BURHAN

Résumé : Fonctions logarithmiques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 1

La fonction ln : définition, variations, signe

À retenir : Le réflexe : ln t existe si et seulement si t > 0

Avant d'écrire $\ln t$, vérifie que $t > 0$. La fonction $\ln$ vit sur $]0, +\infty[$ seulement : $\ln 0$ et $\ln(-1)$ n'existent pas.

Garde trois faits en tête :

- $\ln 1 = 0$;
- pour tout $x > 0, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Définition : Fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$: elle y admet des primitives, et une seule d'entre elles s'annule en 1 (chapitre des primitives).

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, $\ln 1 = 0$ et, pour tout $x > 0, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque

Un seul résultat est **admis** (hors valeurs numériques données) : l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle, résultat du chapitre des primitives.

L'unicité de la primitive nulle en 1 y était démontrée. Hors définitions, tous les autres énoncés de ce résumé sont démontrés dans le cours.

Propriété : Variations, comparaison et signe de ln

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

En particulier, pour tout $x > 0$: $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$; $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$; $\ln x > 0$ si et seulement si $x > 1$.

Exemple

Énoncé. Donne le signe de $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$, puis compare $\ln\left(\frac{9}{4}\right)$ et $\ln\left(\frac{11}{5}\right)$.

Signe. $0 < \frac{3}{8} < 1$, donc $\ln\left(\frac{3}{8}\right) < 0$.

Comparaison. $\frac{9}{4} = \frac{45}{20}$ et $\frac{11}{5} = \frac{44}{20}$, donc $\frac{11}{5} < \frac{9}{4}$. Ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. Par stricte croissance de $\ln$:

$$\ln\left(\frac{11}{5}\right) < \ln\left(\frac{9}{4}\right).$$

Relation fondamentale et règles de calcul

Théorème : Relation fondamentale

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Propriété : Logarithme d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Soit $a > 0$ et $b > 0$.

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- Pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$.
- Pour tout rationnel r, $\ln(a^r) = r \ln a$; en particulier $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Produit, a > 0 et b > 0

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Inverse, b > 0

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

Quotient, a > 0 et b > 0

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Puissance d'exposant rationnel r, a > 0

$$\ln(a^r) = r\ln a \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

Carré d'un réel non nul

$$\ln(x^2) = 2\ln|x|$$

Exemple

Énoncé. Écris $E = \ln 250 + 2\ln\left(\frac{4}{5}\right) - \ln 40$ à l'aide de $\ln 2$ seul.

Décomposer. $250 = 2 \times 5^3$, $4 = 2^2$ et $40 = 2^3 \times 5$: tous ces nombres sont strictement positifs.

Calculer. On développe chaque logarithme, puis on réduit :

$$\begin{aligned} E &= \ln 2 + 3\ln 5 \\ &\quad + 4\ln 2 - 2\ln 5 \\ &\quad - 3\ln 2 - \ln 5 \\ &= 2\ln 2. \end{aligned}$$

Contrôle. $250 \times \frac{16}{25} \div 40 = 4$, et $\ln 4 = 2\ln 2$.

Attention : Un logarithme de somme ne se découpe pas

La relation fondamentale porte sur un **produit**. Avec $a = b = 1$: $\ln(1+1) = \ln 2 > 0$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$.

Pour transformer le logarithme d'une somme, factorise d'abord. Pour tout $x > 0$, $x^2 + 5x = x(x+5)$, donc :

$$\ln(x^2 + 5x) = \ln x + \ln(x+5).$$

Attention : Le carré : ln(x²) vaut 2 ln x pour x > 0 seulement

Pour tout $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$; l'écriture $2\ln x$ exige $x > 0$.

- L'équation $\ln(x^2) = \ln 49$ a deux solutions, -7 et 7.
- L'équation $2\ln x = \ln 49$ n'a que 7, car son domaine est $]0, +\infty[$.

Remplacer l'une par l'autre perd ou ajoute des solutions.

Équations, inéquations, systèmes

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation avec ln

1. **Domaine.** Écris une condition par logarithme : l'expression sous le $\ln$ est strictement positive. Résous-les toutes : tu obtiens D.
2. **Transformer.** Sur D, regroupe avec les règles de calcul jusqu'à $\ln A = \ln B$, $\ln A \leq \ln B$ ou $\ln A = c$.

3. **Conclure.** Par stricte croissance de $\ln$: $A = B$, ou $A \leq B$ sans changer le sens ; pour c rationnel, $\ln A = c$ donne $A = e^c$.
4. **Intersecter** les valeurs obtenues avec D.

Rédaction : « on résout dans $\mathbb{R}$; l'équation a un sens si et seulement si… », puis « donc $S = \dots$ ».

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\ln(x-2) + \ln(x+4) = \ln(4x+1)$.

Domaine. Il faut $x > 2$, $x > -4$ et $x > -\dfrac{1}{4}$, donc $D =]2, +\infty[$.

Transformer. Sur D, l'équation équivaut à $\ln\big((x-2)(x+4)\big) = \ln(4x+1)$, puis à $(x-2)(x+4) = 4x+1$, soit :

$$x^2 - 2x - 9 = 0.$$

Ses racines sont $1 - \sqrt{10}$ et $1 + \sqrt{10}$.

Intersecter. $1 - \sqrt{10} < 0$ n'est pas dans D ; $1 + \sqrt{10} > 2$, car $\sqrt{10} > 1$. Donc $S = \{1 + \sqrt{10}\}$.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $2\ln x \leq \ln(x+6)$.

Domaine. $x > 0$ et $x + 6 > 0$, donc $D =]0, +\infty[$.

Transformer. Pour $x \in D$, $2\ln x = \ln(x^2)$. Par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $x^2 \leq x + 6$, soit $(x-3)(x+2) \leq 0$, c'est-à-dire $-2 \leq x \leq 3$.

Intersecter. On garde les solutions qui sont dans D :

$$S = D \cap [-2, 3] =]0, 3]\,.$$

Attention : Une racine du calcul n'est pas forcément une solution

Résolvons $\ln x + \ln(x-3) = \ln 4$. Le calcul donne $x(x-3) = 4$, soit $x = 4$ ou $x = -1$.

Or le domaine est $]3, +\infty[$: -1 n'en fait pas partie, et $\ln(-1)$ n'existe pas. Donc $S = \{4\}$.

Sans le domaine, tu aurais gardé une fausse solution.

Méthode : résoudre un système avec des logarithmes

1. **Conditions.** Écris la condition d'existence de chaque logarithme, par exemple $x > 0$ et $y > 0$.
2. **Changer d'inconnues.** Pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$; ou, avec la relation fondamentale, ramène-toi à la somme et au produit de x et y.

3. **Résoudre** : un système linéaire en X et Y, ou bien $t^2 - st + p = 0$, dont x et y sont les racines quand s est leur somme et p leur produit.
4. **Revenir** à x et y : chaque équation $\ln x = c$ a une seule solution. Vérifie les conditions.

Rédaction : « le système a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$ », puis « donc $S = \{(\dots, \dots)\}$ ».

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ \ln x - \ln y = -1 \end{cases}$$

Conditions. $x > 0$ et $y > 0$.

Inconnues auxiliaires. Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: $2X + Y = 7$ et $X - Y = -1$. En additionnant, $3X = 6$, donc $X = 2$, puis $Y = 3$.

Retour. $\ln x = 2$ et $\ln y = 3$ donnent $x = e^2$ et $y = e^3$, strictement positifs. Donc $S = \{(e^2, e^3)\}$.

Limites aux bornes et nombre e

Propriété : Limites de ln en 0 et en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Théorème : Bijection de]0, +∞[sur $\mathbb{R}$; le nombre e

La fonction $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: pour tout réel y, l'équation $\ln x = y$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

En particulier, il existe un unique réel strictement positif, noté e, tel que $\ln e = 1$. Pour tout rationnel r, $\ln(e^r) = r$.

À retenir : Écrire un rationnel comme un logarithme

Pour tout rationnel r, $r = \ln(e^r)$. C'est ce qui transforme $\ln A = r$ en $A = e^r$, et $\ln A > r$ en $A > e^r$.

Garde les valeurs exactes : e^2, e^{-1}, $e^{\frac{1}{3}}$. Une valeur approchée, comme $e \approx 2{,}72$, ne sert que si l'énoncé la donne.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $2\ln(x+1) - 3 > 0$.

Domaine. $x+1>0$, donc $D =]-1, +\infty[$.

Transformer. Sur D, l'inéquation équivaut à $\ln(x+1) > \dfrac{3}{2} = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$. Par stricte croissance de $\ln$, elle équivaut à $x+1 > e^{\frac{3}{2}}$.

Conclure. $\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2} > 0$, donc $e^{\frac{3}{2}} > 1$ et $e^{\frac{3}{2}} - 1 > 0 > -1$: toutes ces valeurs sont dans D. Ainsi :

$$S = \left]e^{\frac{3}{2}} - 1, +\infty\right[.$$

Inégalité fondamentale et croissances comparées

Propriété : Inégalité ln x ≤ x – 1

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

À retenir : Inégalités à connaître

Point important : quatre inégalités reviennent dans les études.

- Pour tout $x > 0$, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$. La borne de gauche est l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ (F07) appliquée à $t = \dfrac{1}{x}$.
- Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$: c'est la même inégalité (F07) appliquée à $t = 1 + x$.
- Pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$: la borne de gauche se redémontre par l'étude d'une fonction.

Propriété : Croissances comparées : ln x sur x, x ln x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Propriété : Croissances comparées avec une puissance de x

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

Aux bornes de]0, +∞[(F05)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Croissances comparées, n entier, n ≥ 1 (F08, F09)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Nombre dérivé de ln en 1 (F10)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Méthode : lever une forme indéterminée avec une limite de référence

1. **Identifier** la forme indéterminée : différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, produit « zéro fois l'infini », quotient de deux termes infinis ou nuls.
2. **Faire apparaître** une limite de référence : factorise par le terme dominant, écris $\ln(\lambda x) = \ln\lambda + \ln x$, ou change de variable ($t = \sqrt{x}$, $t = \dfrac{1}{x}$, $t = x - 1$).
3. **Citer** la limite employée et conclure par les opérations sur les limites.

Rédaction : « or $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ (croissances comparées), donc… ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 5\ln x)$.

Forme. $2x$ et $5\ln x$ tendent vers $+\infty$: la différence est indéterminée.

Factoriser. Pour tout $x > 0$:

$$2x - 5\ln x = x\left(2 - 5\,\frac{\ln x}{x}\right).$$

Conclure. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées). La parenthèse tend vers 2 ; par produit, la limite vaut $+\infty$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

Changer de variable. Pour $x > 0$, $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$ et $x = (\sqrt{x})^2$, donc :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Conclure. Avec $t = \sqrt{x}$, t tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ (croissances comparées). Par composée et produit, la limite vaut 0.

Attention : Aucune règle « l'infini sur l'infini »

Deux quotients « $+\infty$ sur $+\infty$ » peuvent avoir des limites différentes : $\dfrac{3x}{x}$ tend vers 3, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0.

De même, $x \ln x$ en 0^+ est un produit « zéro fois l'infini ».

Aucune règle de calcul ne conclut seule : cite une limite de référence.

Limites en 1 et courbe de ln

Propriété : Limites liées au nombre dérivé de ln en 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

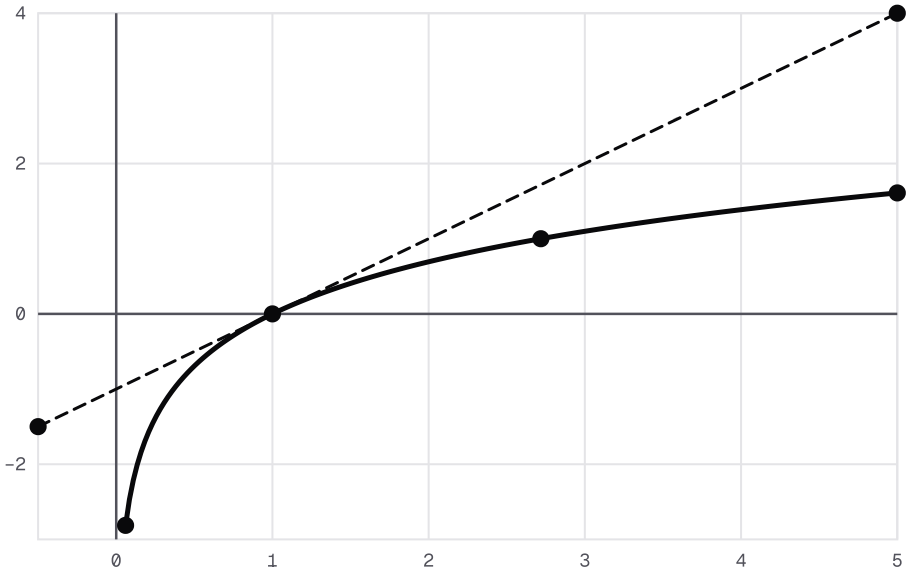
et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Propriété : Courbe de la fonction ln

Dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ de la fonction $\ln$:

- admet l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$) pour asymptote verticale ;
- admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des abscisses ;
- admet au point d'abscisse 1 la tangente d'équation $y = x - 1$, et se situe en dessous de cette tangente ;
- est tournée vers le bas : $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$;
- passe par les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(e, 1)$.



Courbe de ln dans un repère orthonormé : l'axe des ordonnées est asymptote, la tangente en (1, 0) a pour équation y = x – 1 et passe au-dessus, et le point (e, 1) est sur la courbe.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^3 - 1}$.

Forme. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.

Faire apparaître la référence. On a $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{\ln x}{x^3 - 1} = \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Conclure. Or $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ (nombre dérivé de $\ln$ en 1), et le second facteur tend vers $\dfrac{1}{3}$. Par produit, la limite vaut $\dfrac{1}{3}$.

À retenir **: Lire la courbe de ln**

La tangente en 1, d'équation $y = x - 1$, et l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ disent la même chose : $\mathcal{C}_{\ln}$ reste sous cette tangente.

Près de 0, la courbe longe l'axe des ordonnées vers le bas. Vers $+\infty$, elle monte sans limite finie, mais de plus en plus lentement.

Dérivée de ln u, primitives de u'/u

Théorème **: Dérivée de ln(u) ; dérivée logarithmique**

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\big(\ln|u|\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

La fonction $\dfrac{u'}{u}$ s'appelle la **dérivée logarithmique** de u. En particulier, $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Propriété : Primitives de u′/u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I.

La fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I ; les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où $k \in \mathbb{R}$. Si de plus $u > 0$ sur I, $\ln|u| = \ln u$.

En particulier, les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln x + k$ sur $]0, +\infty[$, et $x \mapsto \ln(-x) + k$ sur $]-\infty, 0[$, où $k \in \mathbb{R}$.

Si u > 0 sur I

$$\big(\ln u\big)' = \frac{u'}{u}$$

Si u ne s'annule pas sur I

$$\big(\ln|u|\big)' = \frac{u'}{u}$$

Primitives sur I, u ne s'annule pas, λ et k réels

$$\lambda\,\frac{u'}{u} \quad \longrightarrow \quad \lambda \ln|u| + k$$

Logarithme de base a

$$(\log_a)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ sur }]0, +\infty[$$

Méthode : dériver ln u, primitiver λ u′/u

1. **Nommer** u et l'intervalle I, puis calculer u'.
2. **Vérifier la condition** sur tout I : $u > 0$ pour $\ln u$; u ne s'annule pas pour $\ln|u|$.
3. **Dériver** avec $\dfrac{u'}{u}$, ou **écrire** la fonction sous la forme $\lambda\,\dfrac{u'}{u}$ en ajustant la constante λ.
4. **Contrôler** en dérivant le résultat.

Rédaction : « on pose $u(x) = \ldots$; u est dérivable et strictement positive sur I, donc… ».

Exemple

Énoncé. Dérive $x \mapsto \ln(7 - 3x)$ sur $I = \left]-\infty, \dfrac{7}{3}\right[$.

Condition. Avec $u : x \mapsto 7 - 3x$, u est dérivable et strictement positive sur I, et $u'(x) = -3$.

Dériver. Pour tout $x \in I$, la dérivée vaut $\dfrac{-3}{7 - 3x} = \dfrac{3}{3x - 7}$.

Remarque. Sur $\left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$, c'est $x \mapsto \ln(3x-7)$ qui a cette dérivée : $x \mapsto \ln|3x-7|$ réunit les deux cas.

Exemple

Énoncé. Détermine les primitives de $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+8}$ sur $I =]-2, +\infty[$.

Forme. Avec $u : x \mapsto x^3+8$, $u'(x) = 3x^2$, donc la fonction s'écrit $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u}$. Pour $x > -2$, $x^3 > -8$: u est strictement positive sur I.

Conclure. Les primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(x^3+8) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Sur $]-\infty, -2[$, ce seraient les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(-x^3-8) + k$.

Attention : ln u exige u > 0 ; ln |u| exige seulement u ≠ 0

Sur $]-\infty, 0[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(-x)$: $\ln x$ n'y existe pas.

De même, sur $]-3, 3[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-9}$ est $x \mapsto \ln(9-x^2)$, et non $x \mapsto \ln(x^2-9)$.

Nomme toujours l'intervalle et le signe de u.

Étudier une fonction, démontrer une inégalité

Méthode : étudier une fonction comportant ln

1. **Domaine** : une condition de positivité par logarithme.
2. **Limites aux bornes**, en citant les limites de référence ; branches infinies.
3. **Dérivée** sur chaque intervalle du domaine, factorisée pour lire son signe.
4. **Tableau de variations**, puis extremums, tangentes et position de la courbe.

Rédaction : « f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$… ».

Exemple

Énoncé. Étudie les variations de $f : x \mapsto x^2 - 8\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Limites. En 0^+, x^2 tend vers 0 et $-8\ln x$ vers $+\infty$: la limite vaut $+\infty$.

En $+\infty$, on écrit $x^2 - 8\ln x = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. Or $\dfrac{\ln x}{x^2}$ tend vers 0 (croissances comparées) : la limite vaut $+\infty$.

Dérivée. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$, du signe de $x-2$.

Variations. f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$; son minimum vaut $f(2) = 4 - 8\ln 2$.

Méthode : démontrer une inégalité par l'étude d'une fonction

1. **Se ramener** à $h(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I nommé : h est la différence des deux membres.
2. **Étudier** les variations de h sur I : dérivée, et au besoin le signe d'un facteur étudié à part.
3. **Utiliser** une valeur connue de h, en une borne de I ou en son minimum, avec le sens de variation.
4. **Conclure** sur I, en précisant le cas d'égalité.

Rédaction : « montrons que, pour tout $x \in I$, … ; on pose h … ; donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui est l'inégalité voulue ».

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

Fonction auxiliaire. Soit $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x$, dérivable sur $[1, +\infty[$. Pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Variations. $h'(x) > 0$ pour $x > 1$, donc h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et $h(1) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 1$, $h(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, avec égalité seulement en $x = 1$.

À retenir : Les formes de questions

Un problème d'étude enchaîne des questions types :

- « Montrer que, pour tout x de I… » : méthode de l'inégalité ;
- « Calculer la limite et interpréter » : limite de référence citée, puis asymptote ou branche ;
- « Étudier les variations » : dérivée factorisée et tableau ;
- « En déduire » : réutilise le résultat précédent sans le redémontrer.

Rédige chaque réponse comme une courte preuve. Écris d'abord le domaine ou l'intervalle, justifie chaque transformation, termine par une phrase de conclusion.

Une limite de référence se cite par son nom. Un ensemble de solutions se donne en entier, avec chaque borne incluse ou exclue.

Logarithme de base a, logarithme décimal

Définition : Logarithme de base a ; logarithme décimal

Soit a un réel strictement positif, avec $a \neq 1$; alors $\ln a \neq 0$ (F02).

On appelle **fonction logarithme de base** a, notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le **logarithme décimal**, noté $\log$, est le logarithme de base 10 : pour tout $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Propriété : Propriétés algébriques du logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout rationnel r :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ et $\log_a(x^r) = r \log_a x$;
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ et $\log_a(a^r) = r$.

En particulier, $\log 10 = 1$ et $\log(10^r) = r$ pour tout rationnel r ; et $\log_e = \ln$.

Propriété : Variations et limites du logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

- Si $a > 1$: $\log_a$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y$ si et seulement si $x < y$.
- Si $0 < a < 1$: $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$; pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y$ si et seulement si $x > y$.

Méthode : logarithme de base a et logarithme décimal

1. **Revenir à ln** : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, avec $a > 0$ et $a \neq 1$.
2. **Inconnue entière** : pour $a^n \leq b$ ou $a^n \geq b$, applique $\ln$, strictement croissante, puis divise par $\ln a$ en annonçant son signe.
3. **Nombre de chiffres** d'un entier $N \geq 1$: trouve l'entier p tel que $p \leq \log N < p + 1$; alors $10^p \leq N < 10^{p+1}$ et N s'écrit avec $p + 1$ chiffres.

Rédaction : « comme $0 < a < 1$, on a $\ln a < 0$, donc… ».

Exemple

Énoncé. On donne $2{,}302 < \ln 10 < 2{,}303$ et $0{,}405 < \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0{,}406$. Détermine le plus petit entier naturel n tel que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq \dfrac{1}{100}$.

Appliquer ln. Par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $n \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leq -2\ln 10$.

Diviser. $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$: diviser par ce nombre change le sens. On obtient $n \geq q$, avec $q = \dfrac{2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

Encadrer. Les encadrements donnés fournissent :

$$q > \frac{4{,}604}{0{,}406} > 11{,}3,$$
$$q < \frac{4{,}606}{0{,}405} < 11{,}4.$$

Conclure. Le plus petit entier qui convient est $n = 12$.

Exemple

Énoncé. On donne $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$. Combien de chiffres l'entier 2^{50} compte-t-il ?

Calcul. $\log\left(2^{50}\right) = 50\log 2$, donc $15{,}05 < \log\left(2^{50}\right) < 15{,}1$. En particulier $15 \leq \log\left(2^{50}\right) < 16$.

Conclure. Comme $\log\left(10^{15}\right) = 15$ et $\log\left(10^{16}\right) = 16$, la stricte croissance de $\log$ donne $10^{15} \leq 2^{50} < 10^{16}$. L'entier 2^{50} compte donc 16 chiffres.

Attention : Diviser par ln a : regarder son signe

Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et $\log_a$ est strictement décroissante.

Ainsi $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ et $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, alors que $8 > 2$. Diviser une inégalité par $\ln a$ en change alors le sens.

Remarque

La fonction $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque sera la fonction exponentielle, au chapitre suivant. Elle donnera un sens aux puissances d'exposant réel quelconque, au-delà des exposants rationnels de ce chapitre.