BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 6,75 pts

Une fonction prolongée en 0, un point d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\ln x - 3)^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On donne $e \approx 2{,}72$, $e^2 \approx 7{,}39$ et $e^3 \approx 20{,}09$.

1. a) 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

INDICE

Pose $X = \sqrt{x}$: alors $\ln x = 2 \ln X$ et $x = X^2$. Fais apparaître le carré de $X \ln X$ (F08).

CORRIGÉ

Changement de variable. Soit $x > 0$; posons $X = \sqrt{x}$. Alors $X > 0$, $x = X^2$ et, d'après le logarithme d'une puissance (F04), $\ln x = 2 \ln X$. Donc :

$$\begin{aligned} x(\ln x)^2 &= X^2 \times 4(\ln X)^2 \\ &= 4(X \ln X)^2. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, X tend vers 0^+. D'après les croissances comparées (F08), $X \ln X$ tend vers 0, donc son carré aussi.

Conclusion.

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0.$$

1. b) 0,5 pts

En déduire que f est continue à droite en 0.

INDICE

Développe $(\ln x - 3)^2$: trois termes, chacun traité par 1. a), par les croissances comparées (F08) ou directement.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - 3x\ln x + \frac{9}{2}x.$$

Limite de chaque terme en 0^+.

- D'après 1. a), $x(\ln x)^2$ tend vers 0.
- D'après les croissances comparées (F08), $x\ln x$ tend vers 0.
- $\frac{9}{2}x$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

2. 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour $x > 0$, puis sa limite en 0^+.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}(\ln x - 3)^2.$$

Limite. D'après les limites de $\ln$ (F05), $\ln x - 3$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+, donc son carré tend vers $+\infty$. Le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0. Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ admet au point O une demi-tangente verticale.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Aucune forme indéterminée ici : regarde le comportement de $\ln x - 3$ en $+\infty$.

CORRIGÉ

D'après les limites de $\ln$ (F05), $\ln x - 3$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc $(\ln x - 3)^2$ aussi.

Limite de f. Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$, par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}(\ln x - 3)^2$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1)(\ln x - 3).$$

INDICE

Dérive le produit de $\dfrac{x}{2}$ par $(\ln x - 3)^2$; la dérivée de $(\ln x - 3)^2$ est $\dfrac{2}{x}(\ln x - 3)$. Factorise ensuite par $\ln x - 3$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0,+\infty[$, $\ln$ est dérivable (F01), donc $x \mapsto (\ln x - 3)^2$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \dfrac{2}{x}(\ln x - 3)$. Par produit, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calcul de $f'(x)$. Soit $x > 0$. Le second terme de la dérivée du produit vaut $\dfrac{x}{2} \times \dfrac{2}{x}(\ln x - 3) = \ln x - 3$. On factorise ensuite par $\ln x - 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(\ln x - 3)^2 \\ &\quad + (\ln x - 3) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x - 3) \\ &\quad \times (\ln x - 3 + 2) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x - 1) \\ &\quad \times (\ln x - 3). \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x - 1)(\ln x - 3)$.

4. b) `0,75 pts`

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$ et $\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > e^3$ (F02 et F06 : croissance de $\ln$, nombre e). Calcule $f(e)$ et $f(e^3)$.

CORRIGÉ

Signe des facteurs. D'après la stricte croissance de $\ln$ (F02), avec $\ln e = 1$ (F06) et $\ln(e^3) = 3$ (F04) :

- $\ln x - 1 < 0$ sur $]0, e[$ et $\ln x - 1 > 0$ sur $]e, +\infty[$;
- $\ln x - 3 < 0$ sur $\left]0, e^3\right[$ et $\ln x - 3 > 0$ sur $\left]e^3, +\infty\right[$.

Signe de $f'(x)$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]0, e[$, $f'(x) < 0$ sur $\left]e, e^3\right[$, et $f'(x) > 0$ sur $\left]e^3, +\infty\right[$.

Valeurs. $f(e) = \dfrac{e}{2}(1-3)^2 = 2e$ et $f(e^3) = 0$.

Croissance sur $[0, e]$. Pour $0 < x \leq e$, on a $x \neq e^3$, donc $f(x) = \dfrac{x}{2}(\ln x - 3)^2 > 0 = f(0)$. Avec la stricte croissance sur $]0, e]$, f est strictement croissante sur $[0, e]$.

Conclusion.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	croissante	$2e$	décroissante	0	croissante	$+\infty$

5. a) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{\ln x - 2}{x}.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Développe d'abord $f'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln x)^2 - 4\ln x + 3\right)$, puis dérive. Cherche où f'' s'annule en changeant de signe.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout $x > 0$, en développant, $f'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln x)^2 - 4\ln x + 3\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x - 2}{x}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $f''(x)$ a le signe de $\ln x - 2$: strictement négatif sur $]0, e^2[$ et strictement positif sur $]e^2, +\infty[$ (F02, F06). Donc f'' s'annule en changeant de signe en e^2.

Ordonnée. $f(e^2) = \frac{e^2}{2}(2-3)^2 = \frac{e^2}{2}$.

Conclusion. Le point $A\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

5. b) 0,5 pts

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

$f'(e^2) = \frac{1}{2}(2-1)(2-3)$.

CORRIGÉ

On a $f'(e^2) = \frac{1}{2}(2-1)(2-3) = -\frac{1}{2}$ et $f(e^2) = \frac{e^2}{2}$. La tangente T a pour équation :

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - e^2\right) + \frac{e^2}{2}.$$

Conclusion. Une équation de T est :

$$y = -\frac{1}{2}x + e^2.$$

5. c) 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Pose $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - e^2$. Alors $g'' = f''$ et $g'(e^2) = g(e^2) = 0$: étudie g', puis g, de chaque côté de e^2.

CORRIGÉ

Fonction auxiliaire. Pour tout $x > 0$, posons $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - e^2$: c'est l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et T. Alors $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2}$ et $g''(x) = f''(x)$, avec $g(e^2) = 0$ et $g'(e^2) = 0$.

Sur $\left]0, e^2\right]$. $g'' \leq 0$: g' est décroissante, donc $g'(x) \geq g'(e^2) = 0$. Ainsi g est croissante et $g(x) \leq g(e^2) = 0$.

Sur $\left[e^2, +\infty\right[$. $g'' \geq 0$: g' est croissante, donc $g'(x) \geq 0$. Ainsi g est croissante et $g(x) \geq g(e^2) = 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur $\left]0, e^2\right]$ et au-dessus sur $\left[e^2, +\infty\right[$: elle traverse T en A.

6. 0,75 pts

Tracer T et $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

Place les points d'abscisses 0, e, e^2 et e^3, puis les tangentes connues : verticale en O, horizontales en e et en e^3.

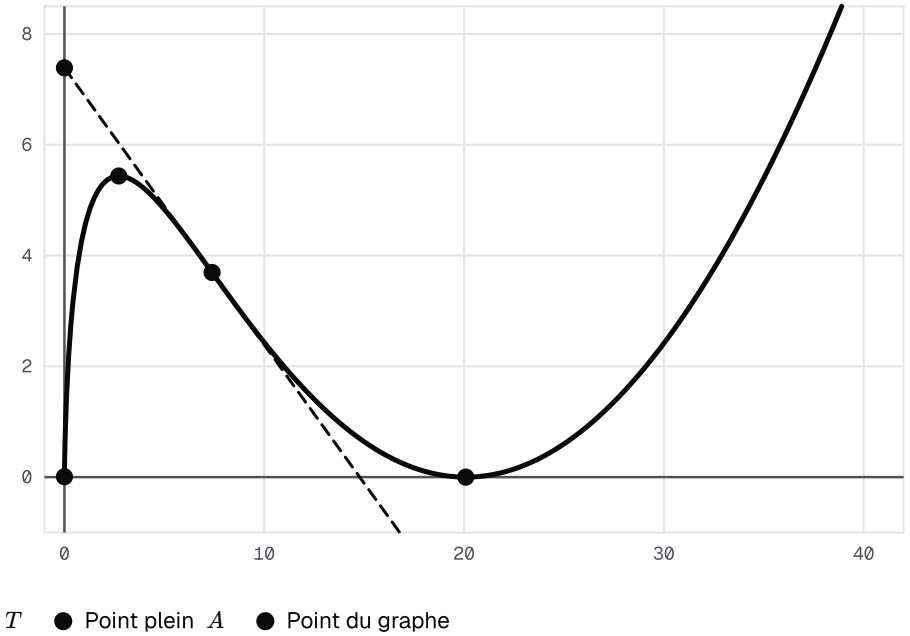
CORRIGÉ

On place les éléments obtenus :

- le point O, avec une demi-tangente verticale (question 2) ;
- le maximum local $(e, 2e) \approx (2{,}72; 5{,}44)$, avec une tangente horizontale ;
- le point d'inflexion $A \approx (7{,}39; 3{,}69)$, où la courbe traverse T ;
- le minimum local $(e^3, 0) \approx (20{,}09; 0)$: la courbe touche l'axe des abscisses avec une tangente horizontale ;
- la branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.

La droite T passe par $(0, e^2)$ et par $(2e^2, 0)$.

La courbe reste au-dessus de l'axe des abscisses, car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.



Courbe de f et tangente T au point d'inflexion A : demi-tangente verticale en O, maximum local en e, inflexion en e², minimum local nul en e³, puis branche parabolique vers le haut.

Exercice 2 6,5 pts

Deux zéros, puis une suite qui en approche un

On admet que $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}7$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}1$.

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$.

Partie B. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) 0,75 pts

Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

INDICE

En 0^+, il n'y a pas de forme indéterminée. En $+\infty$, factorise par x et cite les croissances comparées (F08).

CORRIGÉ

Limite en 0^+. $x - 2$ tend vers -2 et, d'après les limites de $\ln$ (F05), $-\dfrac{1}{2}\ln x$ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour tout $x > 0$:

$$g(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x}\right).$$

D'après les croissances comparées (F08), $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 : la parenthèse tend vers 1. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

1. b) `0,75 pts`

Étudier les variations de g sur $]0,+\infty[$ et calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

INDICE

$g'(x) = 1 - \frac{1}{2x}$: réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivée. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (F01) et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x}.$$

$g'(x)$ a le signe de $2x-1$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Valeur en $\frac{1}{2}$. D'après le logarithme d'un inverse (F04), $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, donc :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{\ln 2 - 3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\ln 2 < 0{,}7$, ce minimum de g est strictement négatif.

2. a) 1 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions β et α, avec :

$$e^{-4} < \beta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2 < \alpha < 3.$$

INDICE

Calcule $g(e^{-4})$ avec F06 (le nombre e), puis $g(2)$ et $g(3)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence ; la stricte monotonie donne l'unicité.

CORRIGÉ

Sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. D'après F06 et F04, $\ln(e^{-4}) = -4$, donc $g(e^{-4}) = e^{-4} - 2 + 2 = e^{-4} > 0$. De plus $e > 2$ (car $\ln 2 < 1 = \ln e$), donc $e^4 > 2$ et $e^{-4} < \frac{1}{2}$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[e^{-4}, \frac{1}{2}\right]$, avec $g(e^{-4}) > 0 > g\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur cet intervalle ; strictement monotone, elle s'y annule une seule fois, en un réel $\beta \in \left]e^{-4}, \frac{1}{2}\right[$.

Sur $\left]0, e^{-4}\right]$, $g(x) \geq g(e^{-4}) > 0$: aucune autre solution.

Sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. $g(2) = -\frac{1}{2}\ln 2 < 0$ et $g(3) = 1 - \frac{1}{2}\ln 3 > 1 - 0{,}55 > 0$. La fonction g est continue sur $[2, 3]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'y annule. Strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, elle s'y annule une seule fois, en un réel $\alpha \in]2, 3[$.

Conclusion. L'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions β et α, avec $e^{-4} < \beta < \frac{1}{2}$ et $2 < \alpha < 3$.

2. b) 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Utilise les variations de g de part et d'autre de $\frac{1}{2}$ et ses deux zéros.

CORRIGÉ

D'après 1. b) et 2. a), et par stricte monotonie de g sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ puis sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

- $g(x) > 0$ sur $]0, \beta[$ et sur $]\alpha, +\infty[$;
- $g(x) < 0$ sur $]\beta, \alpha[$;
- $g(\beta) = g(\alpha) = 0$.

Conclusion. g est strictement positive hors de $[\beta, \alpha]$, strictement négative sur $]\beta, \alpha[$, et s'annule en β et en α.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in [2,3]$, $f(x) \in [2,3]$.

INDICE

f est croissante : encadre $f(x)$ entre $f(2)$ et $f(3)$, puis utilise les valeurs données de $\ln 2$ et $\ln 3$.

CORRIGÉ

Croissance de f. La fonction $\ln$ est strictement croissante (F02), donc f aussi. Soit $x \in [2,3]$: alors $f(2) \leq f(x) \leq f(3)$.

Bornes.

- $f(2) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln 2 > 2$, car $\ln 2 > 0$;
- $f(3) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3 < 2 + 0{,}55 < 3$.

Conclusion. Pour tout $x \in [2,3]$, $f(x) \in [2,3]$.

3. b) 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$.

INDICE

L'hérédité découle directement de 3. a).

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0 = 2$, donc $2 \leq u_0 \leq 3$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $2 \leq u_n \leq 3$. Alors $u_n > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini, et d'après 3. a), $u_{n+1} \in [2,3]$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$.

4. a) 0,25 pts

Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

INDICE

Traduis $g(\alpha) = 0$.

CORRIGÉ

D'après 2. a), $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha - 2 - \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0$.

Conclusion. $\alpha = 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = f(\alpha)$.

4. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|.$$

INDICE

Majore $|f'(x)|$ sur $[2,3]$, puis applique l'inégalité des accroissements finis entre u_n et α.

CORRIGÉ

Majoration de la dérivée. La fonction f est dérivable sur $[2,3]$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$. Pour tout $x \in [2,3]$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

Accroissements finis. Soit n un entier naturel. Les réels u_n (3. b)) et α (2. a)) appartiennent à $[2,3]$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}|f(u_n)-f(\alpha)| \\ \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(\alpha)=\alpha$ (4. a)), on obtient, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

4. c) 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, puis la limite de la suite (u_n).

INDICE

Raisonne par récurrence avec 4. b). Au départ, u_0 et α sont dans $[2,3]$.

CORRIGÉ

Initialisation. u_0 et α appartiennent à $[2,3]$, donc $|u_0-\alpha| \leq 1 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^0$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $|u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. D'après 4. b) :

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-\alpha| &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Conclusion de la récurrence. Pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Limite. Comme $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0. Par encadrement, $|u_n-\alpha|$ tend vers 0.

Conclusion. La suite (u_n) converge vers α.

5. `0,75 pts`

Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \leq 10^{-3}$. Que représente u_{n_0} ?

INDICE

L'inégalité équivaut à $4^{n_0} \geq 1000$. Compare 1000 à 4^4 et à 4^5, ou applique $\ln$ (F02).

CORRIGÉ

Transformation. Soit n un entier naturel. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) et le logarithme d'une puissance (F04) :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \leq 10^{-3} \\ \Leftrightarrow\ &4^n \geq 1000 \\ \Leftrightarrow\ &n \ln 4 \geq 3 \ln 10. \end{aligned}$$

Recherche de n_0. La suite (4^n) est strictement croissante. Or $4^4 = 256 < 1000$ et $4^5 = 1024 \geq 1000$. Donc $n_0 = 5$.

Conclusion. D'après 4. c), $|u_5 - \alpha| \leq 10^{-3}$: u_5 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 3 6,75 pts

Une inégalité préalable, une fonction bornée, une suite

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(\frac{2x+3}{2x}\right)-\frac{3}{2x+3}.$$

Partie B. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

et l'on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie C. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $w_n=n\ln\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)$.

1. a) 0,75 pts

Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$:

$$g'(x)=\frac{-9}{x(2x+3)^2}.$$

INDICE

Pour $x>0$, écris $g(x)=\ln(2x+3)-\ln(2x)-\dfrac{3}{2x+3}$ (logarithme d'un quotient, F04), dérive, puis réduis au dénominateur $x(2x+3)^2$.

CORRIGÉ

Une autre écriture. Soit $x>0$. Alors $2x+3>0$ et $2x>0$; d'après le logarithme d'un quotient (F04) :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(2x+3)\\ &\quad -\ln(2x)-\frac{3}{2x+3}.\end{aligned}$$

Dérivabilité. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{2x+3}-\frac{1}{x}\\ &\quad +\frac{6}{(2x+3)^2}.\end{aligned}$$

Réduction. Sur le dénominateur commun $x(2x+3)^2$, le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &2x(2x+3)-(2x+3)^2\\ &\quad +6x\\ &=4x^2+6x-4x^2\\ &\quad -12x-9+6x\\ &=-9.\end{aligned}$$

Conclusion. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{-9}{x(2x+3)^2}$.

1. b) 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis montrer que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

g est strictement décroissante. Pour $x > 0$ fixé, compare $g(x)$ à $g(t)$ pour $t > x$, puis fais tendre t vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Limite en $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{2x+3}{2x} = 1 + \dfrac{3}{2x}$ tend vers 1 ; par continuité de $\ln$ en 1 (F01), son logarithme tend vers $\ln 1 = 0$. Et $\dfrac{3}{2x+3}$ tend vers 0. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Monotonie. D'après 1. a), $g'(x) < 0$ pour tout $x > 0$: g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Signe. Soit $x > 0$. Pour tout $t > x + 1$, $g(x+1) > g(t)$. En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $g(x+1) \geq 0$. Donc $g(x) > g(x+1) \geq 0$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

2. a) 0,75 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x > 0$, écris $f(x) = x\ln(2x+3) - x\ln 2 - x\ln x$, puis cite les croissances comparées (F08) pour le dernier terme.

CORRIGÉ

Une autre écriture. Pour tout $x > 0$, d'après la relation fondamentale (F03) et le logarithme d'un quotient (F04) :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(2x+3) \\ &\quad - x\ln 2 - x\ln x. \end{aligned}$$

Limite de chaque terme en 0^+.

- $\ln(2x+3)$ tend vers $\ln 3$, donc $x\ln(2x+3)$ tend vers 0.
- $x\ln 2$ tend vers 0.
- D'après les croissances comparées (F08), $x\ln x$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

2. b) 0,5 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Le taux d'accroissement en 0 vaut $\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right) = \ln(2x+3) - \ln 2 - \ln x$.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. Pour tout $x > 0$, notons $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Alors :

$$\tau(x) = \ln(2x+3) - \ln 2 - \ln x.$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, $\ln(2x+3) - \ln 2$ tend vers $\ln 3 - \ln 2$ et, d'après les limites de $\ln$ (F05), $-\ln x$ tend vers $+\infty$. Le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet en O une demi-tangente verticale.

3. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pose $X = \dfrac{3}{2x}$: alors $x = \dfrac{3}{2X}$ et $\dfrac{2x+3}{2x} = 1 + X$. Cite la limite de référence F10.

CORRIGÉ

Changement de variable. Soit $x > 0$; posons $X = \dfrac{3}{2x}$. Alors $X > 0$, $x = \dfrac{3}{2X}$ et $\dfrac{2x+3}{2x} = 1 + X$. Donc :

$$f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+X)}{X}.$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers 0. D'après la limite de référence de $\dfrac{\ln(1+X)}{X}$ en 0 (F10), ce quotient tend vers 1. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Conclusion. La droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4. a) 0,5 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=g(x)$ pour tout $x>0$.

INDICE

Écris $f(x)=x\big(\ln(2x+3)-\ln(2x)\big)$ et dérive ce produit.

CORRIGÉ

Écriture en produit. Pour tout $x>0$, d'après le logarithme d'un quotient (F04), $f(x)=x\big(\ln(2x+3)-\ln(2x)\big)$.

Dérivabilité. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), la parenthèse est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto \dfrac{2}{2x+3}-\dfrac{1}{x}$. Par produit, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calcul. Soit $x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{2x+3}{2x}\right) \\ &\quad + \frac{2x}{2x+3}-1 \\ &= \ln\left(\frac{2x+3}{2x}\right) \\ &\quad - \frac{3}{2x+3} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=g(x)$ pour tout $x>0$.

4. b) 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Le signe de f' est donné par la partie A. N'oublie pas la continuité en 0.

CORRIGÉ

Signe de f'. D'après 4. a) et 1. b), $f'(x)=g(x)>0$ pour tout $x>0$: f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

En 0. Comme f est continue à droite en 0 (2. a)), elle est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Conclusion.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	croissante	$\dfrac{3}{2}$

5. a) `0,5 pts`

Montrer que, pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq f(x) < \frac{3}{2}.$$

Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote.

INDICE

Même raisonnement qu'en 1. b) : compare $f(x)$ à $f(t)$ pour t grand, puis passe à la limite.

CORRIGÉ

Minoration. Soit $x \geq 0$. La croissance de f donne $f(x) \geq f(0) = 0$.

Majoration stricte. Pour tout $t > x + 1$, $f(x+1) < f(t)$. En faisant tendre t vers $+\infty$ (question 3), $f(x+1) \leq \frac{3}{2}$. Donc $f(x) < f(x+1) \leq \frac{3}{2}$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) < \frac{3}{2}$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.

5. b) `0,5 pts`

On donne $\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0{,}92$. Tracer l'asymptote et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

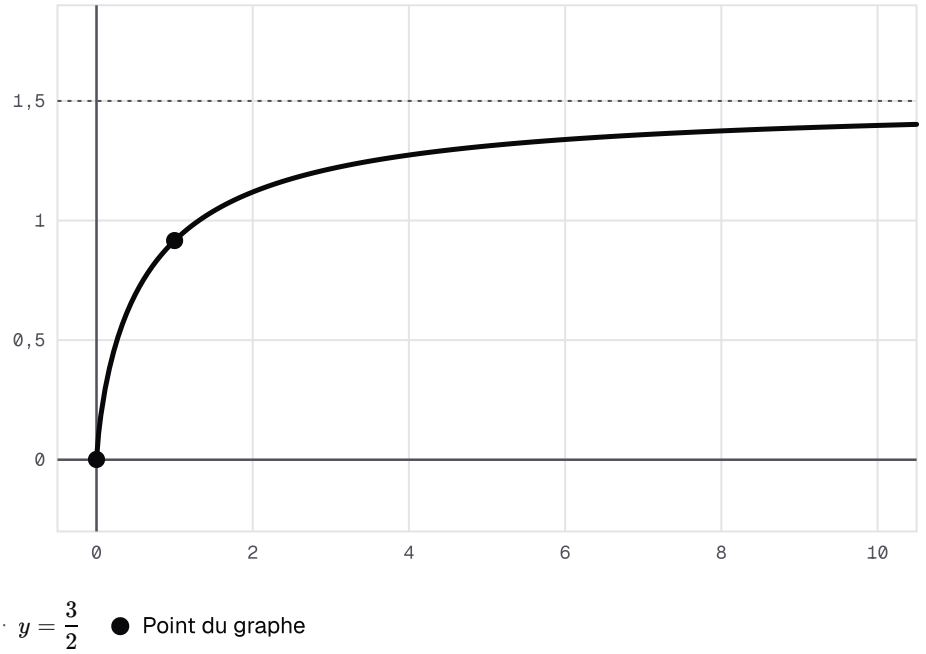
Place O avec sa demi-tangente verticale et le point d'abscisse 1. Le signe de $f'' = g'$ indique la concavité.

CORRIGÉ

On trace la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.

La courbe part de O avec une demi-tangente verticale (2. b)). Elle passe par le point $\left(1, \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) \approx (1; 0{,}92)$.

Elle monte en restant au-dessous de l'asymptote (5. a)) et s'en rapproche en $+\infty$. Comme $f'' = g' < 0$ sur $]0, +\infty[$, f est concave : la courbe est tournée vers le bas.



Courbe de f sur [0, 10] : partie de O avec une demi-tangente verticale, elle monte en restant sous son asymptote horizontale d'équation y = 3/2, dont elle se rapproche.

6. a) 0,75 pts

Vérifier que $w_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que la suite (w_n) est strictement croissante et convergente, et donner sa limite.

INDICE

$1 + \dfrac{3}{2n} = \dfrac{2n+3}{2n}$. Utilise ensuite les variations de f et la question 3.

CORRIGÉ

Lien avec f. Soit $n \geq 1$. On a $1 + \dfrac{3}{2n} = \dfrac{2n+3}{2n}$, donc :

$$\begin{aligned} w_n &= n \ln\left(\frac{2n+3}{2n}\right) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Monotonie. Comme f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $w_{n+1} = f(n+1) > f(n) = w_n$: la suite (w_n) est strictement croissante.

Limite. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ (question 3) et que n tend vers $+\infty$, $f(n)$ tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. La suite (w_n) est strictement croissante et converge vers $\dfrac{3}{2}$.

6. b) 0,5 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n < e^{\frac{3}{2}}.$$

INDICE

Compare les logarithmes des deux membres avec 5. a), le logarithme d'une puissance (F04) et le nombre e (F06).

CORRIGÉ

Logarithme du membre de gauche. Soit $n \geq 1$. Le réel $1 + \dfrac{3}{2n}$ est strictement positif. D'après le logarithme d'une puissance (F04) :

$$\begin{aligned} &\ln\left(\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n\right) \\ &= w_n = f(n). \end{aligned}$$

Comparaison. D'après 5. a), $f(n) < \dfrac{3}{2}$, et d'après F06 (le nombre e) et F04, $\dfrac{3}{2} = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned} &\ln\left(\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n\right) \\ &< \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Par stricte croissance de $\ln$ (F02), $\left(1 + \dfrac{3}{2n}\right)^n < e^{\frac{3}{2}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 4 6,5 pts

Une fonction impaire, deux asymptotes, deux zéros opposés

On admet que $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}7$ et $1{,}09 < \ln 3 < 1{,}1$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O, et Δ la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

1. a) 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

INDICE

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$. Dresse un tableau de signes du quotient.

CORRIGÉ

Condition. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$ et $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$, car $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$ (FO1).

Tableau de signes. Un quotient est strictement positif si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont non nuls et de même signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$		$-$	0	$+$	

Conclusion. Donc $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

1. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \in D$, simplifie $\dfrac{-x-1}{-x+1}$, puis utilise le logarithme d'un inverse (F04).

CORRIGÉ

Symétrie de D. Si $x < -1$, alors $-x > 1$; si $x > 1$, alors $-x < -1$. Donc, pour tout $x \in D$, $-x \in D$.

Calcul de $f(-x)$. Soit $x \in D$:

$$\begin{aligned}\frac{-x-1}{-x+1} &= \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}.\end{aligned}$$

D'après le logarithme d'un inverse (F04), $\ln\left(\dfrac{-x-1}{-x+1}\right) = -\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}f(-x) &= -\frac{x}{2} \\ &\quad - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= -f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est impaire. Graphiquement, l'origine O du repère est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$; il suffit d'étudier f sur $]1, +\infty[$.

2. a) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement la première limite.

INDICE

Quand x tend vers 1^+, le quotient $\dfrac{x-1}{x+1}$ tend vers 0^+ ; quand x tend vers $+\infty$, il tend vers 1.

CORRIGÉ

Limite en 1^+. Quand x tend vers 1^+, $x-1$ tend vers 0^+ et $x+1$ tend vers 2, donc $\dfrac{x-1}{x+1}$ tend vers 0^+. D'après les limites de $\ln$ (F05), son logarithme tend vers $-\infty$. Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Limite en $+\infty$. Pour $x > 1$:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Ce quotient tend vers 1 ; par continuité de $\ln$ en 1 (F01), son logarithme tend vers $\ln 1 = 0$. Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. b) 0,75 pts

Montrer que la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ sur $]1,+\infty[$.

INDICE

Étudie la différence $f(x)-\dfrac{x}{2}$: sa limite en $+\infty$, puis son signe, en comparant $\dfrac{x-1}{x+1}$ à 1.

CORRIGÉ

Asymptote. Pour tout $x>1$, $f(x)-\dfrac{x}{2}=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (2. a)).

Donc Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Position. Pour $x>1$, $0<x-1<x+1$, donc $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$ et, d'après le signe de $\ln$ (F02), $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$.

Conclusion. Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de Δ sur $]1,+\infty[$.

3. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x>1$:

$$f'(x)=\frac{x^2+3}{2(x^2-1)}.$$

INDICE

Pose $u(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$: calcule $u'(x)$, puis $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (dérivée de $\ln u$, F12).

CORRIGÉ

Dérivée de u. Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, la fonction $u:x\mapsto\dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive (1. a)). Pour tout $x>1$:

$$\begin{aligned}u'(x)&=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\\&=\frac{2}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Dérivée de $\ln u$. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), $x\mapsto\ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et, pour tout $x>1$:

$$\begin{aligned}\frac{u'(x)}{u(x)}&=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}\\&=\frac{2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Dérivée de f. Par somme, f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et, pour tout $x>1$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2-1}\\&=\frac{x^2-1+4}{2(x^2-1)}\\&=\frac{x^2+3}{2(x^2-1)}.\end{aligned}$$

3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f sur $]1,+\infty[$, puis en déduire, sans nouveau calcul de dérivée, les variations de f sur $]-\infty,-1[$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-1. Pour $]-\infty,-1[$, compare $f(a)$ et $f(b)$ pour $a<b<-1$ à l'aide de 1. b).

CORRIGÉ

Sur $]1,+\infty[$**.** Pour $x>1$, $x^2+3>0$ et $x^2-1>0$, donc $f'(x)>0$: f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	croissante	$+\infty$

Sur $]-\infty,-1[$**.** Soit $a<b<-1$. Alors $1<-b<-a$, donc $f(-b)<f(-a)$. Par imparité, $-f(b)<-f(a)$, c'est-à-dire $f(a)<f(b)$.

Conclusion. f est aussi strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et, par imparité :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty.$$

4. a) 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et que $2<\alpha<3$.

INDICE

Calcule $f(2)$ et $f(3)$ en valeurs exactes, puis utilise les encadrements donnés de $\ln 2$ et de $\ln 3$.

CORRIGÉ

Valeurs exactes. D'après le logarithme d'un inverse (F04) :

- $f(2)=1+\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)=1-\ln 3$;
- $f(3)=\dfrac{3}{2}+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-\ln 2$.

Comme $\ln 3>1{,}09$, $f(2)<0$; comme $\ln 2<0{,}7$, $f(3)>0{,}8>0$.

Existence. La fonction f est continue sur $[2,3]$, car dérivable sur $]1,+\infty[$ (3. a)), et $f(2)<0<f(3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]2,3[$.

Unicité. Comme f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ (3. b)), elle y admet au plus une solution.

Conclusion. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et $2<\alpha<3$.

4. b) 0,5 pts

En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans D, puis le signe de $f(x)$ sur D.

INDICE

Utilise l'imparité (1. b)) et la stricte croissance de f sur chacun des deux intervalles qui forment D.

CORRIGÉ

Sur $]1, +\infty[$**.** La seule solution est α ; par stricte croissance, $f(x) < 0$ sur $]1, \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Sur $]-\infty, -1[$**.** Soit $x < -1$. Par imparité, $f(x) = 0$ si et seulement si $f(-x) = 0$, avec $-x > 1$, c'est-à-dire $-x = \alpha$. La seule solution est $-\alpha$. Par imparité encore, $f(x) > 0$ sur $]-\alpha, -1[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty, -\alpha[$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ dans D est $\{-\alpha, \alpha\}$. La fonction f est strictement négative sur $]-\infty, -\alpha[$ et sur $]1, \alpha[$, strictement positive sur $]-\alpha, -1[$ et sur $]\alpha, +\infty[$.

5. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) > \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente parallèle à Δ.

INDICE

Écris $f'(x) - \dfrac{1}{2}$ à l'aide du calcul de 3. a). Sur $]-\infty, -1[$, ce calcul reste valable.

CORRIGÉ

Sur $]1, +\infty[$**.** D'après 3. a), pour tout $x > 1$, $f'(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{x^2 - 1} > 0$.

Sur $]-\infty, -1[$**.** Sur cet intervalle, u est aussi dérivable et strictement positive (1. a)) : le même calcul (dérivée de $\ln u$, F12) donne $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x^2 - 1}$, avec $x^2 - 1 > 0$. Donc $f'(x) > \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in D$.

Tangentes. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a \in D$ est parallèle à Δ si et seulement si son coefficient directeur $f'(a)$ vaut $\dfrac{1}{2}$, ce qui n'arrive pour aucun $a \in D$.

Conclusion. Pour tout $x \in D$, $f'(x) > \dfrac{1}{2}$, et $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente parallèle à Δ.

6. `0,75 pts`

Tracer Δ, les asymptotes verticales et $\mathcal{C}_f$ dans le repère.

INDICE

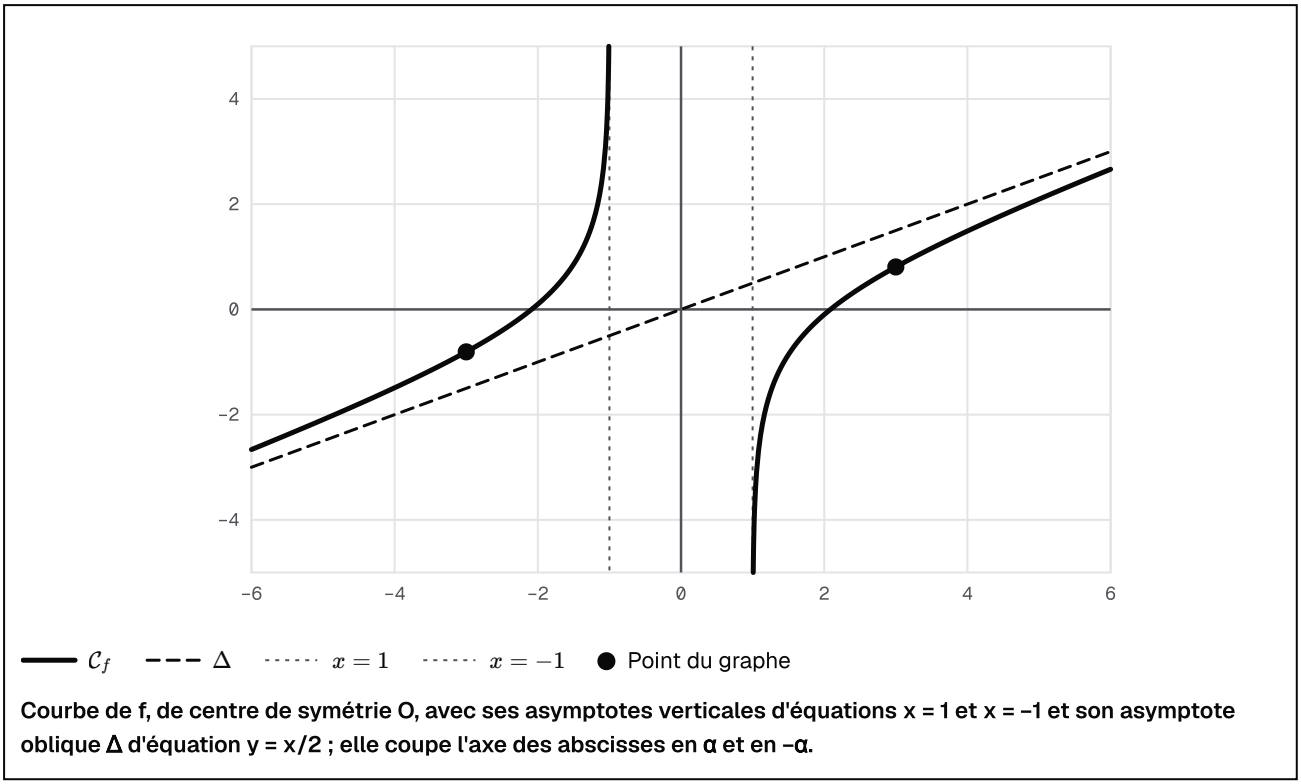
Trace d'abord la partie de la courbe sur $]1,+\infty[$ (asymptotes, point d'abscisse 3, point d'abscisse α), puis complète par la symétrie de centre O.

CORRIGÉ

On place les éléments obtenus :

- les droites d'équations $x=1$ et $x=-1$, asymptotes verticales (2. a) et 3. b)), et la droite Δ, asymptote oblique en $+\infty$ et, par symétrie de centre O, en $-\infty$;
- sur $]1,+\infty[$, la courbe monte depuis le bas le long de la droite d'équation $x=1$, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α, entre 2 et 3, passe par le point $\left(3, \frac{3}{2}-\ln 2\right) \approx (3;0{,}81)$ et se rapproche de Δ en restant au-dessous (2. b)) ;
- sur $]-\infty,-1[$, la partie symétrique par rapport à O : elle reste au-dessus de Δ, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\alpha$ et passe par le point $\left(-3, \ln 2-\frac{3}{2}\right)$.

Toutes les tangentes ont un coefficient directeur strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ (question 5) : la courbe monte plus vite que Δ.



Courbe de f, de centre de symétrie O, avec ses asymptotes verticales d'équations x = 1 et x = −1 et son asymptote oblique Δ d'équation y = x/2 ; elle coupe l'axe des abscisses en α et en −α.

Exercice 5 6,5 pts

Un encadrement polynomial, une dérivée en 0, une somme

Partie A. On considère les fonctions g et h définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x) - x \\ &\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}, \\ h(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x). \end{aligned}$$

Partie B. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Partie C. Pour n entier, $n \geq 1$, on note S_n la somme des n termes $\ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$, pour k entier allant de 1 à n :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots \\ &\quad + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

1. a) `0,75 pts`

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ et réduis au dénominateur $1+x$, en vérifiant que $(1+x)(1-x+x^2-x^3) = 1-x^4$; compare ensuite $g(x)$ à $g(0)$.

CORRIGÉ

Une identité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(1+x)(1-x+x^2-x^3) &= 1-x+x^2-x^3 \\ &\quad +x-x^2+x^3-x^4 \\ &= 1-x^4.\end{aligned}$$

Dérivée. Pour $x \geq 0$, $1+x>0$: d'après la dérivée de $\ln u$ (F12), g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &\quad -1+x-x^2+x^3 \\ &= \frac{1-(1-x^4)}{1+x} \\ &= \frac{x^4}{1+x}.\end{aligned}$$

Variations. Donc $g'(x) \geq 0$ sur $[0,+\infty[$: g est croissante sur cet intervalle.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = \ln 1 = 0$.

1. b) `0,75 pts`

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$.

INDICE

Même méthode qu'en 1. a). Vérifie que $(1 - x + x^2)(1 + x) = 1 + x^3$.

CORRIGÉ

Une identité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(1 - x + x^2)(1 + x) &= 1 + x - x - x^2 \\ &\quad + x^2 + x^3 \\ &= 1 + x^3.\end{aligned}$$

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}h'(x) &= 1 - x + x^2 \\ &\quad - \frac{1}{1 + x} \\ &= \frac{(1 + x^3) - 1}{1 + x} \\ &= \frac{x^3}{1 + x}.\end{aligned}$$

Variations. Donc $h'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$: h y est croissante.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq h(0) = 0$.

1. c) 0,5 pts

En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}.$$

INDICE

Traduis $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$ en un encadrement de $\ln(1+x)-x$, puis divise par x^2.

CORRIGÉ

Encadrement de $\ln(1+x)-x$. Soit $x > 0$.

- D'après 1. a), $\ln(1+x)-x \geq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$.
- D'après 1. b), $\ln(1+x)-x \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Conclusion. En divisant par $x^2 > 0$, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}.$$

2. a) 0,5 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Cite la limite de référence F10, qui porte sur $\frac{\ln(1+x)}{x}$.

CORRIGÉ

D'après la limite de référence F10 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

2. b) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable à droite en 0, de nombre dérivé à droite $-\dfrac{1}{2}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Écris le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour $x>0$: c'est la quantité encadrée en 1. c).

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. Pour tout $x>0$, notons $\tau(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Alors :

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\\ &= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.\end{aligned}$$

Encadrement. D'après 1. c), ce taux est compris entre $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$. Ces deux bornes tendent vers $-\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 0^+. Par encadrement, le taux d'accroissement tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. f est dérivable à droite en 0, de nombre dérivé à droite $-\dfrac{1}{2}$. Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ admet au point $(0,1)$ une demi-tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$, portée par la droite d'équation $y=1-\dfrac{x}{2}$.

3. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x>0$, écris $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\times\dfrac{1+x}{x}$ et pose $X=1+x$.

CORRIGÉ

Transformation. Pour tout $x>0$:

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\times\frac{1+x}{x}.$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $X=1+x$ tend vers $+\infty$ et, d'après les croissances comparées (F08), $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0. De plus $\dfrac{1+x}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ tend vers 1. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Conclusion. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

4. a) `0,5 pts`

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

INDICE

Applique l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ (F07) au réel $\dfrac{1}{1+x}$, différent de 1, puis le logarithme d'un inverse (F04).

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Le réel $t = \dfrac{1}{1+x}$ est strictement positif et différent de 1.

D'après l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ (F07), dont l'égalité n'a lieu que pour $t = 1$, on a $\ln t < t - 1$. Avec le logarithme d'un inverse (F04), $\ln t = -\ln(1+x)$, donc :

$$\begin{aligned} -\ln(1+x) &< \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= -\frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$.

4. b) `0,75 pts`

Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

En déduire le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient de $\ln(1+x)$ par x, puis utilise 4. a) pour le signe du numérateur. N'oublie pas la continuité en 0.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0,+\infty[$, $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable (dérivée de $\ln u$, F12) et x ne s'annule pas : par quotient, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calcul. Pour tout $x>0$, la dérivée d'un quotient donne :

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $1+x>0$: pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.

Signe. D'après 4. a), $(1+x)\ln(1+x)>x$, donc $f'(x)<0$: f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Comme f est continue à droite en 0 (2. a)), elle est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Conclusion.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	décroissante	0

5. a) `0,75 pts`

Soit $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Vérifier que $\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right) = \dfrac{k}{n^2} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$, puis montrer que :

$$\frac{k}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

INDICE

Situe $\dfrac{k}{n^2}$ dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{n}\right]$ et utilise la décroissance de f sur $[0,+\infty[$ (4. b)).

CORRIGÉ

Égalité. Posons $t = \dfrac{k}{n^2}$. Comme $1 \leq k \leq n$, on a $0 < t \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$. Comme $t > 0$, la définition de f donne $tf(t) = \ln(1+t)$.

Encadrement. La fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$ (4. b)) et $0 \leq t \leq \dfrac{1}{n}$, donc :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(t) \leq f(0) = 1.$$

Conclusion. En multipliant par $t > 0$, on obtient $tf\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \ln(1+t) \leq t$: c'est l'encadrement demandé.

5. b) 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{n+1}{2n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n},$$

puis que la suite (S_n) converge, et donner sa limite.

INDICE

Ajoute les n encadrements de 5. a), avec $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Pour la limite, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et f est continue à droite en 0.

CORRIGÉ

Somme des encadrements. On ajoute membre à membre les encadrements de 5. a) pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Or :

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

On obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{n+1}{2n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Limites des bornes. Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$. De plus, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 par valeurs strictement positives et f est continue à droite en 0 (2. a)) : $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $f(0) = 1$. Les deux bornes tendent vers $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Par encadrement, la suite (S_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.