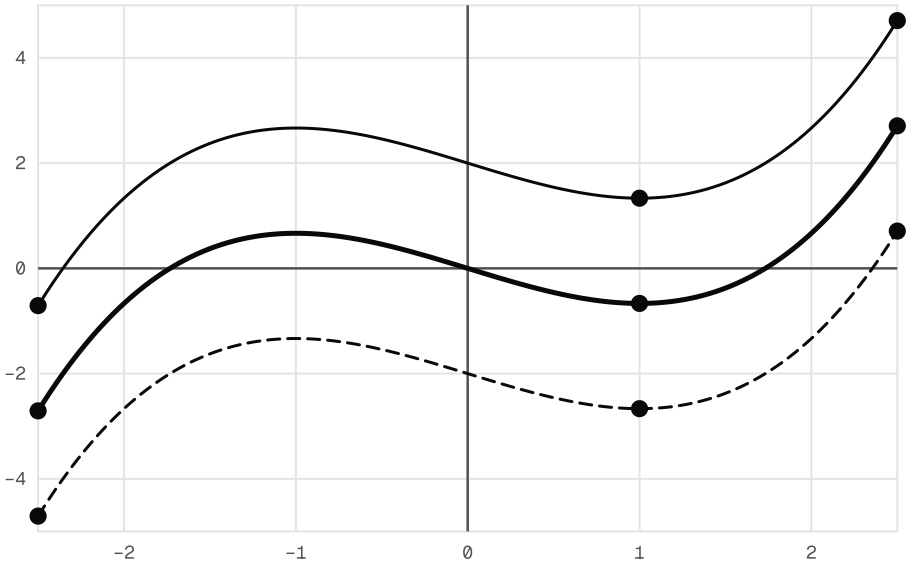
Faux.
$G' = F'$: en une même abscisse, les deux tangentes sont parallèles.

Correction

Pour tout réel x, $G(x) = F(x) + 2$: la courbe de G se déduit de celle de F par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

De plus, pour tout réel x, $G'(x) = F'(x) = x^2 - 1$: en une même abscisse, les tangentes ont la même pente.

La figure suivante montre trois courbes de cette famille.



Trois primitives de x ↦ x² − 1 sur $\mathbb{R}$: F − 2, F et F + 2. En l'abscisse 1, les trois tangentes sont horizontales.

Ajouter une constante ne change pas la dérivée : cela donne déjà une infinité de primitives.

Mais existe-t-il d'autres primitives, qui ne seraient pas de la forme $F + k$? **Pourquoi est-ce vrai** qu'il n'y en a pas ?

La preuve compare deux primitives. Elle s'appuie sur un résultat de la dérivation : si la dérivée s'annule en tout point d'un intervalle, la fonction y est constante.

Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

- Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur I.
- Réciproquement, si G est une primitive de f sur I, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.

Les primitives de f sur I sont donc exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. Soit k un réel. La fonction $x \mapsto F(x) + k$ est dérivable sur I, de dérivée $F' + 0 = f$: c'est une primitive de f sur I (FO1).

Étape 2. Soit G une primitive de f sur I. La fonction $H = G - F$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Étape 3. Or une fonction dérivable sur un **intervalle**, de dérivée nulle sur cet intervalle, y est constante (signe de la dérivée et variations, chapitre de la dérivation). Il existe donc un réel k tel que $H(x) = k$, c'est-à-dire $G(x) = F(x) + k$, pour tout $x \in I$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Soit F et G deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I. Pour les comparer, on étudie leur **différence** $G - F$. Sa dérivée est nulle :

$$\forall x \in I, \quad (G - F)'(x) = 0.$$

Sur un **intervalle**, cela suffit pour que $G - F$ soit constante. Ce geste resservira pour démontrer l'unicité d'une primitive qui prend une valeur donnée.

Sans intervalle, tout change

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve précédente, à quelle étape l'hypothèse « I est un intervalle » est-elle indispensable ?

A. À l'étape 1, pour que $F + k$ soit dérivable.

Faux.
$F + k$ est dérivable partout où F l'est : l'étape n'utilise pas l'intervalle.

B. À l'étape 2, pour obtenir $H'(x) = 0$.

Faux.
Ce calcul se fait point par point : il n'utilise pas l'intervalle.

C. À l'étape 3, pour passer de $H' = 0$ à H constante.

Juste.
Juste : ce passage vient du chapitre de la dérivation, et il exige un intervalle.

D. Nulle part : la preuve marche sur tout ensemble.

Faux.
Le contre-exemple qui suit montre le contraire.

Correction
Les étapes 1 et 2 sont des calculs de dérivée en chaque point : elles n'utilisent pas le fait que I est un intervalle.

L'étape 3 utilise : « une fonction dérivable sur un **intervalle**, de dérivée nulle, y est constante ».

Sur une réunion de deux intervalles disjoints, la fonction peut valoir une constante différente sur chaque morceau. L'exemple suivant le montre.

Exemple : Contre-exemple : une réunion de deux intervalles

Soit $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in D$, $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$. La fonction $F(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ vérifie $F' = f$ sur D. Définissons G sur D par :

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x^2} - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \in D$, $G'(x) = \dfrac{2}{x^3} = f(x)$: G est aussi une primitive de f sur D.

Pourtant $G - F$ vaut 1 sur $]-\infty, 0[$ et -2 sur $]0, +\infty[$: elle n'est pas constante sur D. La propriété exige donc un intervalle.

Une fonction a-t-elle toujours des primitives ?

Théorème : Existence de primitives pour une fonction continue

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque

Ce résultat est admis. Sa démonstration demande un outil nouveau, que tu construiras au chapitre du calcul intégral.

En attendant, il te permet d'affirmer qu'une primitive existe, même quand tu ne sais pas l'écrire.

Vérifie : Ce que garantit le théorème

Soit $g(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ pour tout réel x. Tu ne connais aucune formule pour une primitive de g. Que peux-tu affirmer ?

A. g admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Juste.
Juste : g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues.

B. Rien : sans formule, on ne sait pas si g en a.

Faux.
Le théorème d'existence répond sans formule : il suffit que g soit continue sur un intervalle.

C. g admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Si G en est une, $G+1$ en est une autre : il y en a une infinité.

D. g n'en a pas, car elle n'est pas un polynôme.

Faux.

Être un polynôme n'est pas exigé : la continuité sur un intervalle suffit.

Correction

La fonction $x \mapsto x^4+1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et la racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$. Donc g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par composition.

D'après le théorème d'existence, g admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et même une infinité. Tu en étudieras une à la fin du chapitre.

La primitive qui prend une valeur donnée

Une seule courbe par un point

Devine : Par un point donné

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de $x \mapsto 4x-3$ sont les fonctions $x \mapsto 2x^2-3x+k$, où $k \in \mathbb{R}$. Combien d'entre elles prennent la valeur 4 en 1 ?

A. Aucune.

Faux.

Il suffit de choisir k : l'équation $2-3+k=4$ a une solution.

B. Exactement une.

Juste.

Juste : la condition fixe $k=5$.

C. Deux, une de chaque côté de l'axe.

Faux.

L'équation en k est du premier degré : une seule solution.

D. Une infinité, comme les primitives.

Faux.

La famille est infinie, mais la valeur imposée en 1 ne laisse qu'un choix de k.

Correction

La condition s'écrit $2\times 1^2-3\times 1+k=4$, soit $-1+k=4$, donc $k=5$.

Une seule fonction convient : $x \mapsto 2x^2-3x+5$. Sur la figure de la section précédente, cela revient à garder la seule courbe de la famille qui passe par un point donné.

Imposer une valeur en un point revient à choisir la constante k.

Pourquoi est-ce vrai qu'un seul choix convient, pour toute fonction qui admet des primitives sur un intervalle ? Deux primitives diffèrent d'une constante. Que devient cette constante si elles coïncident en un point ?

Propriété : Primitive prenant une valeur donnée en un point

Soit f une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un réel.

Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Étape 1 (existence). Soit G une primitive de f sur I. On pose $k = y_0 - G(x_0)$ et, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. D'après F02, F est une primitive de f sur I, et $F(x_0) = G(x_0) + y_0 - G(x_0) = y_0$.

Étape 2 (unicité). Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I telles que $F_1(x_0) = y_0$ et $F_2(x_0) = y_0$. D'après F02, il existe un réel k tel que $F_2(x) = F_1(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Étape 3. En $x = x_0$, cette égalité donne $y_0 = y_0 + k$, donc $k = 0$: $F_2 = F_1$ sur I.

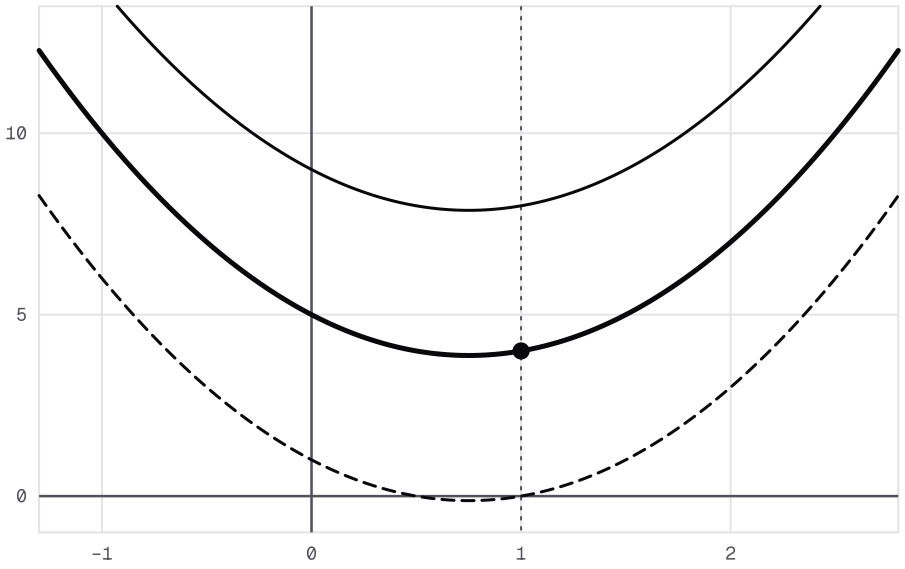
À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées.

Existence. On part d'une primitive quelconque G et on règle la constante : $k = y_0 - G(x_0)$.

Unicité. Deux solutions diffèrent d'une constante ; on évalue en x_0 : la constante est nulle.

L'intervalle intervient à travers la propriété des primitives sur un intervalle.



Trois primitives sur $\mathbb{R}$ de x ↦ 4x − 3, de la forme x ↦ 2x² − 3x + k, pour k = 1, k = 5 et k = 9. Une seule passe par le point A(1, 4) : celle obtenue avec k = 5.

Encore l'intervalle

Vérifie : L'argument de l'unicité

Dans la preuve de l'unicité, quel résultat fournit un réel k tel que $\forall x \in I,\ F_2(x) = F_1(x) + k$?

A. Le théorème d'existence des primitives d'une fonction continue.

Faux.

Il dit qu'une primitive existe, pas comment deux primitives sont liées.

B. L'égalité $F_2(x_0) = F_1(x_0)$.

Faux.

Elle vient ensuite : elle sert à trouver $k = 0$.

C. La règle de dérivation d'une somme.

Faux.

Elle sert à dériver $F_1 + k$, pas à obtenir k.

D. Deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Juste.

Juste : c'est cette propriété, et elle exige que I soit un intervalle.

Correction

Les fonctions F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur l'intervalle I. Elles diffèrent donc d'une constante : il existe un réel k tel que

$$\forall x \in I, \quad F_2(x) = F_1(x) + k.$$

L'égalité en x_0 donne ensuite $y_0 = y_0 + k$, donc $k = 0$.

Exemple : Contre-exemple : sans intervalle, plus d'unicité

Reprends $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ sur D, et impose la valeur 0 en 1. Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit H_c sur D par :

$$H_c(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + c & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors $H_c' = f$ sur D et $H_c(1) = 0$, quel que soit c. Il y a une infinité de solutions, car D n'est pas un intervalle.

Sur $]0, +\infty[$ seul, la solution est unique.

La méthode

Méthode : la primitive qui prend une valeur donnée

1. **Chercher** une primitive G de f sur l'intervalle I, et la contrôler en dérivant.
2. **Poser** $F(x) = G(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$: sur l'intervalle I, toutes les primitives de f sont de cette forme.
3. **Traduire** la condition $F(x_0) = y_0$ en une équation d'inconnue k, puis la résoudre.
4. **Conclure** : « la primitive de f sur I qui vaut y_0 en x_0 est … ». Ici, et ici seulement, on dit « la ».

Exemple : Exemple guidé

Énoncé. Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$. Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-1) = 6$.

Une primitive. $G(x) = x^3 + x^2 - 4x$ convient, car pour tout réel x, $G'(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Forme générale. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = x^3 + x^2 - 4x + k$.

Condition. $F(-1) = -1 + 1 + 4 + k = 4 + k$. Donc $4 + k = 6$, soit $k = 2$.

Conclusion. La primitive cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$.

À toi : Rédige la primitive qui prend une valeur

Rédige la recherche de la primitive H sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x - \cos x$ telle que $H(\pi) = 1$.

Indice 1
Commence par une primitive G de $x \mapsto 2x - \cos x$ sur $\mathbb{R}$, contrôlée en dérivant.
Indice 2
Écris $H(x) = G(x) + k$, puis traduis la condition $H(\pi) = 1$ en une équation d'inconnue k.
Indice 3
Point délicat : $\sin \pi = 0$, et le signe de k. Termine par la phrase de conclusion, intervalle compris.

Réponse
« **Une primitive.** La fonction $G : x \mapsto x^2 - \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $G'(x) = 2x - \cos x$. C'est une primitive de $x \mapsto 2x - \cos x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Forme générale. Les primitives sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto x^2 - \sin x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Condition. $H(\pi) = 1$ s'écrit $\pi^2 - \sin \pi + k = 1$, soit $\pi^2 + k = 1$, donc $k = 1 - \pi^2$.

Conclusion. La primitive de $x \mapsto 2x - \cos x$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en π est définie par $H(x) = x^2 - \sin x + 1 - \pi^2$. Elle est unique. »

Le tableau des primitives usuelles

Lire les dérivées à l'envers

Petit rappel. Soit r un rationnel. La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall x > 0, \quad (x^r)' = r\, x^{r-1}.$$

La fonction $\tan$ a pour dérivée $1 + \tan^2$ là où $\cos$ ne s'annule pas. Enfin, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Tout le tableau de cette section vient de là.

Vérifie : Une puissance rationnelle

Laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ sur $]0, +\infty[$?

A. $x \mapsto \dfrac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}$
Faux.
C'est la dérivée de $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$: tu as dérivé au lieu de remonter.

B. $x \mapsto \dfrac{5}{3}\, x^{\frac{5}{3}}$
Faux.
Dérive-la : tu obtiens $\dfrac{25}{9}\, x^{\frac{2}{3}}$. Il faut diviser par $\dfrac{5}{3}$, pas multiplier.

C. $x \mapsto \dfrac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}$
Juste.
Juste : sa dérivée vaut $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$.

D. $x \mapsto x^{\frac{5}{3}}$

Faux.

Sa dérivée vaut $\frac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}}$: il manque le facteur $\frac{3}{5}$.

Correction

On augmente l'exposant de 1 : $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$. Puis on divise par ce nouvel exposant.

Une primitive sur $]0,+\infty[$ est donc $x \mapsto \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}}$. On le contrôle en dérivant : pour tout $x>0$, $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque ligne du tableau suivant est une formule de dérivation lue à l'envers. Pour la vérifier, il suffit de dériver la deuxième colonne.

Regarde surtout la troisième colonne : chaque formule vaut sur un **intervalle** précis.

Le tableau

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est une primitive de f sur chacun des intervalles indiqués ; sur un tel intervalle, les primitives de f sont les fonctions $F+k$, $k\in\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle
a (constante réelle)	$a\,x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
x^n ($n\in\mathbb{Z}, n\leq -2$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$
x^r ($r\in\mathbb{Q}, r\neq -1$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0,+\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+m\pi,\frac{\pi}{2}+m\pi\right[, m\in\mathbb{Z}$

Démonstration

Étape 1. D'après F01, il suffit de vérifier, sur l'intervalle indiqué, que F est dérivable et que $F'=f$. Les dérivées employées sont celles du chapitre de la dérivation : fonctions usuelles, puissances entières et rationnelles.

Étape 2. $(a\,x)' = a$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \leq -2$, $n+1$ est un entier négatif non nul ; la dérivée de u^{n+1} avec $u(x) = x$, qui ne s'annule ni sur $]-\infty, 0[$ ni sur $]0, +\infty[$, donne le même calcul ; $\dfrac{1}{x^2}$ est le cas $n = -2$.

Étape 3. Pour $r \in \mathbb{Q}$ avec $r \neq -1$, $r+1$ est un rationnel non nul et $(x^{r+1})' = (r+1)\,x^r$ sur $]0, +\infty[$. Le cas $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ donne $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$.

Étape 4. $\sin' = \cos$ et $(-\cos)' = \sin$ sur $\mathbb{R}$; $\tan' = 1 + \tan^2$ sur tout intervalle où $\cos$ ne s'annule pas.

Étape 5. Sur chacun de ces intervalles, F02 donne toutes les primitives : les fonctions $F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété : Primitive de x ↦ 1/(1 + x²)

La fonction $\arctan$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de cette fonction sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \arctan x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (dérivée de la fonction arctangente, chapitre de la dérivation). D'après F01, $\arctan$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Étape 2. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, F02 donne toutes les primitives : ce sont les fonctions $x \mapsto \arctan x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque preuve se réduit à **dériver la colonne** $F(x)$, puis à conclure par la définition. L'intervalle de chaque ligne est celui où la dérivée a été calculée.

Pour obtenir **toutes** les primitives, on ajoute une constante $k \in \mathbb{R}$: c'est permis parce que chaque ensemble de la dernière colonne est un intervalle.

S'en servir

Exemple : une puissance rationnelle

Énoncé. Détermine une primitive de $f(x) = x^2\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Écrire en puissance. Pour tout $x > 0$, $x^2\sqrt{x} = x^2 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$.

Lire le tableau. Avec $r = \frac{5}{2}$, on a $r+1 = \frac{7}{2}$. Une primitive sur $]0, +\infty[$ est donc définie par $F(x) = \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}\,x^3\sqrt{x}$.

Vérifier. Pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \frac{2}{7} \times \frac{7}{2}\,x^{\frac{5}{2}} = x^2\sqrt{x}.$$

Sans l'intervalle, l'écriture $x^{\frac{5}{2}}$ n'aurait pas de sens.

Vérifie : Une valeur à imposer

Quelle est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 ?

A. $x \mapsto \arctan x - 1$

Faux.

On retranche $\arctan 1$, qui vaut $\frac{\pi}{4}$, pas 1.

B. $x \mapsto \arctan(x-1)$

Faux.

Elle s'annule en 1, mais sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+(x-1)^2}$.

C. $x \mapsto \arctan x + \dfrac{\pi}{4}$

Faux.

En 1, elle vaut $\frac{\pi}{2}$: le signe de la constante est faux.

D. $x \mapsto \arctan x - \dfrac{\pi}{4}$

Juste.

Juste : en 1, elle vaut $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

Correction

Les primitives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \arctan x + k$, où $k \in \mathbb{R}$. La condition s'écrit $\arctan 1 + k = 0$.

Or $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, car $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $k = -\frac{\pi}{4}$.

La primitive cherchée est $x \mapsto \arctan x - \dfrac{\pi}{4}$.

Attention : un exposant interdit

✗ « Une primitive de $x \mapsto x^{-1}$ est $x \mapsto \dfrac{x^0}{0}$. »

✓ La formule $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ demande $r \neq -1$: on ne divise pas par 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0, +\infty[$, car elle y est continue. Ce chapitre n'en donne aucune formule : elle viendra avec le logarithme.

Somme et produit par un réel

Additionner les primitives

Tu sais que, sur $\mathbb{R}$, $\sin$ est une primitive de $\cos$, et $x \mapsto x^4$ une primitive de $x \mapsto 4x^3$.

Alors $x \mapsto x^4 + \sin x$ est une primitive de $x \mapsto 4x^3 + \cos x$: dérive pour t'en convaincre.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Parce que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

Devine : Avec un facteur

D'après toi, laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto 5\sin x - 2x$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto 5\cos x - x^2$

Faux.
Une primitive de $\sin$ est $-\cos$: dérive $x \mapsto 5\cos x$, tu obtiens $-5\sin x$.

B. $x \mapsto -5\cos x - x^2$

Juste.
Juste : sa dérivée vaut $5\sin x - 2x$.

C. $x \mapsto -5\cos x - 2$

Faux.
2 est la dérivée de $x \mapsto 2x$, pas une primitive : une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$.

D. $x \mapsto -\cos(5x) - x^2$

Faux.
Le facteur 5 multiplie la fonction : il ne va pas dans le cosinus.

Correction
Une primitive de $\sin$ est $-\cos$, donc une primitive de $5\sin$ est $-5\cos$. Une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$.

Donc $x \mapsto -5\cos x - x^2$ convient sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, sa dérivée vaut bien $5\sin x - 2x$.

La propriété

Propriété : Primitives d'une somme et du produit par un réel

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, G une primitive de g sur I, et λ un réel.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

- λF est une primitive de λf sur I.

Il n'existe aucune règle analogue pour un produit ni pour un quotient : en général, $F G$ n'est pas une primitive de $f g$.

Démonstration

Étape 1. F et G sont dérivables sur I, de dérivées f et g (F01). Par les opérations sur les fonctions dérivables (chapitre de la dérivation), $F + G$ et λF sont dérivables sur I, avec $(F + G)' = f + g$ et $(\lambda F)' = \lambda f$.

Étape 2. D'après F01, $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF une primitive de λf sur I.

Étape 3. Pour le produit, un contre-exemple suffit : sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) = g(x) = 1$ et $F(x) = G(x) = x$, on a $(F G)'(x) = 2x$, alors que $f(x)\, g(x) = 1$. Pour le quotient, sur $]0, +\infty[$, avec $f(x) = 1$, $g(x) = 2x$, $F(x) = x$ et $G(x) = x^2$: $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, alors que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2x}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve lit à l'envers deux règles de dérivation : celle d'une somme et celle d'un produit par un réel.

Elle demande que F et G soient des primitives **sur le même intervalle** I : chaque dérivée est calculée en tout point de I.

Vérifie : Le produit de deux primitives

Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$, et $x \mapsto x^3$ une primitive de $x \mapsto 3x^2$. Le produit $x \mapsto x^5$ est-il une primitive de $x \mapsto 6x^3$?

A. Oui, par la propriété précédente.

Faux.

La propriété parle de sommes et de facteurs réels, jamais de produits de fonctions.

B. Oui, à une constante près.

Faux.

Une constante ne change pas la dérivée : $x \mapsto x^5 + k$ a pour dérivée $x \mapsto 5x^4$.

C. Non : sa dérivée vaut $5x^4$.

Juste.

Juste : $5x^4$ n'est pas $6x^3$, par exemple en $x = 1$.

D. On ne peut pas savoir sans intervalle.

Faux.

Tout se passe sur $\mathbb{R}$, qui est un intervalle : un calcul tranche.

Correction

La dérivée de $x \mapsto x^5$ est $x \mapsto 5x^4$. En $x = 1$, elle vaut 5, alors que $6x^3$ vaut 6.

Donc $x \mapsto x^5$ n'est pas une primitive de $x \mapsto 6x^3$. Une primitive de $x \mapsto 6x^3$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\,x^4$.

Exemple : un intervalle commun aux deux termes

Sur $]0, +\infty[$ comme sur $]-\infty, 0[$, $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. Sur $\mathbb{R}$, $\sin$ est une primitive de $\cos$.

Donc $x \mapsto -\dfrac{1}{x} + \sin x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \cos x$ sur $]0, +\infty[$, et de même sur $]-\infty, 0[$.

Sur $\mathbb{R}$, rien de tel : $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \cos x$ n'est pas définie en 0. La somme se primitive seulement sur un intervalle où chaque terme a une primitive.

Calculer terme à terme

Méthode : calculer une primitive terme à terme

1. **Découper** f en une somme de termes de la forme $\lambda \times$ (fonction du tableau), avec λ réel.
2. **Lire** une primitive de chaque terme, en notant son intervalle.
3. **Prendre** un intervalle commun à tous les termes, puis additionner.
4. **Vérifier** en dérivant le résultat.

Exemple : Exemple guidé

Énoncé. Détermine une primitive de $f(x) = 5x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^3} + \cos x$ sur $]0, +\infty[$.

Découper. Pour tout $x > 0$, $f(x) = 5\,x^{\frac{3}{2}} - 2\,x^{-3} + \cos x$.

Lire. Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}$; une de $x \mapsto x^{-3}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,x^{-2}$; une de $\cos$ est $\sin$. Toutes valent sur $]0, +\infty[$.

Assembler. Par linéarité, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{x^2} + \sin x \\ &= 2x^2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \sin x. \end{aligned}$$

Vérifier. Pour tout $x > 0$, $F'(x) = 5\,x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{x^3} + \cos x = f(x)$.

À toi

Laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto 4x^3 - 3\sin x + \dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto x^4 - 3\cos x + 2\arctan x$

Faux.

Une primitive de $-3\sin$ est $3\cos$: dérive $x \mapsto -3\cos x$, tu obtiens $3\sin x$.

B. $x \mapsto 12x^2 + 3\cos x + 2\arctan x$

Faux.

$12x^2$ est la dérivée de $4x^3$, pas une primitive.

C. $x \mapsto x^4 + 3\cos x + 2\arctan(x^2)$

Faux.

La dérivée de $x \mapsto \arctan(x^2)$ est $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^4}$.

D. $x \mapsto x^4 + 3\cos x + 2\arctan x$

Juste.

Juste : chaque terme se vérifie en dérivant.

Correction

Terme à terme, sur $\mathbb{R}$:

- $x \mapsto x^4$ pour $x \mapsto 4x^3$;
- $x \mapsto 3\cos x$ pour $x \mapsto -3\sin x$;
- $x \mapsto 2\arctan x$ pour $x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$.

Donc $x \mapsto x^4 + 3\cos x + 2\arctan x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$: sa dérivée vaut bien $4x^3 - 3\sin x + \dfrac{2}{1+x^2}$.

Les formes composées

La composée lue à l'envers

En dérivation, tu as calculé $\big(\sin(x^2)\big)' = 2x\cos(x^2)$. Lis cette égalité à l'envers : $x \mapsto \sin(x^2)$ est une primitive de $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

Le facteur $2x$ est la dérivée de la fonction intérieure $x \mapsto x^2$. C'est lui qui permet de remonter à une primitive.

Devine : Repérer la fonction intérieure

D'après toi, laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto 3x^2\cos(x^3)$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto x^3\sin(x^3)$

Faux.

Dérive-la : la règle du produit donne un terme de trop.

B. $x \mapsto \sin(x^3)$

Juste.

Juste : sa dérivée vaut $\cos(x^3) \times 3x^2$.

C. $x \mapsto 3x^2 \sin(x^3)$

Faux.

Le facteur $3x^2$ est la dérivée de $u(x) = x^3$: il disparaît quand on remonte.

D. $x \mapsto -\sin(x^3)$

Faux.

Une primitive de $\cos$ est $\sin$, sans signe moins.

Correction

Avec $u(x) = x^3$, on a $u'(x) = 3x^2$, et pour tout réel x :

$$3x^2 \cos(x^3) = \cos\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Or la dérivée de $x \mapsto \sin\big(u(x)\big)$ est $x \mapsto \cos\big(u(x)\big) \times u'(x)$. Donc $x \mapsto \sin(x^3)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$.

Cette lecture à l'envers marche pour toute fonction v dont on connaît une primitive V. **Pourquoi est-ce vrai ?** La règle de dérivation d'une composée fait apparaître exactement ce produit :

$$(V \circ u)'(x) = v\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Il faut seulement que $u(x)$ reste dans l'intervalle où V est une primitive de v.

Le théorème et son tableau

Théorème : Primitive de (v ∘ u) × u′

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, v une fonction définie sur un intervalle J et V une primitive de v sur J. On suppose que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Alors $V \circ u$ est une primitive sur I de la fonction $x \mapsto v\big(u(x)\big) \times u'(x)$.

Démonstration

Étape 1. V est dérivable sur J et $V' = v$ (F01). La fonction u est dérivable sur I, et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Étape 2. D'après le théorème de dérivation d'une composée (chapitre de la dérivation), $V \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(V \circ u)'(x) = V'\big(u(x)\big) \times u'(x) = v\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Étape 3. D'après F01, $V \circ u$ est une primitive de $x \mapsto v\big(u(x)\big) \times u'(x)$ sur I.

Vérifie : À quoi sert la condition ?

Dans le théorème, à quoi sert l'hypothèse « $\forall x \in I,\ u(x) \in J$ » ?

A. À garantir que u est dérivable sur I.

Faux.

La dérivabilité de u est une hypothèse à part.

B. À donner un sens à $V\big(u(x)\big)$ et à la dériver.

Juste.

Juste : V n'est connue, et dérivable, que sur J.

C. À garantir que u' ne s'annule jamais.

Faux.

Aucune condition ne porte sur u' : elle peut s'annuler.

D. À garantir l'unicité du résultat.

Faux.

L'unicité vient d'une valeur imposée en un point, pas de cette hypothèse.

Correction

La fonction V n'est connue que sur l'intervalle J. Pour écrire $V\big(u(x)\big)$, puis dériver la composée en x, il faut que $u(x) \in J$.

C'est pourquoi chaque ligne du tableau suivant porte une condition sur u.

Propriété : Primitives des formes composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Dans chaque ligne, la fonction de la deuxième colonne est une primitive sur I de celle de la première, sous la condition indiquée.

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'\,u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	aucune
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
$u'\,u^n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \leq -2)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'\,u^r$ $(r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u' \cos u$	$\sin u$	aucune
$u' \sin u$	$-\cos u$	aucune

Fonction	Une primitive sur I	Condition
$u'\,(1+\tan^2 u)$	$\tan u$	il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $u(x)\in\left]-\frac{\pi}{2}+m\pi,\frac{\pi}{2}+m\pi\right[$ pour tout $x\in I$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	aucune

De plus, soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle J, et a, b deux réels avec $a\neq 0$. Si $ax+b\in J$ pour tout $x\in I$, alors $x\mapsto \dfrac{1}{a}\,F(ax+b)$ est une primitive de $x\mapsto f(ax+b)$ sur I.

Démonstration

Étape 1. Chaque ligne du tableau est F08, avec v et V lus dans F05 ou F06, sur un intervalle J qui contient $u(x)$ pour tout $x\in I$.

Étape 2. Choix de J. Pour u^n ($n\geq 0$), $\sin$, $\cos$ et $\arctan$: $J=\mathbb{R}$. Pour $\sqrt{u}$ et u^r : $J=]0,+\infty[$, par hypothèse. Pour $\tan u$: l'intervalle de la condition.

Étape 3. Si u ne s'annule pas sur I : u est continue sur I, car dérivable. Si u prenait en deux points $a<b$ de I des valeurs de signes contraires, le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a,b]\subset I$ donnerait un zéro de u : u garde donc un signe constant sur I. On prend $J=]0,+\infty[$ ou $J=]-\infty,0[$, intervalles de F05.

Étape 4. Pour $f(ax+b)$: F08 avec $u(x)=ax+b$ et $u'=a$ montre que $x\mapsto F(ax+b)$ est une primitive de $x\mapsto a\,f(ax+b)$; F07, avec $\lambda=\dfrac{1}{a}$, conclut.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque ligne du tableau est le théorème de la composée, avec un couple (v,V) pris dans le tableau des fonctions usuelles.

La condition de chaque ligne sert à une seule chose : placer $u(x)$ dans l'intervalle où V est une primitive de v.

Exemple : une puissance de u, constante à ajuster

Énoncé. Détermine une primitive de $f(x)=x\,(3x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Repérer. Avec $u:x\mapsto 3x^2+1$, on a $u'(x)=6x$. Il manque un facteur 6 : pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{6}\,u'(x)\,u(x)^3$.

Conclure. La ligne $u'\,u^n$ avec $n=3$ ne demande aucune condition. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3x^2+1)^4}{4}=\dfrac{(3x^2+1)^4}{24}$.

Vérifier. Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{4 \times 6x\,(3x^2+1)^3}{24} = x\,(3x^2+1)^3$.

Contrôler la condition

Vérifie : La condition sur u

On a $\left(2\sqrt{x^2-4}\right)' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ là où $x^2-4>0$. Sur lequel de ces ensembles $x \mapsto 2\sqrt{x^2-4}$ est-elle une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$?

A. Sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Pour $-2<x<2$, $x^2-4<0$: la racine n'y est même pas définie.

B. Sur $[2,+\infty[$.

Faux.

En 2, $u(2)=0$: la condition demande $u(x)>0$, et la fonction à primitiver n'y est pas définie.

C. Sur $]2,+\infty[$.

Juste.

Juste : $u(x)=x^2-4>0$ sur tout cet intervalle.

D. Sur $]-2,2[$.

Faux.

Là, $x^2-4<0$: c'est l'inverse de la condition.

Correction

On pose $u(x)=x^2-4$, de dérivée $2x$: la fonction est $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$. La ligne correspondante exige $u(x)>0$ pour tout x de l'intervalle.

Or $x^2-4>0$ équivaut à $x<-2$ ou $x>2$. La formule vaut donc sur $]2,+\infty[$, et aussi sur $]-\infty,-2[$, mais sur aucun intervalle qui rencontre $[-2,2]$.

Méthode : reconnaître une forme composée

1. **Choisir** la fonction intérieure u, puis calculer u'.
2. **Écrire** $f = \lambda \times$ (une forme du tableau), avec λ réel : c'est l'ajustement de la constante.
3. **Contrôler** la condition de la ligne sur tout l'intervalle : $u>0$, ou u ne s'annule pas…
4. **Conclure** en nommant l'intervalle, puis dériver le résultat pour vérifier.

Exemple : une racine, et un intervalle à choisir

Énoncé. Détermine une primitive de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+27}}$ sur $I =]-3, +\infty[$.

Repérer. Avec $u : x \mapsto x^3 + 27$, on a $u'(x) = 3x^2$, donc $f = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Condition. Soit $x \in I$. Comme la fonction cube est strictement croissante, $x > -3$ donne $x^3 > -27$. Donc $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

Conclure. Une primitive de f sur I est définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{x^3+27} = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+27}$.

La forme affine et deux pièges

Exemple : une fonction affine à l'intérieur

a) Une primitive de $x \mapsto x^4$ est $x \mapsto \dfrac{x^5}{5}$. Avec $a = -2$ et $b = 5$, une primitive de $g(x) = (5-2x)^4$ sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{-2} \times \frac{(5-2x)^5}{5} \\ &= -\frac{(5-2x)^5}{10}. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{1}{1+9x^2} = \dfrac{1}{1+(3x)^2}$. On prend $a = 3$, $b = 0$ et l'arctangente. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\arctan(3x)$.

Vérifie : Le facteur à ne pas oublier

Laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto \sin(3x+2)$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos(3x+2)$

Juste.

Juste : sa dérivée vaut $-\dfrac{1}{3} \times \big(-3\sin(3x+2)\big) = \sin(3x+2)$.

B. $x \mapsto -\cos(3x+2)$

Faux.

Sa dérivée vaut $3\sin(3x+2)$: il manque le facteur $\dfrac{1}{3}$.

C. $x \mapsto -3\cos(3x+2)$

Faux.

Sa dérivée vaut $9\sin(3x+2)$: on divise par $a = 3$, on ne multiplie pas.

D. $x \mapsto \dfrac{1}{3}\cos(3x+2)$

Faux.

Une primitive de $\sin$ est $-\cos$: le signe est faux.

Correction

Une primitive de $\sin$ est $-\cos$. Avec $a = 3$ et $b = 2$, une primitive de $x \mapsto \sin(3x+2)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{3} \times \big(-\cos(3x+2)\big)$.

Autrement dit, $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(3x+2)$ convient.

Attention : le facteur oublié

✗ « Une primitive de $x \mapsto \cos(4x+1)$ est $x \mapsto \sin(4x+1)$. »

Sa dérivée vaut $4\cos(4x+1)$: le facteur 4 est de trop.

✓ « Une primitive est $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(4x+1)$. »

✗ « Une primitive de $x \mapsto (x^2+1)^3$ est $x \mapsto \frac{(x^2+1)^4}{4}$. »

Sa dérivée vaut $2x\,(x^2+1)^3$: sans le facteur u', la forme ne s'applique pas. Ici, développe d'abord.

Attention : la condition sur u

✗ « $x \mapsto -\frac{1}{x-3}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2}$ sur $\mathbb{R}$. »

✓ Elle l'est sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

La ligne $\frac{u'}{u^2}$ exige que u ne s'annule pas sur l'intervalle. Ici, $u(x) = x - 3$ s'annule en 3.

À toi : Rédige une primitive composée

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Détermine une primitive de f sur I, en rédigeant chaque étape de la méthode.

Indice 1

Prends $u = \cos$: que vaut u' ? Écris f à l'aide de u' et d'une puissance de u.

Indice 2

Tu dois obtenir $f = -u'\,u^{-3}$: c'est la ligne $u'\,u^n$ avec $n = -3$, au facteur -1 près.

Indice 3

Point délicat : la condition de cette ligne. Pourquoi $\cos$ ne s'annule-t-elle pas sur I ?

Réponse

« **Repérer.** Soit $u = \cos$, dérivable sur I, de dérivée $u' = -\sin$. Pour tout $x \in I$, $f(x) = -u'(x)\,u(x)^{-3}$.

Condition. Pour tout $x \in I$, $\cos x > 0$: u ne s'annule pas sur I. La ligne $u'\,u^n$ avec $n = -3$ donne une primitive $\dfrac{u^{-2}}{-2}$ de $u'\,u^{-3}$ sur I.

Conclure. Une primitive de f sur I est définie par $F(x) = -\dfrac{u(x)^{-2}}{-2} = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$.

Vérifier. Pour tout $x \in I$, $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} = f(x)$. »

Transformer avant de chercher une primitive

Linéariser

Certaines fonctions ne ressemblent à aucune ligne des tableaux. On les **transforme** d'abord.

Petit rappel de première : pour tout réel x, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

On en tire, pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$: le carré disparaît.

Vérifie : Un carré à faire disparaître

Laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto 2\cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto \dfrac{2\cos^3 x}{3}$

Faux.

Dérive-la : tu obtiens $-2\cos^2 x \sin x$. La forme $u' u^n$ demande le facteur $u' = -\sin$, absent ici.

B. $x \mapsto x + \sin 2x$

Faux.

Sa dérivée vaut $1 + 2\cos 2x$: il manque le facteur $\dfrac{1}{2}$.

C. $x \mapsto x + \dfrac{\sin 2x}{2}$

Juste.

Juste : sa dérivée vaut $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$.

D. $x \mapsto x - \dfrac{\sin 2x}{2}$

Faux.

Le signe vient de $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$: c'est un plus.

Correction

Par la formule de duplication, pour tout réel x, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$, et une primitive de $x \mapsto \cos 2x$ est $x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{2}$. Donc $x \mapsto x + \dfrac{\sin 2x}{2}$ convient sur $\mathbb{R}$.

Méthode : transformer avant de primitiver

1. **Développer** un produit de polynômes, ou couper une fraction dont le dénominateur est un monôme.

2. **Linéariser** un carré ou un produit de $\sin$ et $\cos$ avec les formules de duplication.
3. **Faire apparaître** une forme du tableau, au besoin en identifiant des coefficients.
4. **Primitiver** chaque terme, puis vérifier en dérivant.

Deux transformations

Exemple : linéariser un produit

Énoncé. Détermine une primitive de $f(x) = 4\sin^2 x \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

Transformer. Pour tout réel x, $4\sin^2 x \cos^2 x = (2\sin x \cos x)^2 = \sin^2 2x$. On applique ensuite $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ avec $t = 2x$:

$$f(x) = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x.$$

Primitiver. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 4x}{8}$.

Vérifier. Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4\cos 4x}{8} = f(x)$.

Exemple : une fraction, par identification

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 9}{(x-2)^2}$ sur $I =]2, +\infty[$. Trouve des réels α et β tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{(x-2)^2}$, puis une primitive de f sur I.

Identifier. Pour tout $x \in I$, $\alpha + \dfrac{\beta}{(x-2)^2} = \dfrac{\alpha x^2 - 4\alpha x + 4\alpha + \beta}{(x-2)^2}$.

Il suffit que $\alpha = 2$, $-4\alpha = -8$ et $4\alpha + \beta = 9$, c'est-à-dire $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

Primitiver. $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ a la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x - 2$, qui ne s'annule pas sur I. Une primitive de f sur I est définie par $F(x) = 2x - \dfrac{1}{x-2}$.

Trouver des coefficients

Méthode : trouver des coefficients

1. **Dériver** F telle qu'elle est donnée, coefficients inconnus compris.
2. **Écrire** l'égalité $F'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle, puis comparer les coefficients des mêmes termes.
3. **Résoudre** le système obtenu.

4. **Vérifier** en dérivant la fonction trouvée.

Exemple : Exemple guidé : deux coefficients

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{3x+5}{2\sqrt{x+1}}$ sur $I =]-1, +\infty[$. Trouve des réels a et b tels que $F(x) = (ax+b)\sqrt{x+1}$ définisse une primitive de f sur I.

Dériver. Pour tout $x \in I$, $x+1 > 0$: F est dérivable sur I, par produit et composée. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\sqrt{x+1} + \frac{ax+b}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2a(x+1) + ax + b}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{3ax + 2a + b}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Identifier. $F' = f$ sur I dès que $3a = 3$ et $2a + b = 5$, soit $a = 1$ et $b = 3$.

Conclure. La fonction définie par $F(x) = (x+3)\sqrt{x+1}$ est une primitive de f sur I.

À toi : Rédige une recherche de coefficients

Rédige la recherche de réels a et b tels que $F(x) = a\,x\sin 2x + b\cos 2x$ définisse une primitive de $x \mapsto x\cos 2x$ sur $\mathbb{R}$.

Indice 1
Dérive $x \mapsto x\sin 2x$ comme un produit, et $x \mapsto \cos 2x$ comme une composée.
Indice 2
Regroupe les termes en $x\cos 2x$ et en $\sin 2x$, puis identifie avec $x\cos 2x$: tu obtiens un système en a et b.
Indice 3
Point délicat : le facteur 2 qui vient de la composée. Termine en vérifiant, puis par la phrase de conclusion.

Réponse
« **Dériver.** F est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit et composée. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\sin 2x \\ &\quad + 2a\,x\cos 2x \\ &\quad - 2b\sin 2x \\ &= 2a\,x\cos 2x \\ &\quad + (a - 2b)\sin 2x. \end{aligned}$$

Identifier. Il suffit que $2a = 1$ et $a - 2b = 0$, soit $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{4}$. Alors $F'(x) = x\cos 2x$ pour tout réel x.

Conclusion. Donc $x \mapsto \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$ est une primitive de $x \mapsto x\cos 2x$ sur $\mathbb{R}$. »

Une chaîne de questions

Attention : pas de règle du produit

✗ « Une primitive de $x \mapsto x\sin x$ est $x \mapsto -\frac{x^2}{2}\cos x$. »

Sa dérivée vaut $-x\cos x + \frac{x^2}{2}\sin x$, et non $x\sin x$.

✓ Il n'existe aucune règle du produit pour les primitives, ni du quotient. Devant un produit, cherche une forme composée, transforme l'expression, ou cherche des coefficients comme ci-dessus.

Remarque : Coin examen : coefficients, puis primitive

Une question de primitive peut prendre la forme d'une chaîne :

- « Déterminer les réels a, b et c tels que … » : on dérive, on identifie, on résout ;
- « En déduire une primitive de f sur I » : on réutilise l'écriture trouvée ;
- « Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en … » : on ajuste la constante.

Chaque réponse se termine par une phrase qui nomme F, f et l'intervalle. « En déduire » signale qu'il faut se servir de la question précédente.

Étudier une primitive sans la calculer

Une primitive sans formule

Soit $f(x) = (2-x)\sqrt{x^4+1}$ pour tout réel x. Aucune formule de ce chapitre ne donne une primitive de f.

Pourtant, on peut étudier la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 : son existence, ses variations, sa position par rapport à d'autres fonctions.

Tout passe par une seule égalité : $F' = f$.

Devine : Sans formule ?

Sans formule pour F, que peux-tu dire de ses variations sur $]-\infty, 2]$?

A. Rien : il faudrait d'abord calculer F.

Faux.

Les variations se lisent sur le signe de la dérivée, et la dérivée de F est connue : c'est f.

B. F est croissante sur $]-\infty, 2]$.

Juste.

Juste : pour $x \leq 2$, $f(x) \geq 0$.

C. F est croissante sur $\mathbb{R}$, car la racine est positive.

Faux.

Le facteur $2 - x$ devient négatif pour $x > 2$.

D. F est décroissante sur $]-\infty, 2]$, car $F(0) = 0$.

Faux.

La valeur en 0 ne dit rien du sens de variation : c'est le signe de F' qui compte.

Correction

Pour tout réel x, $F'(x) = f(x) = (2 - x)\sqrt{x^4 + 1}$. Le facteur $\sqrt{x^4 + 1}$ est strictement positif.

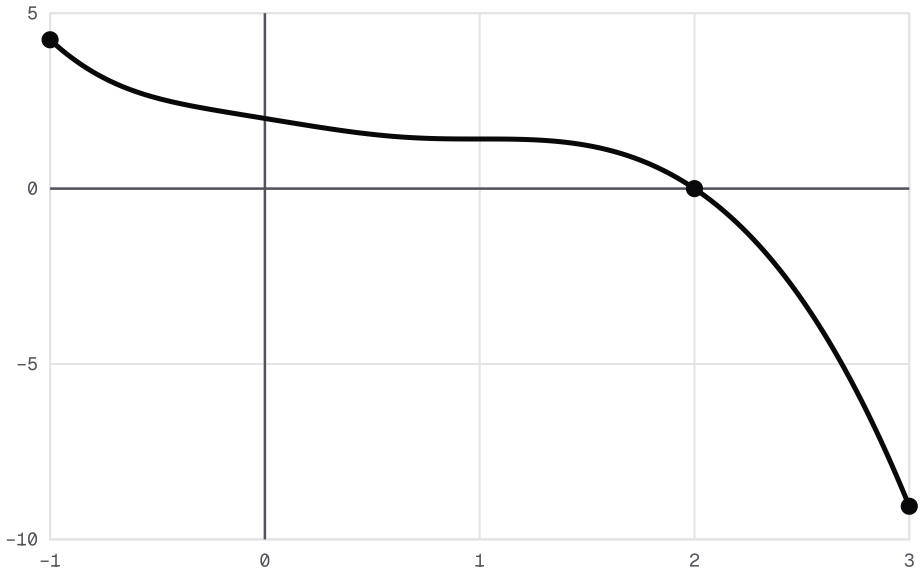
Donc $f(x)$ a le signe de $2 - x$: strictement positif pour $x < 2$, nul en 2. Ainsi F est croissante sur $]-\infty, 2]$.

La méthode

Méthode : étudier une primitive sans l'expliciter

1. **Existence** : f est continue sur l'intervalle I, donc elle y admet des primitives (théorème d'existence, admis).
2. **Unicité** : si une valeur est imposée en un point de I, la primitive est unique.
3. **Variations** : $F' = f$, donc le signe de f donne le sens de variation de F.
4. **Comparaison** : si $F(x_0) = G(x_0)$ et $F' \leq G'$ sur I, la fonction $G - F$ croît et s'annule en x_0. Donc $F(x) \leq G(x)$ pour $x \geq x_0$, mais $F(x) \geq G(x)$ pour $x \leq x_0$.

N'écris jamais une formule de F que tu ne connais pas.



Courbe de f : au-dessus de l'axe des abscisses avant 2, en dessous après 2. Sa primitive F nulle en 0 monte, puis descend.

Exemple : Exemple guidé : la primitive qui s'annule en 0

Existence et unicité. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, comme produit et composée de fonctions continues. Elle y admet donc des primitives, et une seule s'annule en 0 : c'est F.

Signe de la dérivée. Pour tout réel x, $F'(x) = (2-x)\sqrt{x^4+1}$, du signe de $2-x$, car $\sqrt{x^4+1} > 0$.

Variations. F' est strictement positive sur $]-\infty, 2[$ et strictement négative sur $]2, +\infty[$. Donc F est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Elle admet en 2 un maximum, égal à $F(2)$.

Une conséquence. Comme $0 < 2$, la stricte croissance donne $F(0) < F(2)$. Or $F(0) = 0$, donc $F(2) > 0$.

Variations de F sur $\mathbb{R}$, lues sur le signe de f : F(0) = 0, maximum F(2) en 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$F'(x)$	+		+		0	−	
$F(x)$		↗	0	↗	$F(2)$	↘	

Comparer deux primitives

À toi : Rédige une comparaison

Soit G la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{x^4+1}$ qui s'annule en 0. Rédige la preuve de :

$$\forall x \geq 0, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

Indice 1

Pose $D(x) = G(x) - \dfrac{x^3}{3}$: c'est une différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Indice 2

Calcule $D'(x)$, puis compare $\sqrt{x^4+1}$ à $\sqrt{x^4} = x^2$.

Indice 3

Point délicat : conclus avec $D(0)$ et le sens de variation de D sur $[0, +\infty[$.

Réponse

« **Existence.** La fonction $x \mapsto \sqrt{x^4+1}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$: G existe, et elle est unique.

Une fonction auxiliaire. Pour tout réel x, posons $D(x) = G(x) - \dfrac{x^3}{3}$. D est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} D'(x) &= \sqrt{x^4+1} - x^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

car $x^4 + 1 > x^4$, la racine carrée est strictement croissante et $\sqrt{x^4} = x^2$.

Signe de D. Donc D est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $D(0) = 0$, on a $D(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $G(x) \geq \dfrac{x^3}{3}$. »

Remarque : Coin examen : une primitive sans formule

Quand l'énoncé définit F comme « la primitive de f sur I qui s'annule en x_0 », les questions peuvent prendre cette forme :

- « Justifier l'existence de F » : f est continue sur l'intervalle I ;
- « Calculer $F'(x)$ » : la réponse est $f(x)$, sans autre calcul ;
- « Dresser le tableau de variations de F » : on étudie le signe de $f(x)$;
- « Comparer F et une fonction G » : on étudie $F - G$, sa dérivée et une valeur commune.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir : définir et décrire

- Une **primitive** de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.
- Sur un **intervalle**, les primitives de f sont les fonctions $F + k$, $k \in \mathbb{R}$. Hors d'un intervalle, c'est faux.

- Une fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle : ce théorème est admis.
- Si f admet des primitives sur l'intervalle I, par exemple si elle y est continue, une valeur imposée $F(x_0) = y_0$, avec $x_0 \in I$, désigne **la** primitive : elle est unique.

À retenir : calculer et étudier

- Tableau usuel, linéarité, formes composées : toujours avec leur intervalle, et la condition sur u.
- Aucune règle du produit : on transforme (développer, linéariser, identifier) ou on reconnaît une forme composée.
- Pour étudier une primitive sans formule : existence, $F' = f$, signe de f.
- Chaque « montrer que » se termine par une phrase qui nomme F, f et l'intervalle.

Le mot du prof. Tu as appris à retrouver une fonction à partir de sa dérivée, et à le prouver proprement. Les chapitres suivants t'apporteront de nouvelles primitives : celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec le logarithme, puis celles liées à l'exponentielle. Le calcul intégral démontrera enfin le théorème d'existence que tu as admis ici.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions primitives » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)