BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Entraînement	8

Exercice 1

Équations : le domaine filtre les solutions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes. Le domaine est déterminé avant tout calcul.

1.

$\ln(x-2)+\ln(x+4)=\ln(7x-2)$.

INDICE

Trois conditions de positivité. Sur le domaine, regroupe le membre de gauche avec la relation fondamentale (F03) : tu obtiens une équation du second degré.

CORRIGÉ

Domaine. L'équation a un sens si et seulement si $x>2$, $x>-4$ et $x>\dfrac{2}{7}$. Donc $D=]2,+\infty[$.

Transformation. Soit $x\in D$. D'après la relation fondamentale (F03), l'équation s'écrit $\ln\big((x-2)(x+4)\big)=\ln(7x-2)$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02), elle équivaut à :

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+4)=7x-2\\ \Leftrightarrow\ &x^2-5x-6=0.\end{aligned}$$

Racines. Le discriminant vaut $25+24=49$; les racines sont 6 et -1. Seul 6 appartient à D.

Conclusion. $S=\{6\}$.

2.

$\ln(x^2)=2\ln(x+4)$.

INDICE

Le domaine contient des réels négatifs : ne remplace pas $\ln(x^2)$ par $2\ln x$. Transforme plutôt le membre de droite, où $x+4>0$.

CORRIGÉ

Domaine. L'équation a un sens si et seulement si $x^2>0$ et $x+4>0$. Donc $D=]-4,0[\cup]0,+\infty[$.

Transformation. Soit $x\in D$. Comme $x+4>0$, le logarithme d'une puissance (F04) donne $2\ln(x+4)=\ln\big((x+4)^2\big)$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned}&\ln(x^2)=\ln\big((x+4)^2\big)\\ \Leftrightarrow\ &x^2=(x+4)^2\\ \Leftrightarrow\ &8x+16=0\\ \Leftrightarrow\ &x=-2.\end{aligned}$$

Comme $-2\in D$, la valeur convient. Vérification : $\ln 4=2\ln 2$.

Conclusion. $S=\{-2\}$. Écrire $\ln(x^2)=2\ln x$ aurait supprimé cette solution (W02).

3.

$2(\ln x)^2 - \ln x - 3 = 0$.

INDICE

Pose $X = \ln x$: tu obtiens une équation du second degré en X. Reviens ensuite à x avec F06 (le nombre e).

CORRIGÉ

Domaine et changement d'inconnue. L'équation a un sens si et seulement si $x > 0$: $D =]0, +\infty[$. Soit $x \in D$; posons $X = \ln x$. L'équation devient :

$$2X^2 - X - 3 = 0.$$

Valeurs de X. Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$, d'où $X = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2}$ ou $X = \dfrac{1-5}{4} = -1$.

Retour à x. D'après F06 (le nombre e) et le logarithme d'une puissance (F04), $\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}$ et $\ln(e^{-1}) = -1$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

- $\ln x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$;
- $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

Ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. $S = \left\{e^{-1}, e^{\frac{3}{2}}\right\}$.

Exercice 2

Inéquations : transformer, conclure, intersecter

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$\ln(x+1) + \ln(x-2) \leq \ln(x+13)$.

INDICE

Sur le domaine, regroupe le membre de gauche avec la relation fondamentale (F03), puis compare les arguments. Le trinôme obtenu se factorise.

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > -1$, $x > 2$ et $x > -13$. Donc $D =]2, +\infty[$.

Résolution. Soit $x \in D$. D'après la relation fondamentale (F03), l'inéquation s'écrit $\ln\big((x+1)(x-2)\big) \leq \ln(x+13)$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02), elle équivaut à :

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 2 \leq x + 13 \\ \Leftrightarrow\ & (x-5)(x+3) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3 \leq x \leq 5. \end{aligned}$$

On intersecte avec D.

Conclusion. $S =]2, 5]$.

2.

$\ln(3-x) - \ln(x+1) > \ln 2$.

INDICE

Fais passer $\ln(x+1)$ à droite et regroupe (F03) : $\ln 2 + \ln(x+1) = \ln(2x+2)$.

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x < 3$ et $x > -1$. Donc $D =]-1, 3[$.

Résolution. Soit $x \in D$. D'après la relation fondamentale (F03), $\ln 2 + \ln(x+1) = \ln(2x+2)$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned} & \ln(3-x) > \ln(2x+2) \\ \Leftrightarrow\ & 3 - x > 2x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On intersecte avec D.

Conclusion. $S = \left]-1, \frac{1}{3}\right[$.

3.

$(\ln x)^2 < 4$.

INDICE

Un carré est strictement inférieur à 4 si et seulement si le nombre est strictement compris entre -2 et 2.

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$: $D =]0, +\infty[$.

Résolution. Soit $x \in D$. Un carré est strictement inférieur à 4 si et seulement si le nombre est strictement compris entre -2 et 2 :

$$\begin{aligned} & (\ln x)^2 < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < \ln x < 2 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(e^{-2}) < \ln x < \ln(e^2). \end{aligned}$$

D'après F06 (le nombre e) et la stricte croissance de $\ln$ (F02), cela équivaut à $e^{-2} < x < e^2$.

Conclusion. $S = \left]e^{-2}, e^2\right[$.

Exercice 3

Trois systèmes, trois réflexes

Dans chaque question, x et y sont deux inconnues réelles.

1.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \ln x + 2\ln y = 5 \\ 3\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$$

INDICE

Conditions : $x > 0$ et $y > 0$. Pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: le système devient linéaire.

CORRIGÉ

Conditions. Le système a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Système linéaire. Posons $X = \ln x$ et $Y = \ln y$:

$$\begin{cases} X + 2Y = 5 \\ 3X - Y = 1 \end{cases}$$

La seconde équation donne $Y = 3X - 1$. Dans la première : $X + 6X - 2 = 5$, d'où $X = 1$, puis $Y = 2$.

Retour à x et y. D'après F06 (le nombre e), $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ et $\ln y = 2 \Leftrightarrow y = e^2$. Ces réels sont strictement positifs.

Conclusion. L'unique solution est le couple $\left(e, e^2\right)$.

2.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 6 \end{cases}$$

INDICE

Avec la relation fondamentale (F03), la seconde équation donne le produit xy. Deux réels de somme s et de produit p sont les racines de $t^2 - st + p = 0$.

CORRIGÉ

Conditions. Le système a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Le produit. Sous ces conditions, la relation fondamentale (F03) et le logarithme d'une puissance (F04) donnent $\ln(xy) = \ln 36$, soit $xy = 36$ par stricte croissance de $\ln$ (F02).

Somme et produit. Les réels x et y sont donc les racines de $t^2 - 13t + 36 = 0$. Le discriminant vaut $169 - 144 = 25$; les racines sont 4 et 9, toutes deux strictement positives.

Conclusion. Les solutions sont les couples $(4, 9)$ et $(9, 4)$.

3.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ \ln(xy) = 2\ln 6 \end{cases}$$

Le système obtenu en remplaçant $\ln(xy)$ par $\ln x + \ln y$ a-t-il les mêmes solutions ?

INDICE

Ici la condition porte sur le produit : $xy > 0$, ce qui autorise x et y tous deux négatifs.

CORRIGÉ

Conditions. Le système a un sens si et seulement si $xy > 0$.

Résolution. Sous cette condition, $\ln(xy) = \ln 36 \Leftrightarrow xy = 36$ (FO2, stricte croissance de $\ln$). Les réels x et y sont les racines de $t^2 + 13t + 36 = 0$, soit -4 et -9. Leur produit vaut $36 > 0$: les solutions sont les couples $(-4, -9)$ et $(-9, -4)$.

Le second système. Avec $\ln x + \ln y$, les conditions deviennent $x > 0$ et $y > 0$: la somme $x + y$ serait alors positive, ce qui contredit $x + y = -13$. Ce second système n'a aucune solution.

Conclusion. Le premier système a pour solutions $(-4, -9)$ et $(-9, -4)$; le second n'en a aucune. Les deux écritures ne sont pas interchangeables.

Exercice 4

Lever quatre formes indéterminées

Calculer chacune des limites suivantes. Indique à chaque fois la forme indéterminée et la limite de référence utilisée.

1.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(4x+3)}{2x}$.

INDICE

Pour $x>0$, $4x+3 = x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)$: sépare le logarithme en deux avec la relation fondamentale (F03).

CORRIGÉ

Forme. C'est une forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Transformation. Soit $x>0$. On a $4x+3 = x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)$, avec deux facteurs strictement positifs.

D'après la relation fondamentale (F03) :

$$\frac{\ln(4x+3)}{2x} = \frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(4+\frac{3}{x}\right)}{2x}.$$

Limite. D'après les croissances comparées (F08), $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0. Le numérateur du second terme tend vers $\ln 4$ et son dénominateur vers $+\infty$: il tend vers 0.

Conclusion. La limite vaut 0.

2.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\,\ln x$.

INDICE

Pose $X = \sqrt[3]{x}$, de sorte que $x = X^3$ et $\ln x = 3\ln X$.

CORRIGÉ

Forme. C'est une forme $0\times(-\infty)$.

Changement de variable. Soit $x>0$; posons $X = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Alors $X>0$ et, d'après le logarithme d'une puissance (F04), $\ln x = \ln(X^3) = 3\ln X$. Donc :

$$\sqrt[3]{x}\,\ln x = 3X\ln X.$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, X tend vers 0^+. D'après les croissances comparées (F08), $X\ln X$ tend vers 0.

Conclusion. La limite vaut 0.

3.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4}$.

INDICE

Pose $X = x-2$ et factorise $x^2-4 = (x-2)(x+2)$.

CORRIGÉ

Forme. Quand x tend vers 2, c'est une forme $\dfrac{0}{0}$.

Changement de variable. Soit $x > 1, x \neq 2$; posons $X = x-2$. Comme $x^2-4 = X(x+2)$:

$$\frac{\ln(x-1)}{x^2-4} = \frac{\ln(1+X)}{X} \times \frac{1}{x+2}.$$

Limite. Quand x tend vers 2, X tend vers 0 ; d'après la limite de référence de $\dfrac{\ln(1+X)}{X}$ en 0 (F10), ce quotient tend vers 1. Et $\dfrac{1}{x+2}$ tend vers $\dfrac{1}{4}$.

Conclusion. La limite vaut $\dfrac{1}{4}$.

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

INDICE

Pose $X = \sqrt{x}$: alors $\ln x = 2\ln X$ et $x = X^2$. Fais apparaître un carré.

CORRIGÉ

Forme. C'est une forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Changement de variable. Soit $x > 0$; posons $X = \sqrt{x}$. D'après le logarithme d'une puissance (F04), $\ln x = 2\ln X$, et $x = X^2$. Donc :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{4(\ln X)^2}{X^2} = 4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2.$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$. D'après les croissances comparées (F08), $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0.

Conclusion. La limite vaut 0.

Exercice 5

Une même fraction, deux intervalles

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,-3[\cup]-3,4[\cup]4,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-12}.$$

On note $I=]-3,4[$ et $J=]4,+\infty[$.

1.

Factoriser x^2-x-12, puis donner son signe sur I et sur J.

INDICE

Cherche les racines du trinôme ; il est négatif entre ses racines.

CORRIGÉ

Factorisation. Le discriminant vaut $1+48=49$; les racines sont $\frac{1+7}{2}=4$ et $\frac{1-7}{2}=-3$. Donc, pour tout réel x :

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3).$$

Signe.

- Pour $x\in I$, $x-4<0$ et $x+3>0$: le trinôme est strictement négatif.
- Pour $x\in J$, les deux facteurs sont strictement positifs : le trinôme est strictement positif.

Conclusion. $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$; ce trinôme est strictement négatif sur I et strictement positif sur J.

2.

Montrer que la fonction F définie sur I par $F(x)=\ln(12+x-x^2)$ est une primitive de f sur I.

INDICE

Sur I, $12+x-x^2=-(x^2-x-12)>0$. Dérive F avec la dérivée de $\ln u$ (F12).

CORRIGÉ

Hypothèses. Posons $u(x)=x^2-x-12$. Sur I, $u(x)<0$ (question 1), donc $-u(x)=12+x-x^2>0$. La fonction $-u$ est dérivable sur I, de dérivée $x\mapsto 1-2x$.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), appliquée à $-u$, F est dérivable sur I. Pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1-2x}{12+x-x^2}\\&=\frac{2x-1}{x^2-x-12}\\&=f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. F est une primitive de f sur I ; c'est la forme $\ln|u|$ des primitives de $\frac{u'}{u}$ (F13).

3.

Déterminer la primitive G de f sur J telle que $G(5) = 0$.

INDICE

Sur J, $u > 0$: les primitives sont les fonctions $x \mapsto \ln(x^2 - x - 12) + k$. Calcule $u(5)$.

CORRIGÉ

Les primitives sur J. Sur J, $u(x) > 0$ et $f = \dfrac{u'}{u}$. D'après les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ (F13), les primitives de f sur J sont les fonctions $x \mapsto \ln(x^2 - x - 12) + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

La constante. Le réel 5 appartient à J et $u(5) = 8$. La condition $G(5) = 0$ donne $\ln 8 + k = 0$, soit $k = -\ln 8$.

Conclusion. Pour tout $x \in J$, d'après le logarithme d'un quotient (F04) :

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln(x^2 - x - 12) - \ln 8 \\ &= \ln\left(\frac{x^2 - x - 12}{8}\right). \end{aligned}$$

4.

Soit p la fonction définie sur $]-1, 4[$ par $p(x) = \ln\left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|$. Montrer que p est dérivable sur $]-1, 4[$ et que, pour tout $x \in]-1, 4[$:

$$p'(x) = \frac{5}{(x-4)(x+1)}.$$

INDICE

Sur $]-1, 4[$, le quotient est négatif : écris $p(x) = \ln(4 - x) - \ln(x + 1)$ avec le logarithme d'un quotient (F04).

CORRIGÉ

Une autre écriture de p. Soit $x \in]-1, 4[$. On a $4 - x > 0$ et $x + 1 > 0$, et :

$$\left|\frac{x-4}{x+1}\right| = \frac{4-x}{x+1}.$$

D'après le logarithme d'un quotient (F04), $p(x) = \ln(4 - x) - \ln(x + 1)$.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), p est dérivable sur $]-1, 4[$. Pour tout $x \in]-1, 4[$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{-1}{4-x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1) - (x-4)}{(x-4)(x+1)} \\ &= \frac{5}{(x-4)(x+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion. p est dérivable sur $]-1, 4[$ et $p'(x) = \dfrac{5}{(x-4)(x+1)}$ pour tout x de cet intervalle.

Exercice 6

Minorer ln x par une fraction rationnelle

On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=\ln x-\frac{3(x-1)}{x+3}.$$

1.

Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$:

$$h'(x)=\frac{(x-3)^2}{x(x+3)^2}.$$

INDICE

Dérive le quotient $\dfrac{3(x-1)}{x+3}$, puis réduis au dénominateur $x(x+3)^2$. Développe le numérateur obtenu.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0,+\infty[$, $\ln$ est dérivable (F01, fonction logarithme népérien), et $x\mapsto\dfrac{3(x-1)}{x+3}$ est dérivable car $x+3>0$. Donc h est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Dérivée du quotient. Pour tout $x>0$, la dérivée de $x\mapsto\dfrac{3(x-1)}{x+3}$ en x vaut :

$$\begin{aligned}&\frac{3(x+3)-3(x-1)}{(x+3)^2}\\&=\frac{12}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$

Calcul de $h'(x)$. Soit $x>0$:

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{1}{x}-\frac{12}{(x+3)^2}\\&=\frac{x^2+6x+9-12x}{x(x+3)^2}\\&=\frac{(x-3)^2}{x(x+3)^2}.\end{aligned}$$

Conclusion. h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $h'(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x(x+3)^2}$.

2.

En déduire le sens de variation de h sur $]0, +\infty[$, puis calculer $h(1)$.

INDICE

Le signe de $h'(x)$ est celui d'un carré. Une dérivée positive qui ne s'annule qu'en un point donne une fonction strictement croissante.

CORRIGÉ

Signe de $h'(x)$. Pour tout $x > 0$, $x(x+3)^2 > 0$ et $(x-3)^2 \geq 0$: donc $h'(x) \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 3$.

Variations. Une fonction dérivable sur un intervalle, de dérivée positive qui ne s'annule qu'en un point, y est strictement croissante. Donc h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Valeur en 1. $h(1) = \ln 1 - 0 = 0$.

Conclusion. h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $h(1) = 0$.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$:

$$\ln x \geq \frac{3(x-1)}{x+3},$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$. Que peut-on dire pour $0 < x < 1$?

INDICE

Compare $h(x)$ à $h(1)$ selon la position de x par rapport à 1.

CORRIGÉ

Cas $x \geq 1$. Soit $x \geq 1$. Comme h est croissante sur $]0, +\infty[$, $h(x) \geq h(1) = 0$, soit :

$$\ln x \geq \frac{3(x-1)}{x+3}.$$

Cas d'égalité. Si $x > 1$, la stricte croissance donne $h(x) > h(1) = 0$: l'inégalité est stricte. L'égalité a donc lieu seulement pour $x = 1$.

Cas $0 < x < 1$. Alors $h(x) < h(1) = 0$, soit $\ln x < \frac{3(x-1)}{x+3}$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 1$, $\ln x \geq \frac{3(x-1)}{x+3}$, avec égalité seulement pour $x = 1$; pour $0 < x < 1$, l'inégalité est renversée et stricte.

4.

En déduire que $\ln 2 > \dfrac{3}{5}$, puis que $\ln 3 > \dfrac{14}{15}$.

INDICE

Applique la question 3 avec $x = 2$, puis avec $x = \dfrac{3}{2}$ et $\ln 3 = \ln 2 + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (F03).

CORRIGÉ

Minoration de $\ln 2$. Avec $x = 2 > 1$, la question 3 donne une inégalité stricte :

$$\ln 2 > \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Minoration de $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Avec $x = \dfrac{3}{2} > 1$:

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) > \frac{3 \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion. D'après la relation fondamentale (F03), $\ln 3 = \ln 2 + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Donc $\ln 2 > \dfrac{3}{5}$ et :

$$\ln 3 > \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}.$$

Exercice 7

Trouver le premier entier qui convient

On admet les encadrements $0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694$, $2{,}302 < \ln 10 < 2{,}303$ et l'encadrement $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$.

1.

Une grandeur positive est multipliée par $0{,}8$ à chaque étape. Déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}8^n \leq 0{,}01$.

INDICE

Applique $\ln$ aux deux membres. Écris $\ln 0{,}8 = 3\ln 2 - \ln 10$ et regarde son signe avant de diviser. Encadre ensuite le quotient.

CORRIGÉ

Passage au logarithme. Les deux membres sont strictement positifs et $\ln$ est strictement croissante (F02). D'après le logarithme d'une puissance (F04) :

$$\begin{aligned} & 0{,}8^n \leq 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & n \ln 0{,}8 \leq \ln 0{,}01. \end{aligned}$$

Signe de $\ln 0{,}8$. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $\ln 0{,}8 < 0$ (F02). Diviser par ce nombre négatif change le sens : la condition devient $n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$.

Encadrement du quotient. D'après F04, $\ln 0{,}01 = -2\ln 10$ et $\ln 0{,}8 = 3\ln 2 - \ln 10$, donc :

$$\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} = \frac{2\ln 10}{\ln 10 - 3\ln 2}.$$

Les encadrements donnés fournissent $4{,}604 < 2\ln 10 < 4{,}606$ et $0{,}220 < \ln 10 - 3\ln 2 < 0{,}224$. Donc :

$$\frac{4{,}604}{0{,}224} < \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} < \frac{4{,}606}{0{,}220},$$

soit :

$$20{,}5 < \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} < 21.$$

Conclusion. Le plus petit entier qui convient est $n = 21$.

2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^9$.

INDICE

Applique $\log$, strictement croissante (F16) : $n\log 2 > 9$. Encadre ensuite $\dfrac{9}{\log 2}$ avec l'encadrement donné.

CORRIGÉ

Passage au logarithme décimal. La fonction $\log$ est strictement croissante (F16). D'après le logarithme d'une puissance (F15), et comme $\log 2 > 0$:

$$\begin{aligned} & 2^n > 10^9 \\ \Leftrightarrow\ & n\log 2 > 9 \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{9}{\log 2}. \end{aligned}$$

Encadrement. De $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$, on tire $\dfrac{9}{0{,}302} < \dfrac{9}{\log 2} < \dfrac{9}{0{,}301}$, soit :

$$29{,}8 < \frac{9}{\log 2} < 29{,}91.$$

Conclusion. Le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{9}{\log 2}$ est $n = 30$.

3.

Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels que $\log_{\frac{1}{2}} n < -3$.

INDICE

Reviens à $\ln$ (F14) : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2 < 0$. Multiplier par un nombre négatif change le sens.

CORRIGÉ

Retour à $\ln$. Soit $n \geq 1$. D'après la définition du logarithme de base a (F14) et le logarithme d'un inverse (F04) :

$$\log_{\frac{1}{2}} n = \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\ln n}{\ln 2}.$$

Résolution. Comme $\ln 2 > 0$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\ln n}{\ln 2} < -3 \\ \Leftrightarrow\ & \ln n > 3\ln 2 = \ln 8 \\ \Leftrightarrow\ & n > 8. \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient de la stricte croissance de $\ln$ (F02).

Conclusion. Les entiers cherchés sont les entiers $n \geq 9$.

Exercice 8

Une étude pour compter les solutions

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 8\ln x + 1.$$

On admet que $0{,}69 < \ln 2$ et $\ln 3 < 1{,}1$.

1.

Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

INDICE

En 0^+, ce n'est pas une forme indéterminée. En $+\infty$, factorise par x^2 et cite la croissance comparée qui convient (F09).

CORRIGÉ

Limite en 0^+. $x^2 + 1$ tend vers 1 et, d'après les limites de $\ln$ (F05), $\ln x$ tend vers $-\infty$; donc $-8\ln x$ tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^2\left(1 - 8\,\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right).$$

D'après les croissances comparées avec une puissance de x (F09), avec $n = 2$, $\dfrac{\ln x}{x^2}$ tend vers 0. La parenthèse tend vers 1, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$.

2.

Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

INDICE

$f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x}$: réduis au même dénominateur et factorise.

CORRIGÉ

Dérivée. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (F01, dérivée de $\ln$) et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{8}{x} \\ &= \frac{2(x^2-4)}{x} \\ &= \frac{2(x-2)(x+2)}{x}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $x+2 > 0$ et $x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Son minimum est $f(2) = 5 - 8\ln 2$.

3.

Montrer que $f(2) < 0$, puis que $f(1) > 0$ et $f(3) > 0$.

INDICE

Utilise $\ln 2 > 0{,}69$ pour $f(2)$ et $\ln 3 < 1{,}1$ pour $f(3)$.

CORRIGÉ

Signe de $f(2)$. Comme $\ln 2 > 0{,}69$, on a $8\ln 2 > 5{,}52$, donc $f(2) = 5 - 8\ln 2 < 5 - 5{,}52 < 0$.

Signe de $f(1)$. $f(1) = 1 - 0 + 1 = 2 > 0$.

Signe de $f(3)$. Comme $\ln 3 < 1{,}1$, on a $8\ln 3 < 8{,}8$, donc $f(3) = 10 - 8\ln 3 > 10 - 8{,}8 > 0$.

Conclusion. $f(2) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(3) > 0$.

4.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, +\infty[$, avec :

$$1 < \alpha < 2 < \beta < 3.$$

INDICE

Sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone, applique le théorème des valeurs intermédiaires. Vérifie ensuite qu'il n'y a pas d'autre solution hors de $[1, 3]$.

CORRIGÉ

Sur $[1, 2]$. f est continue et strictement décroissante, avec $f(1) > 0 > f(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une solution dans $[1, 2]$; comme f y est strictement monotone, cette solution α est unique. Comme $f(1) \neq 0$ et $f(2) \neq 0$, on a $1 < \alpha < 2$.

Sur $[2, 3]$. f est continue et strictement croissante, avec $f(2) < 0 < f(3)$. Le même théorème donne une solution β, unique par stricte monotonie, et $2 < \beta < 3$.

Hors de $[1, 3]$.

- Pour $0 < x < 1$: $f(x) > f(1) > 0$, par décroissance stricte sur $]0, 2]$.
- Pour $x > 3$: $f(x) > f(3) > 0$, par croissance stricte sur $[2, +\infty[$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, +\infty[$, et $1 < \alpha < 2 < \beta < 3$.