BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	10

Exercice 1

Trois domaines à déterminer

Pour chaque fonction, le domaine est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression a un sens. Écris d'abord une condition par logarithme.

1.

Déterminer le domaine D_f de la fonction f définie par $f(x) = \ln(5 - 2x) - \ln(x + 3)$.

INDICE

Deux logarithmes, donc deux conditions : $5 - 2x > 0$ et $x + 3 > 0$. Le domaine est l'intersection des deux ensembles.

2.

Déterminer le domaine D_p de la fonction p définie par $p(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right)$.

INDICE

Ici, un seul logarithme : le quotient $\dfrac{x - 1}{x + 2}$ doit être strictement positif. Dresse le tableau de signes du numérateur et du dénominateur.

3.

Sur quel ensemble a-t-on $p(x) = \ln(x - 1) - \ln(x + 2)$? Que vaut $p(x)$ pour $x < -2$?

INDICE

Le membre de droite n'existe que si $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$. Pour $x < -2$, écris le quotient avec deux termes positifs.

4.

Déterminer le domaine D_q de la fonction q définie par $q(x) = \ln(2x^2 - 7x + 3)$.

INDICE

Cherche les racines du trinôme avec le discriminant. Un trinôme de coefficient dominant positif est strictement positif à l'extérieur de ses racines.

Exercice 2

Tout exprimer avec ln 2 et ln 3

Dans cet exercice, on ne cherche aucune valeur approchée : les résultats s'écrivent avec $\ln 2$ et $\ln 3$.

1.

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres :

$$A = \ln 72 - 2\ln 6 + \ln\left(\frac{1}{18}\right),$$

$$B = \ln\sqrt{48} + \ln\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$C = 3\ln\sqrt[3]{12} - \ln\left(\frac{9}{2}\right).$$

INDICE

Décompose chaque entier en produit de puissances de 2 et de 3 : $72 = 2^3 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$, $12 = 2^2 \times 3$. Applique ensuite la relation fondamentale (F03) et les règles de F04.

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln(9x^5) - 3\ln(3x) + 2\ln\sqrt{x} = 3\ln x - \ln 3.$$

INDICE

Pour $x > 0$, les nombres 9, x^5, 3, x et $\sqrt{x}$ sont strictement positifs. Développe chaque terme avec la relation fondamentale (F03) et les règles de F04.

3.

Un élève écrit : « pour tout réel x non nul, $\ln(x^4) = 4\ln x$ ». Corriger cette affirmation.

INDICE

Teste la valeur $x = -1$ dans chaque membre. La règle $\ln(a^n) = n\ln a$ (logarithme d'une puissance, F04) exige $a > 0$.

Exercice 3

Trois équations, domaine d'abord

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes. Commence toujours par le domaine D de l'équation.

1.

$\ln(3x-2) = \ln(x+4)$.

INDICE

Domaine : $3x-2>0$ et $x+4>0$. Sur ce domaine, deux logarithmes égaux ont des arguments égaux (F02, stricte croissance de $\ln$).

2.

$\ln(2x+1) = 2$.

INDICE

Écris $2 = \ln(e^2)$ (F06, le nombre e), puis conclus comme à la question 1.

3.

$\ln(4-x) = \ln 2 + \ln 3$.

INDICE

Regroupe d'abord le membre de droite en un seul logarithme avec la relation fondamentale (F03).

Exercice 4

Trois inéquations, domaine d'abord

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$\ln(2x-3) < \ln(5-x)$.

INDICE

Domaine : $2x-3>0$ et $5-x>0$. Sur ce domaine, $\ln a < \ln b$ équivaut à $a<b$ (F02, stricte croissance de $\ln$).

2.

$\ln(x+1) \geq -2$.

INDICE

Écris $-2 = \ln(e^{-2})$ (F06, le nombre e).

3.

$\ln(1-3x) \leq 0$.

INDICE

$0 = \ln 1$. Un logarithme est négatif ou nul quand son argument est compris entre 0 et 1.

Exercice 5

Quatre limites, une référence chaque fois

Calculer chacune des limites suivantes. Pour chacune, nomme la limite de référence employée.

1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 5\ln x)$.

INDICE

C'est une forme $(+\infty) - (+\infty)$. Factorise par x pour faire apparaître $\dfrac{\ln x}{x}$.

2.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(3x^2 \ln x - 1\right)$.

INDICE

Le produit $x^2 \ln x$ est une forme $0 \times (-\infty)$: cherche la croissance comparée qui la traite.

3.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{2x}$.

INDICE

Pose $X = 5x$: quand x tend vers 0, X tend vers 0. Écris ensuite $2x = \dfrac{2}{5}X$.

4.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

INDICE

Regarde le numérateur et le dénominateur séparément. Est-ce vraiment une forme indéterminée ?

Exercice 6

Dériver ln u, en vérifiant la condition

Pour chaque fonction, justifie sa dérivabilité sur l'intervalle indiqué, puis calcule sa dérivée.

1.

$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Mets le trinôme sous forme canonique pour montrer qu'il est strictement positif.

2.

$p(x) = x\ln(4x + 1)$, sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

INDICE

C'est un produit : dérive $x \mapsto \ln(4x + 1)$ avec la dérivée de $\ln u$ (F12), puis applique la formule $(vw)' = v'w + vw'$.

3.

$r(x) = \ln|2x - 5|$, sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$.

INDICE

Sur cet intervalle, quel est le signe de $2x - 5$? Utilise la forme $\ln|u|$ de la dérivée logarithmique (F12).

Exercice 7

Reconnaître λu′/u

On considère les fonctions f, p et s définies par :

$$f(x) = \frac{6x}{3x^2+2},$$
$$p(x) = \frac{1}{4x-7},$$
$$s(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}.$$

1.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule la dérivée de $u(x) = 3x^2+2$ et compare-la au numérateur.

2.

Déterminer les primitives de p sur $I = \left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

INDICE

Avec $u(x) = 4x-7$, $u'(x) = 4$: écris $p = \frac{1}{4} \times \frac{u'}{u}$.

3.

Déterminer la primitive P de p sur I telle que $P(2) = 3$.

INDICE

Le point 2 appartient à I. Calcule $\ln(4 \times 2 - 7)$.

4.

Déterminer une primitive de s sur $J =]1, +\infty[$.

INDICE

Factorise x^2+2x-3 pour lire son signe sur J. Sa dérivée est $2x+2 = 2(x+1)$.

Exercice 8

Logarithmes de base 2, 3, 4, 8 et 1/3

Rappel : pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $x > 0$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1.

Calculer $\log_2 32 + \log_3 \left(\dfrac{1}{27}\right) - \log_4 8$.

INDICE

Écris chaque argument comme une puissance de 2 ou de 3, puis reviens à $\ln$ pour $\log_4 8$ (définition, F14).

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x.$$

INDICE

Reviens à $\ln$ dans les deux membres (F14), avec $\ln 8 = 3\ln 2$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$.

INDICE

Reviens à $\ln$: $\log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$. Quel est le signe de $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$?

Exercice 9

Logarithme décimal et nombre de chiffres

On admet l'encadrement $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$. Un entier $N \geq 1$ a $p+1$ chiffres lorsque $10^p \leq N < 10^{p+1}$.

1.

Calculer $\log(0{,}001) + \log\sqrt{1000}$.

INDICE

Écris $0{,}001$ et $\sqrt{1000}$ comme des puissances rationnelles de 10.

2.

Combien de chiffres l'entier 2^{40} possède-t-il ?

INDICE

Calcule un encadrement de $\log(2^{40}) = 40\log 2$, puis compare 2^{40} à deux puissances de 10 consécutives.

3.

Montrer que $\log 5 = 1 - \log 2$, puis déterminer le nombre de chiffres de 5^{20}.

INDICE

$5 = \dfrac{10}{2}$. Pour l'encadrement, attention : multiplier par -20 change le sens des inégalités.

Exercice 10

Signe d'un logarithme, comparaison de deux logarithmes

Dans cet exercice, aucune valeur approchée n'est utilisée.

1.

Étudier le signe de $\ln(2x-1)$ sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

INDICE

$\ln X$ est négatif quand $0 < X < 1$, nul quand $X = 1$, positif quand $X > 1$ (F02, signe de $\ln$).

2.

Étudier le signe de $(x-3)\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Étudie le signe de chaque facteur. $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ change de signe quand $\dfrac{x}{2} = 1$.

3.

Comparer $3\ln 2$ et $2\ln 3$.

INDICE

Écris chaque nombre comme le logarithme d'un entier (logarithme d'une puissance, F04).