BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Entraînement	8

Exercice 1

Équations : le domaine filtre les solutions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes. Le domaine est déterminé avant tout calcul.

1.

$\ln(x-2)+\ln(x+4)=\ln(7x-2)$.

INDICE

Trois conditions de positivité. Sur le domaine, regroupe le membre de gauche avec la relation fondamentale (F03) : tu obtiens une équation du second degré.

2.

$\ln(x^2)=2\ln(x+4)$.

INDICE

Le domaine contient des réels négatifs : ne remplace pas $\ln(x^2)$ par $2\ln x$. Transforme plutôt le membre de droite, où $x+4>0$.

3.

$2(\ln x)^2-\ln x-3=0$.

INDICE

Pose $X=\ln x$: tu obtiens une équation du second degré en X. Reviens ensuite à x avec F06 (le nombre e).

Exercice 2

Inéquations : transformer, conclure, intersecter

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$\ln(x+1)+\ln(x-2)\leq \ln(x+13)$.

INDICE

Sur le domaine, regroupe le membre de gauche avec la relation fondamentale (F03), puis compare les arguments. Le trinôme obtenu se factorise.

2.

$\ln(3-x)-\ln(x+1)>\ln 2$.

INDICE

Fais passer $\ln(x+1)$ à droite et regroupe (F03) : $\ln 2+\ln(x+1)=\ln(2x+2)$.

3.

$(\ln x)^2<4$.

INDICE

Un carré est strictement inférieur à 4 si et seulement si le nombre est strictement compris entre -2 et 2.

Exercice 3

Trois systèmes, trois réflexes

Dans chaque question, x et y sont deux inconnues réelles.

1.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \ln x + 2\ln y = 5 \\ 3\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$$

INDICE

Conditions : $x > 0$ et $y > 0$. Pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: le système devient linéaire.

2.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 6 \end{cases}$$

INDICE

Avec la relation fondamentale (F03), la seconde équation donne le produit xy. Deux réels de somme s et de produit p sont les racines de $t^2 - st + p = 0$.

3.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ \ln(xy) = 2\ln 6 \end{cases}$$

Le système obtenu en remplaçant $\ln(xy)$ par $\ln x + \ln y$ a-t-il les mêmes solutions ?

INDICE

Ici la condition porte sur le produit : $xy > 0$, ce qui autorise x et y tous deux négatifs.

Exercice 4

Lever quatre formes indéterminées

Calculer chacune des limites suivantes. Indique à chaque fois la forme indéterminée et la limite de référence utilisée.

1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(4x+3)}{2x}$.

INDICE

Pour $x > 0$, $4x + 3 = x\left(4 + \dfrac{3}{x}\right)$: sépare le logarithme en deux avec la relation fondamentale (F03).

2.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x}\,\ln x$.

INDICE

Pose $X = \sqrt[3]{x}$, de sorte que $x = X^3$ et $\ln x = 3\ln X$.

3.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4}$.

INDICE

Pose $X = x - 2$ et factorise $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

4.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

INDICE

Pose $X = \sqrt{x}$: alors $\ln x = 2\ln X$ et $x = X^2$. Fais apparaître un carré.

Exercice 5

Une même fraction, deux intervalles

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,-3[\cup]-3,4[\cup]4,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-12}.$$

On note $I=]-3,4[$ et $J=]4,+\infty[$.

1.

Factoriser x^2-x-12, puis donner son signe sur I et sur J.

INDICE

Cherche les racines du trinôme ; il est négatif entre ses racines.

2.

Montrer que la fonction F définie sur I par $F(x)=\ln(12+x-x^2)$ est une primitive de f sur I.

INDICE

Sur I, $12+x-x^2=-(x^2-x-12)>0$. Dérive F avec la dérivée de $\ln u$ (F12).

3.

Déterminer la primitive G de f sur J telle que $G(5)=0$.

INDICE

Sur J, $u>0$: les primitives sont les fonctions $x\mapsto\ln(x^2-x-12)+k$. Calcule $u(5)$.

4.

Soit p la fonction définie sur $]-1,4[$ par $p(x)=\ln\left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|$. Montrer que p est dérivable sur $]-1,4[$ et que, pour tout $x\in]-1,4[$:

$$p'(x)=\frac{5}{(x-4)(x+1)}.$$

INDICE

Sur $]-1,4[$, le quotient est négatif : écris $p(x)=\ln(4-x)-\ln(x+1)$ avec le logarithme d'un quotient (F04).

Exercice 6

Minorer ln x par une fraction rationnelle

On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x - \frac{3(x-1)}{x+3}.$$

1.

Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x+3)^2}.$$

INDICE

Dérive le quotient $\dfrac{3(x-1)}{x+3}$, puis réduis au dénominateur $x(x+3)^2$. Développe le numérateur obtenu.

2.

En déduire le sens de variation de h sur $]0, +\infty[$, puis calculer $h(1)$.

INDICE

Le signe de $h'(x)$ est celui d'un carré. Une dérivée positive qui ne s'annule qu'en un point donne une fonction strictement croissante.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$\ln x \geq \frac{3(x-1)}{x+3},$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$. Que peut-on dire pour $0 < x < 1$?

INDICE

Compare $h(x)$ à $h(1)$ selon la position de x par rapport à 1.

4.

En déduire que $\ln 2 > \dfrac{3}{5}$, puis que $\ln 3 > \dfrac{14}{15}$.

INDICE

Applique la question 3 avec $x = 2$, puis avec $x = \dfrac{3}{2}$ et $\ln 3 = \ln 2 + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (F03).

Exercice 7

Trouver le premier entier qui convient

On admet les encadrements $0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694$, $2{,}302 < \ln 10 < 2{,}303$ et l'encadrement $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$.

1.

Une grandeur positive est multipliée par $0{,}8$ à chaque étape. Déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}8^n \leq 0{,}01$.

INDICE

Applique $\ln$ aux deux membres. Écris $\ln 0{,}8 = 3\ln 2 - \ln 10$ et regarde son signe avant de diviser. Encadre ensuite le quotient.

2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^9$.

INDICE

Applique $\log$, strictement croissante (F16) : $n\log 2 > 9$. Encadre ensuite $\dfrac{9}{\log 2}$ avec l'encadrement donné.

3.

Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels que $\log_{\frac{1}{2}} n < -3$.

INDICE

Reviens à $\ln$ (F14) : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2 < 0$. Multiplier par un nombre négatif change le sens.

Exercice 8

Une étude pour compter les solutions

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 8\ln x + 1.$$

On admet que $0{,}69 < \ln 2$ et $\ln 3 < 1{,}1$.

1.

Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

INDICE

En 0^+, ce n'est pas une forme indéterminée. En $+\infty$, factorise par x^2 et cite la croissance comparée qui convient (F09).

2.

Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

$f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x}$: réduis au même dénominateur et factorise.

3.

Montrer que $f(2) < 0$, puis que $f(1) > 0$ et $f(3) > 0$.

INDICE

Utilise $\ln 2 > 0{,}69$ pour $f(2)$ et $\ln 3 < 1{,}1$ pour $f(3)$.

4.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0,+\infty[$, avec :

$$1 < \alpha < 2 < \beta < 3.$$

INDICE

Sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone, applique le théorème des valeurs intermédiaires. Vérifie ensuite qu'il n'y a pas d'autre solution hors de $[1,3]$.