BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	10

Exercice 1

Trois domaines à déterminer

Pour chaque fonction, le domaine est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression a un sens. Écris d'abord une condition par logarithme.

1.

Déterminer le domaine D_f de la fonction f définie par $f(x) = \ln(5 - 2x) - \ln(x + 3)$.

INDICE

Deux logarithmes, donc deux conditions : $5 - 2x > 0$ et $x + 3 > 0$. Le domaine est l'intersection des deux ensembles.

CORRIGÉ

$f(x)$ existe si et seulement si $5 - 2x > 0$ et $x + 3 > 0$:

- $5 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{2}$;
- $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

Les deux conditions doivent être vérifiées en même temps : on prend l'intersection.

Conclusion. $D_f = \left]-3, \dfrac{5}{2}\right[$.

2.

Déterminer le domaine D_p de la fonction p définie par $p(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$.

INDICE

Ici, un seul logarithme : le quotient $\dfrac{x-1}{x+2}$ doit être strictement positif. Dresse le tableau de signes du numérateur et du dénominateur.

CORRIGÉ

$p(x)$ existe si et seulement si $x \neq -2$ et $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$.

Un quotient est strictement positif lorsque ses deux termes sont non nuls et de même signe. Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$+$		$-$	0	$+$	

Conclusion. $D_p =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

3.

Sur quel ensemble a-t-on $p(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$? Que vaut $p(x)$ pour $x < -2$?

INDICE

Le membre de droite n'existe que si $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$. Pour $x < -2$, écris le quotient avec deux termes positifs.

CORRIGÉ

Domaine du membre de droite. $\ln(x-1) - \ln(x+2)$ existe si et seulement si $x > 1$ et $x > -2$, soit $x \in]1, +\infty[$.

L'égalité sur $]1, +\infty[$**.** Soit $x > 1$. Alors $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$. D'après le logarithme d'un quotient (F04) :

$$\begin{aligned} p(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \\ &= \ln(x-1) - \ln(x+2). \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie sur $]1, +\infty[$ seulement, et non sur tout D_p.

Le cas $x < -2$**.** Soit $x < -2$. Alors $1 - x > 0$ et $-x - 2 > 0$, et l'on écrit le quotient avec deux termes positifs :

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{1-x}{-x-2}.$$

D'après le logarithme d'un quotient (F04) :

$$\begin{aligned} p(x) &= \ln(1-x) \\ &\quad - \ln(-x-2). \end{aligned}$$

Conclusion. $p(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$ exactement pour $x > 1$; pour $x < -2$, $p(x) = \ln(1-x) - \ln(-x-2)$.

4.

Déterminer le domaine D_q de la fonction q définie par $q(x) = \ln(2x^2 - 7x + 3)$.

INDICE

Cherche les racines du trinôme avec le discriminant. Un trinôme de coefficient dominant positif est strictement positif à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

$q(x)$ existe si et seulement si $2x^2 - 7x + 3 > 0$.

Racines du trinôme. Le discriminant vaut $\Delta = 49 - 24 = 25$. Les racines sont $\dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{7+5}{4} = 3$.

Signe. Le coefficient de x^2 vaut $2 > 0$: le trinôme est strictement positif à l'extérieur de ses racines.

Conclusion. $D_q = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[$.

Exercice 2

Tout exprimer avec ln 2 et ln 3

Dans cet exercice, on ne cherche aucune valeur approchée : les résultats s'écrivent avec $\ln 2$ et $\ln 3$.

1.

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres :

$$A = \ln 72 - 2\ln 6 + \ln\left(\frac{1}{18}\right),$$

$$B = \ln\sqrt{48} + \ln\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$C = 3\ln\sqrt[3]{12} - \ln\left(\frac{9}{2}\right).$$

INDICE

Décompose chaque entier en produit de puissances de 2 et de 3 : $72 = 2^3 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$, $12 = 2^2 \times 3$. Applique ensuite la relation fondamentale (F03) et les règles de F04.

CORRIGÉ

Tous les nombres sous les logarithmes sont strictement positifs : la relation fondamentale $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (F03) et les règles sur l'inverse, le quotient et la puissance (F04) s'appliquent.

Calcul de A. On a $72 = 2^3 \times 3^2$, $6 = 2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$:

- $\ln 72 = 3\ln 2 + 2\ln 3$;
- $2\ln 6 = 2\ln 2 + 2\ln 3$;
- $\ln\left(\frac{1}{18}\right) = -\ln 2 - 2\ln 3$.

Donc $A = -2\ln 3$.

Calcul de B. On a $48 = 2^4 \times 3$:

- $\ln\sqrt{48} = \frac{1}{2}\ln 48 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$;
- $\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - 2\ln 2$.

Donc $B = \frac{3}{2}\ln 3$.

Calcul de C. On a $12 = 2^2 \times 3$:

- $3\ln\sqrt[3]{12} = 3 \times \frac{1}{3}\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3$;
- $\ln\left(\frac{9}{2}\right) = 2\ln 3 - \ln 2$.

Donc $C = 3\ln 2 - \ln 3$.

Conclusion. $A = -2\ln 3$, $B = \frac{3}{2}\ln 3$ et $C = 3\ln 2 - \ln 3$.

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}&\ln(9x^5) - 3\ln(3x) + 2\ln\sqrt{x}\\ &= 3\ln x - \ln 3.\end{aligned}$$

INDICE

Pour $x > 0$, les nombres 9, x^5, 3, x et $\sqrt{x}$ sont strictement positifs. Développe chaque terme avec la relation fondamentale (F03) et les règles de F04.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Les réels 9, 3, x, x^5 et $\sqrt{x}$ sont strictement positifs. D'après la relation fondamentale (F03) et le logarithme d'une puissance (F04) :

- $\ln(9x^5) = 2\ln 3 + 5\ln x$;
- $3\ln(3x) = 3\ln 3 + 3\ln x$;
- $2\ln\sqrt{x} = 2 \times \dfrac{1}{2}\ln x = \ln x$.

On additionne, en notant L le membre de gauche :

$$\begin{aligned}L &= 2\ln 3 + 5\ln x - 3\ln 3\\ &\quad - 3\ln x + \ln x\\ &= 3\ln x - \ln 3.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\ln(9x^5) - 3\ln(3x) + 2\ln\sqrt{x} = 3\ln x - \ln 3$.

3.

Un élève écrit : « pour tout réel x non nul, $\ln(x^4) = 4\ln x$ ». Corriger cette affirmation.

INDICE

Teste la valeur $x = -1$ dans chaque membre. La règle $\ln(a^n) = n\ln a$ (logarithme d'une puissance, F04) exige $a > 0$.

CORRIGÉ

L'affirmation est fausse. Pour $x = -1$, le membre de gauche vaut $\ln 1 = 0$, alors que $\ln(-1)$ n'existe pas.

Égalité correcte. Soit $x \neq 0$. On a $x^4 = |x|^4$ et $|x| > 0$. Le logarithme d'une puissance (F04), appliqué au réel strictement positif $|x|$, donne :

$$\ln(x^4) = 4\ln|x|.$$

Conclusion. Pour tout réel x non nul, $\ln(x^4) = 4\ln|x|$; l'égalité $\ln(x^4) = 4\ln x$ n'est vraie que pour $x > 0$.

Exercice 3

Trois équations, domaine d'abord

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes. Commence toujours par le domaine D de l'équation.

1.

$\ln(3x-2) = \ln(x+4)$.

INDICE

Domaine : $3x-2>0$ et $x+4>0$. Sur ce domaine, deux logarithmes égaux ont des arguments égaux (F02, stricte croissance de $\ln$).

CORRIGÉ

Domaine. L'équation a un sens si et seulement si $3x-2>0$ et $x+4>0$, soit $x > \dfrac{2}{3}$. Donc $D = \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

Résolution. Soit $x \in D$. Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (F02) :

$$\begin{aligned} &\ln(3x-2) = \ln(x+4) \\ \Leftrightarrow\ &3x-2 = x+4 \\ \Leftrightarrow\ &x = 3. \end{aligned}$$

Et $3 \in D$.

Conclusion. $S = \{3\}$.

2.

$\ln(2x+1) = 2$.

INDICE

Écris $2 = \ln(e^2)$ (F06, le nombre e), puis conclus comme à la question 1.

CORRIGÉ

Domaine. L'équation a un sens si et seulement si $2x+1>0$: $D = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Résolution. D'après F06 (définition du nombre e), $2 = \ln(e^2)$. Soit $x \in D$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned} &\ln(2x+1) = \ln(e^2) \\ \Leftrightarrow\ &2x+1 = e^2 \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{e^2-1}{2}. \end{aligned}$$

Ce réel vérifie $2x+1 = e^2 > 0$: il appartient à D.

Conclusion. $S = \left\{\dfrac{e^2-1}{2}\right\}$.

3.

$\ln(4-x) = \ln 2 + \ln 3$.

INDICE

Regroupe d'abord le membre de droite en un seul logarithme avec la relation fondamentale (F03).

CORRIGÉ

Domaine. L'équation a un sens si et seulement si $4 - x > 0$: $D =]-\infty, 4[$.

Résolution. D'après la relation fondamentale (F03), $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$. Soit $x \in D$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned} & \ln(4-x) = \ln 6 \\ \Leftrightarrow\ & 4 - x = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2. \end{aligned}$$

Comme $-2 < 4$, on a $-2 \in D$.

Conclusion. $S = \{-2\}$.

Exercice 4

Trois inéquations, domaine d'abord

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$\ln(2x-3) < \ln(5-x)$.

INDICE

Domaine : $2x-3>0$ et $5-x>0$. Sur ce domaine, $\ln a < \ln b$ équivaut à $a<b$ (F02, stricte croissance de $\ln$).

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > \dfrac{3}{2}$ et $x<5$. Donc $D = \left]\dfrac{3}{2}, 5\right[$.

Résolution. Soit $x \in D$. Comme $\ln$ est strictement croissante (F02) :

$$\begin{aligned} &\ln(2x-3) < \ln(5-x) \\ \Leftrightarrow\ &2x-3 < 5-x \\ \Leftrightarrow\ &x < \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

On intersecte avec D : $\dfrac{3}{2} < \dfrac{8}{3} < 5$.

Conclusion. $S = \left]\dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{3}\right[$.

2.

$\ln(x+1) \geq -2$.

INDICE

Écris $-2 = \ln(e^{-2})$ (F06, le nombre e).

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x+1>0$: $D =]-1, +\infty[$.

Résolution. D'après F06 (le nombre e), $-2 = \ln(e^{-2})$. Soit $x \in D$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned} &\ln(x+1) \geq \ln(e^{-2}) \\ \Leftrightarrow\ &x+1 \geq e^{-2} \\ \Leftrightarrow\ &x \geq e^{-2} - 1. \end{aligned}$$

Comme $e^{-2} > 0$, on a $e^{-2} - 1 > -1$: tous ces réels sont dans D.

Conclusion. $S = \left[e^{-2}-1, +\infty\right[$.

3.

$\ln(1-3x) \leq 0.$

INDICE

$0 = \ln 1$. Un logarithme est négatif ou nul quand son argument est compris entre 0 et 1.

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $1-3x > 0$: $D = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

Résolution. On a $\ln 1 = 0$. Soit $x \in D$. Par stricte croissance de $\ln$ (F02) :

$$\begin{aligned} & \ln(1-3x) \leq \ln 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1-3x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

On intersecte avec D.

Conclusion. $S = \left[0, \frac{1}{3}\right[$.

Exercice 5

Quatre limites, une référence chaque fois

Calculer chacune des limites suivantes. Pour chacune, nomme la limite de référence employée.

1.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5\ln x)$.

INDICE

C'est une forme $(+\infty)-(+\infty)$. Factorise par x pour faire apparaître $\dfrac{\ln x}{x}$.

CORRIGÉ

Factorisation. C'est une forme $(+\infty)-(+\infty)$. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}&2x-5\ln x\\&=x\left(2-5\times\frac{\ln x}{x}\right).\end{aligned}$$

Limite. D'après les croissances comparées (F08), $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc la parenthèse tend vers 2.

Comme x tend vers $+\infty$, le produit tend vers $+\infty$.

Conclusion.

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-5\ln x)=+\infty.$$

2.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(3x^2\ln x-1\right)$.

INDICE

Le produit $x^2\ln x$ est une forme $0\times(-\infty)$: cherche la croissance comparée qui la traite.

CORRIGÉ

D'après les croissances comparées avec une puissance de x (F09), avec $n=2$:

$$\lim_{x\to0^+}x^2\ln x=0.$$

Par opérations sur les limites, on conclut :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}\left(3x^2\ln x-1\right)\\&=3\times0-1=-1.\end{aligned}$$

3.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{2x}$.

INDICE

Pose $X = 5x$: quand x tend vers 0, X tend vers 0. Écris ensuite $2x = \dfrac{2}{5}X$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Soit $x > -\dfrac{1}{5}$, $x \neq 0$. Posons $X = 5x$; alors $X \neq 0$ et :

$$\frac{\ln(1+5x)}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\ln(1+X)}{X}.$$

Limite. Quand x tend vers 0, X tend vers 0. D'après la limite de référence $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (F10), on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{2x} = \frac{5}{2}.$$

4.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

INDICE

Regarde le numérateur et le dénominateur séparément. Est-ce vraiment une forme indéterminée ?

CORRIGÉ

Ce n'est pas une forme indéterminée.

- D'après les limites de $\ln$ (F05), $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\dfrac{1}{x^3}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+.

Le produit de $\ln x$ par $\dfrac{1}{x^3}$ tend donc vers $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^3} = -\infty.$$

Aucune croissance comparée n'est utile ici.

Exercice 6

Dériver ln u, en vérifiant la condition

Pour chaque fonction, justifie sa dérivabilité sur l'intervalle indiqué, puis calcule sa dérivée.

1.

$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Mets le trinôme sous forme canonique pour montrer qu'il est strictement positif.

CORRIGÉ

Positivité. Posons $u(x) = x^2 + 2x + 5$ pour tout réel x. Alors :

$$u(x) = (x+1)^2 + 4 \geq 4 > 0.$$

Dérivée. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u'(x) = 2x + 2$. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), $f = \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}.$$

2.

$p(x) = x\ln(4x+1)$, sur $\left]-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

INDICE

C'est un produit : dérive $x \mapsto \ln(4x+1)$ avec la dérivée de $\ln u$ (F12), puis applique la formule $(vw)' = v'w + vw'$.

CORRIGÉ

Dérivée de $x \mapsto \ln(4x+1)$. Soit $I = \left]-\frac{1}{4}, +\infty\right[$. Pour tout $x \in I$, $4x+1 > 0$. La fonction $x \mapsto 4x+1$ est dérivable, de dérivée 4. D'après la dérivée de $\ln u$ (F12), $x \mapsto \ln(4x+1)$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{4}{4x+1}$.

Dérivée du produit. Par produit, p est dérivable sur I.

Conclusion. Pour tout $x \in I$:

$$p'(x) = \ln(4x+1) + \frac{4x}{4x+1}.$$

3.

$r(x) = \ln|2x-5|$, sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$.

INDICE

Sur cet intervalle, quel est le signe de $2x-5$? Utilise la forme $\ln|u|$ de la dérivée logarithmique (F12).

CORRIGÉ

Hypothèses. Soit $J = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$ et posons $u(x) = 2x-5$. La fonction u est dérivable sur J et $u(x) < 0$ pour tout $x \in J$: u ne s'annule pas sur J.

Dérivée. D'après la dérivée logarithmique (F12), $r = \ln|u|$ est dérivable sur J et $r' = \frac{u'}{u}$. Pour tout $x \in J$:

$$r'(x) = \frac{2}{2x-5}.$$

Vérification. Sur J, $r(x) = \ln(5-2x)$, de dérivée $\frac{-2}{5-2x} = \frac{2}{2x-5}$: même résultat.

Conclusion. r est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$, $r'(x) = \frac{2}{2x-5}$.

Exercice 7

Reconnaître λu′/u

On considère les fonctions f, p et s définies par :

$$f(x) = \frac{6x}{3x^2+2},$$
$$p(x) = \frac{1}{4x-7},$$
$$s(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}.$$

1.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule la dérivée de $u(x) = 3x^2+2$ et compare-la au numérateur.

CORRIGÉ

Forme $\frac{u'}{u}$. Posons $u(x) = 3x^2+2$ pour tout réel x. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 6x$, et $u(x) \geq 2 > 0$. Ainsi $f = \frac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. D'après les primitives de $\frac{u'}{u}$ (F13), la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln(3x^2+2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer les primitives de p sur $I = \left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

INDICE

Avec $u(x) = 4x-7$, $u'(x) = 4$: écris $p = \frac{1}{4} \times \frac{u'}{u}$.

CORRIGÉ

Forme $\frac{u'}{u}$. Posons $u(x) = 4x-7$: u est dérivable sur I, $u'(x) = 4$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Pour tout $x \in I$:

$$p(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Conclusion. D'après les primitives de $\frac{u'}{u}$ (F13) et la linéarité, les primitives de p sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{4}\ln(4x-7) + k,$$

où k décrit $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la primitive P de p sur I telle que $P(2) = 3$.

INDICE

Le point 2 appartient à I. Calcule $\ln(4 \times 2 - 7)$.

CORRIGÉ

Le réel 2 appartient à I. D'après la question 2, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $P(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x - 7) + k$.

Or $4 \times 2 - 7 = 1$ et $\ln 1 = 0$, donc $P(2) = k$. La condition $P(2) = 3$ donne $k = 3$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$:

$$P(x) = \frac{1}{4}\ln(4x - 7) + 3.$$

4.

Déterminer une primitive de s sur $J =]1, +\infty[$.

INDICE

Factorise $x^2 + 2x - 3$ pour lire son signe sur J. Sa dérivée est $2x + 2 = 2(x + 1)$.

CORRIGÉ

Signe sur J. Posons $u(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Pour $x > 1$, les deux facteurs sont strictement positifs : $u(x) > 0$ sur J.

Forme $\dfrac{u'}{u}$. u est dérivable et $u'(x) = 2(x + 1)$. Donc $s = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$ sur J.

Conclusion. D'après les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ (F13) et la linéarité, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 2x - 3)$ est une primitive de s sur J.

Exercice 8

Logarithmes de base 2, 3, 4, 8 et 1/3

Rappel : pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $x > 0$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1.

Calculer $\log_2 32 + \log_3\left(\dfrac{1}{27}\right) - \log_4 8$.

INDICE

Écris chaque argument comme une puissance de 2 ou de 3, puis reviens à $\ln$ pour $\log_4 8$ (définition, F14).

CORRIGÉ

Puissances de la base. D'après les propriétés algébriques du logarithme de base a (F15) :

- $\log_2 32 = \log_2(2^5) = 5$;
- $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right) = \log_3(3^{-3}) = -3$.

Retour à $\ln$. D'après la définition de $\log_a$ (F14) et le logarithme d'une puissance (F04) :

$$\log_4 8 = \frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{3\ln 2}{2\ln 2} = \frac{3}{2}.$$

Conclusion. La somme vaut :

$$5 - 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x.$$

INDICE

Reviens à $\ln$ dans les deux membres (F14), avec $\ln 8 = 3\ln 2$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. D'après la définition de $\log_a$ (F14) et le logarithme d'une puissance (F04), $\ln 8 = 3\ln 2$:

$$\begin{aligned}\log_8 x &= \frac{\ln x}{\ln 8} = \frac{\ln x}{3\ln 2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\ln x}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{3}\log_2 x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\log_8 x = \dfrac{1}{3}\log_2 x$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$.

INDICE

Reviens à $\ln$: $\log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$. Quel est le signe de $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$?

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$: $D =]0, +\infty[$.

Signe de $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$. D'après le logarithme d'un inverse (F04), $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\ln 3$. Or $\ln 3 > 0$ car $3 > 1$ (F02). Donc $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$.

Résolution. Soit $x \in D$. On multiplie par $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$, ce qui change le sens, puis on utilise $2\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ (F04) :

$$\begin{aligned} & \frac{\ln x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} > 2 \\ \Leftrightarrow\ & \ln x < 2\ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \ln x < \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient de la stricte croissance de $\ln$ (F02).

Conclusion. $S = \left]0, \dfrac{1}{9}\right[$.

Exercice 9

Logarithme décimal et nombre de chiffres

On admet l'encadrement $0{,}301 < \log 2 < 0{,}302$. Un entier $N \geq 1$ a $p+1$ chiffres lorsque $10^p \leq N < 10^{p+1}$.

1.

Calculer $\log(0{,}001) + \log\sqrt{1000}$.

INDICE

Écris $0{,}001$ et $\sqrt{1000}$ comme des puissances rationnelles de 10.

CORRIGÉ

On a $0{,}001 = 10^{-3}$ et $\sqrt{1000} = \left(10^3\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{3}{2}}$.

D'après les propriétés algébriques du logarithme décimal (F15), $\log(10^r) = r$ pour tout rationnel r.

Conclusion.

$$\begin{aligned}&\log(0{,}001) + \log\sqrt{1000}\\ &= -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2.

Combien de chiffres l'entier 2^{40} possède-t-il ?

INDICE

Calcule un encadrement de $\log(2^{40}) = 40\log 2$, puis compare 2^{40} à deux puissances de 10 consécutives.

CORRIGÉ

Encadrement du logarithme. D'après le logarithme d'une puissance (F15), $\log(2^{40}) = 40\log 2$. L'encadrement donné fournit $12{,}04 < 40\log 2 < 12{,}08$, donc :

$$12 < \log(2^{40}) < 13.$$

Retour à l'entier. La fonction $\log$ est strictement croissante (F16, car $10 > 1$), et $\log(10^{12}) = 12$, $\log(10^{13}) = 13$. Donc $10^{12} < 2^{40} < 10^{13}$.

Conclusion. L'entier 2^{40} a 13 chiffres.

3.

Montrer que $\log 5 = 1 - \log 2$, puis déterminer le nombre de chiffres de 5^{20}.

INDICE

$5 = \dfrac{10}{2}$. Pour l'encadrement, attention : multiplier par -20 change le sens des inégalités.

CORRIGÉ

Expression de $\log 5$. D'après le logarithme d'un quotient (F15), $\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$.

Encadrement. Donc $\log(5^{20}) = 20 \log 5 = 20 - 20 \log 2$. De $6{,}02 < 20 \log 2 < 6{,}04$, on tire $13{,}96 < 20 - 20 \log 2 < 13{,}98$. Ainsi :

$$13 < \log(5^{20}) < 14.$$

Retour à l'entier. Comme $\log$ est strictement croissante (F16), $10^{13} < 5^{20} < 10^{14}$.

Conclusion. $\log 5 = 1 - \log 2$, et l'entier 5^{20} a 14 chiffres.

Exercice 10

Signe d'un logarithme, comparaison de deux logarithmes

Dans cet exercice, aucune valeur approchée n'est utilisée.

1.

Étudier le signe de $\ln(2x-1)$ sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

INDICE

$\ln X$ est négatif quand $0<X<1$, nul quand $X=1$, positif quand $X>1$ (F02, signe de $\ln$).

CORRIGÉ

Soit $x>\dfrac{1}{2}$: alors $2x-1>0$. D'après le signe de $\ln$ (F02) :

- $\ln(2x-1)<0 \Leftrightarrow 0<2x-1<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$;
- $\ln(2x-1)=0 \Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1$;
- $\ln(2x-1)>0 \Leftrightarrow 2x-1>1 \Leftrightarrow x>1$.

Conclusion. $\ln(2x-1)$ est strictement négatif sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, nul en 1 et strictement positif sur $]1,+\infty[$.

2.

Étudier le signe de $(x-3)\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Étudie le signe de chaque facteur. $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ change de signe quand $\dfrac{x}{2}=1$.

CORRIGÉ

Signe de $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Pour $x>0$, $\dfrac{x}{2}>0$. D'après le signe de $\ln$ (F02), $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est strictement négatif sur $]0,2[$, nul en 2 et strictement positif sur $]2,+\infty[$.

Tableau de signes.

x	0		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion. Le produit est strictement positif sur $]0,2[$ et sur $]3,+\infty[$, strictement négatif sur $]2,3[$, et nul en 2 et en 3.

3.

Comparer $3\ln 2$ et $2\ln 3$.

INDICE

Écris chaque nombre comme le logarithme d'un entier (logarithme d'une puissance, F04).

CORRIGÉ

D'après le logarithme d'une puissance (F04), $3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$ et $2\ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$.

Comme $0 < 8 < 9$ et que $\ln$ est strictement croissante (F02), $\ln 8 < \ln 9$.

Conclusion. Donc $3\ln 2 < 2\ln 3$.