BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 6,75 pts

Une fonction prolongée en 0, un point d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\ln x - 3)^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On donne $e \approx 2{,}72$, $e^2 \approx 7{,}39$ et $e^3 \approx 20{,}09$.

1. a) 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

INDICE

Pose $X = \sqrt{x}$: alors $\ln x = 2 \ln X$ et $x = X^2$. Fais apparaître le carré de $X \ln X$ (F08).

1. b) 0,5 pts

En déduire que f est continue à droite en 0.

INDICE

Développe $(\ln x - 3)^2$: trois termes, chacun traité par 1. a), par les croissances comparées (F08) ou directement.

2. 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour $x > 0$, puis sa limite en 0^+.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Aucune forme indéterminée ici : regarde le comportement de $\ln x - 3$ en $+\infty$.

4. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1)(\ln x - 3).$$

INDICE

Dérive le produit de $\dfrac{x}{2}$ par $(\ln x - 3)^2$; la dérivée de $(\ln x - 3)^2$ est $\dfrac{2}{x}(\ln x - 3)$. Factorise ensuite par $\ln x - 3$.

4. b) 0,75 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$ et $\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > e^3$ (F02 et F06 : croissance de $\ln$, nombre e). Calcule $f(e)$ et $f(e^3)$.

5. a) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{\ln x - 2}{x}.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Développe d'abord $f'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln x)^2 - 4\ln x + 3\right)$, puis dérive. Cherche où f'' s'annule en changeant de signe.

5. b) 0,5 pts

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

$f'(e^2) = \frac{1}{2}(2-1)(2-3)$.

5. c) 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Pose $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - e^2$. Alors $g'' = f''$ et $g'(e^2) = g(e^2) = 0$: étudie g', puis g, de chaque côté de e^2.

6. 0,75 pts

Tracer T et $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Place les points d'abscisses 0, e, e^2 et e^3, puis les tangentes connues : verticale en O, horizontales en e et en e^3.

Exercice 2 6,5 pts

Deux zéros, puis une suite qui en approche un

On admet que $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}7$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}1$.

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$.

Partie B. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) 0,75 pts

Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

INDICE

En 0^+, il n'y a pas de forme indéterminée. En $+\infty$, factorise par x et cite les croissances comparées (F08).

1. b) 0,75 pts

Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$ et calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

INDICE

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2x}$: réduis au même dénominateur.

2. a) 1 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions β et α, avec :

$$e^{-4} < \beta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2 < \alpha < 3.$$

INDICE

Calcule $g(e^{-4})$ avec F06 (le nombre e), puis $g(2)$ et $g(3)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence ; la stricte monotonie donne l'unicité.

2. b) 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Utilise les variations de g de part et d'autre de $\dfrac{1}{2}$ et ses deux zéros.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in [2, 3]$, $f(x) \in [2, 3]$.

INDICE

f est croissante : encadre $f(x)$ entre $f(2)$ et $f(3)$, puis utilise les valeurs données de $\ln 2$ et $\ln 3$.

3. b) 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$.

INDICE

L'hérédité découle directement de 3. a).

4. a) 0,25 pts

Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

INDICE

Traduis $g(\alpha) = 0$.

4. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

INDICE

Majore $|f'(x)|$ sur $[2, 3]$, puis applique l'inégalité des accroissements finis entre u_n et α.

4. c) 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis la limite de la suite (u_n).

INDICE

Raisonne par récurrence avec 4. b). Au départ, u_0 et α sont dans $[2, 3]$.

5. 0,75 pts

Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \leq 10^{-3}$. Que représente u_{n_0} ?

INDICE

L'inégalité équivaut à $4^{n_0} \geq 1000$. Compare 1000 à 4^4 et à 4^5, ou applique $\ln$ (F02).

Exercice 3 — 6,75 pts

Une inégalité préalable, une fonction bornée, une suite

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(\frac{2x+3}{2x}\right)-\frac{3}{2x+3}.$$

Partie B. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

et l'on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie C. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $w_n=n\ln\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)$.

1. a) — 0,75 pts

Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$:

$$g'(x)=\frac{-9}{x(2x+3)^2}.$$

INDICE

Pour $x>0$, écris $g(x)=\ln(2x+3)-\ln(2x)-\dfrac{3}{2x+3}$ (logarithme d'un quotient, F04), dérive, puis réduis au dénominateur $x(2x+3)^2$.

1. b) — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis montrer que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

INDICE

g est strictement décroissante. Pour $x>0$ fixé, compare $g(x)$ à $g(t)$ pour $t>x$, puis fais tendre t vers $+\infty$.

2. a) — 0,75 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x>0$, écris $f(x)=x\ln(2x+3)-x\ln 2-x\ln x$, puis cite les croissances comparées (F08) pour le dernier terme.

2. b) — 0,5 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Le taux d'accroissement en 0 vaut $\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)=\ln(2x+3)-\ln 2-\ln x$.

3. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pose $X = \dfrac{3}{2x}$: alors $x = \dfrac{3}{2X}$ et $\dfrac{2x+3}{2x} = 1 + X$. Cite la limite de référence F10.

4. a) 0,5 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Écris $f(x) = x\big(\ln(2x+3) - \ln(2x)\big)$ et dérive ce produit.

4. b) 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Le signe de f' est donné par la partie A. N'oublie pas la continuité en 0.

5. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq f(x) < \frac{3}{2}.$$

Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote.

INDICE

Même raisonnement qu'en 1. b) : compare $f(x)$ à $f(t)$ pour t grand, puis passe à la limite.

5. b) 0,5 pts

On donne $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right) \approx 0{,}92$. Tracer l'asymptote et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Place O avec sa demi-tangente verticale et le point d'abscisse 1. Le signe de $f'' = g'$ indique la concavité.

6. a) 0,75 pts

Vérifier que $w_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que la suite (w_n) est strictement croissante et convergente, et donner sa limite.

INDICE

$1 + \dfrac{3}{2n} = \dfrac{2n+3}{2n}$. Utilise ensuite les variations de f et la question 3.

6. b) `0,5 pts`

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n} < e^{\frac{3}{2}}.$$

INDICE

Compare les logarithmes des deux membres avec 5. a), le logarithme d'une puissance (F04) et le nombre e (F06).

Exercice 4 6,5 pts

Une fonction impaire, deux asymptotes, deux zéros opposés

On admet que $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}7$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}1$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O, et Δ la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

1. a) 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$ et $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Dresse un tableau de signes du quotient.

1. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \in D$, simplifie $\frac{-x-1}{-x+1}$, puis utilise le logarithme d'un inverse (F04).

2. a) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement la première limite.

INDICE

Quand x tend vers 1^+, le quotient $\frac{x-1}{x+1}$ tend vers 0^+ ; quand x tend vers $+\infty$, il tend vers 1.

2. b) 0,75 pts

Montrer que la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Étudie la différence $f(x) - \frac{x}{2}$: sa limite en $+\infty$, puis son signe, en comparant $\frac{x-1}{x+1}$ à 1.

3. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{x^2+3}{2(x^2-1)}.$$

INDICE

Pose $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$: calcule $u'(x)$, puis $\frac{u'(x)}{u(x)}$ (dérivée de $\ln u$, F12).

3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f sur $]1, +\infty[$, puis en déduire, sans nouveau calcul de dérivée, les variations de f sur $]-\infty, -1[$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 1$. Pour $]-\infty, -1[$, compare $f(a)$ et $f(b)$ pour $a < b < -1$ à l'aide de 1. b).

4. a) 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$, et que $2 < \alpha < 3$.

INDICE

Calcule $f(2)$ et $f(3)$ en valeurs exactes, puis utilise les encadrements donnés de $\ln 2$ et de $\ln 3$.

4. b) 0,5 pts

En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans D, puis le signe de $f(x)$ sur D.

INDICE

Utilise l'imparité (1. b)) et la stricte croissance de f sur chacun des deux intervalles qui forment D.

5. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) > \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente parallèle à Δ.

INDICE

Écris $f'(x) - \dfrac{1}{2}$ à l'aide du calcul de 3. a). Sur $]-\infty, -1[$, ce calcul reste valable.

6. 0,75 pts

Tracer Δ, les asymptotes verticales et $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Trace d'abord la partie de la courbe sur $]1, +\infty[$ (asymptotes, point d'abscisse 3, point d'abscisse α), puis complète par la symétrie de centre O.

Exercice 5 — 6,5 pts

Un encadrement polynomial, une dérivée en 0, une somme

Partie A. On considère les fonctions g et h définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4},$$
$$h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x).$$

Partie B. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Partie C. Pour n entier, $n \geq 1$, on note S_n la somme des n termes $\ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$, pour k entier allant de 1 à n :

$$S_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

1. a) — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ et réduis au dénominateur $1+x$, en vérifiant que $(1+x)(1-x+x^2-x^3) = 1 - x^4$; compare ensuite $g(x)$ à $g(0)$.

1. b) — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$.

INDICE

Même méthode qu'en 1. a). Vérifie que $(1-x+x^2)(1+x) = 1 + x^3$.

1. c) 0,5 pts

En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$$

INDICE

Traduis $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$ en un encadrement de $\ln(1+x) - x$, puis divise par x^2.

2. a) 0,5 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Cite la limite de référence F10, qui porte sur $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

2. b) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable à droite en 0, de nombre dérivé à droite $-\dfrac{1}{2}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Écris le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour $x > 0$: c'est la quantité encadrée en 1. c).

3. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x > 0$, écris $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x}$ et pose $X = 1 + x$.

4. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

INDICE

Applique l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ (F07) au réel $\dfrac{1}{1+x}$, différent de 1, puis le logarithme d'un inverse (F04).

4. b) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

En déduire le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient de $\ln(1+x)$ par x, puis utilise 4. a) pour le signe du numérateur. N'oublie pas la continuité en 0.

5. a) 0,75 pts

Soit $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Vérifier que $\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, puis montrer que :

$$\frac{k}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

INDICE

Situe $\frac{k}{n^2}$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{n}\right]$ et utilise la décroissance de f sur $[0, +\infty[$ (4. b)).

5. b) 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{n+1}{2n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n},$$

puis que la suite (S_n) converge, et donner sa limite.

INDICE

Ajoute les n encadrements de 5. a), avec $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour la limite, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et f est continue à droite en 0.