BURHAN

Fonctions logarithmiques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-logarithmiques/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 1

Une fonction qui transforme les produits en sommes

Au chapitre des primitives, tu as rangé les puissances dans un tableau. Pour tout entier relatif $n \neq -1$, une primitive de $x \mapsto x^n$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Pour $n = -1$, cette formule divise par 0 : la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ manque.

Pourtant, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$: elle y a des primitives. Appelons L celle qui s'annule en 1. On sait seulement que $L(1) = 0$ et que :

$$\forall x > 0, \quad L'(x) = \frac{1}{x}.$$

Devine : Un écart surprenant

Pour $x > 0$, la fonction $x \mapsto L(5x)$ a pour dérivée $5 \times \dfrac{1}{5x} = \dfrac{1}{x}$, comme L. D'après toi, que vaut $L(5x) - L(x)$?

A. 0, pour tout réel x strictement positif.

Faux.

Deux fonctions de même dérivée peuvent différer d'une constante non nulle : en $x = 1$, l'écart vaut $L(5)$.

B. Un nombre qui ne dépend pas de x.

Juste.

Juste : sur un intervalle, deux fonctions de même dérivée diffèrent d'une constante.

C. $4L(x)$, pour tout réel x strictement positif.

Faux.

Dérive $x \mapsto 4L(x)$: tu obtiens $\dfrac{4}{x}$, pas 0.

D. $L(4x)$, pour tout réel x strictement positif.

Faux.

La dérivée de $x \mapsto L(4x)$ vaut $\dfrac{1}{x}$, pas 0 : ce n'est pas une constante.

Correction

La fonction $x \mapsto L(5x) - L(x)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$: elle y est constante. En $x = 1$, elle vaut $L(5) - L(1) = L(5)$.

Donc, pour tout $x > 0$:

$$L(5x) = L(x) + L(5).$$

Un **produit** dans la variable devient une **somme** des images. Cette fonction L s'appelle le logarithme népérien.

Dans ce chapitre, tu vas construire cette fonction, puis **démontrer** ses propriétés une à une.

Tu sauras résoudre des équations, calculer des limites et étudier des fonctions qui la contiennent.

À part l'existence de la fonction, rien de nouveau n'est admis : chaque propriété se démontre à partir de la définition et des théorèmes des chapitres précédents.

La fonction ln, primitive de 1/x

La primitive qui manquait

Petit rappel. Au chapitre des primitives, tu as vu deux résultats.

- Une fonction continue sur un intervalle y admet des primitives : ce théorème y est admis.
- Si x_0 est un point de cet intervalle, une seule primitive prend une valeur donnée en x_0 : cela, tu l'as démontré.

Devine : Le sens de variation

Soit L la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. D'après toi, comment varie L sur $]0, +\infty[$?

A. Elle est strictement croissante.

Juste.

Juste : sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

B. Elle est strictement décroissante.

Faux.

Sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$: regarde son signe.

C. Elle croît, puis décroît après 1.

Faux.

Sa dérivée ne change pas de signe : $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.

D. Elle est constante, car $L(1) = 0$.

Faux.

Une valeur en un point ne fixe pas le sens de variation : c'est le signe de la dérivée qui compte.

Correction

Pour tout $x > 0$, $L'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

Sur l'**intervalle** $]0, +\infty[$, une dérivée strictement positive donne une fonction strictement croissante. Donc L est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La propriété qui suit le rédige proprement.

La définition

Définition : Fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$: elle y admet des primitives, et une seule d'entre elles s'annule en 1 (chapitre des primitives).

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, $\ln 1 = 0$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque : d'où vient ln

L'existence de $\ln$ repose sur l'existence des primitives d'une fonction continue, admise au chapitre des primitives. L'unicité de la primitive qui s'annule en 1 y a été démontrée.

Tout le reste de ce chapitre se démontre à partir de cette définition et des théorèmes des chapitres précédents.

En clair. $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$: $\ln 0$ et $\ln(-2)$ n'ont aucun sens. On retient trois faits :

- $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$;
- $\ln 1 = 0$;
- pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Vérifie : Un logarithme qui existe

Laquelle de ces écritures a un sens ?

A. $\ln 0$

Faux.
0 n'est pas strictement positif : $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$ seulement.

B. $\ln(-3)$

Faux.
$-3 < 0$: ce logarithme n'existe pas.

C. $\ln(1 - 2)$

Faux.
$1-2=-1<0$: calcule l'argument avant de conclure.

D. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Juste.
Juste : $\frac{1}{3}>0$, donc ce logarithme existe.

Correction
Le nombre $\ln t$ existe si et seulement si $t>0$.

Parmi les quatre arguments, 0, -3, $1-2=-1$ et $\frac{1}{3}$, seul $\frac{1}{3}$ est strictement positif.

Croissante, preuve à l'appui

L'activité t'a fait prévoir le sens de variation de $\ln$. Mais comparer $\ln a$ et $\ln b$ demande plus : une **équivalence**, dans les deux sens.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve lit le signe de $\ln'$ sur un intervalle. Elle obtient ensuite un sens par croissance, l'autre par contraposée.

Propriété : Variations, comparaison et signe de ln

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Pour tous réels $a>0$ et $b>0$:

- $\ln a=\ln b$ si et seulement si $a=b$;
- $\ln a<\ln b$ si et seulement si $a<b$.

En particulier, pour tout $x>0$: $\ln x<0$ si et seulement si $0<x<1$; $\ln x=0$ si et seulement si $x=1$; $\ln x>0$ si et seulement si $x>1$.

Démonstration

Étape 1. D'après F01, $\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc continue (dérivabilité et continuité). Pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$; l'intervalle $]0,+\infty[$ et le signe de la dérivée donnent : $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Étape 2. Soit $a>0$ et $b>0$. Si $a<b$, alors $\ln a<\ln b$ par stricte croissance. Réciproquement, si $a\geq b$, alors $\ln a\geq\ln b$; par contraposée, $\ln a<\ln b$ entraîne $a<b$.

Étape 3. Si $a\neq b$, l'un est strictement inférieur à l'autre, donc $\ln a\neq\ln b$ (étape 2). Ainsi $\ln a=\ln b$ si et seulement si $a=b$.

Étape 4. On applique les étapes 2 et 3 avec $b=1$, sachant que $\ln 1=0$ (F01).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le signe de la dérivée sur un **intervalle** donne la stricte croissance. Celle-ci ne donne qu'un sens : $a < b$ entraîne $\ln a < \ln b$.

La réciproque vient de la **contraposée** du même fait.

Enfin, comparer x à 1 revient à comparer $\ln x$ à $\ln 1 = 0$: c'est le signe de $\ln x$.

Vérifie : La réciproque

Dans l'étape 2 de la preuve, quel argument montre que $\ln a < \ln b$ entraîne $a < b$?

A. Le calcul de la dérivée $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Faux.

Ce calcul sert à l'étape 1, pour obtenir la croissance ; il ne donne pas la réciproque.

B. La croissance de $\ln$, appliquée telle quelle.

Faux.

Elle donne seulement le sens « $a < b$ entraîne $\ln a < \ln b$ ».

C. Le fait que $\ln 1 = 0$, donné par la définition.

Faux.

Cette valeur sert à l'étape 4, pour le signe de $\ln x$.

D. La contraposée de « $a \geq b$ entraîne $\ln a \geq \ln b$ ».

Juste.

Juste : si $a \geq b$, alors $\ln a \geq \ln b$; donc $\ln a < \ln b$ force $a < b$.

Correction

La croissance donne : si $a \geq b$, alors $\ln a \geq \ln b$.

La contraposée de cette implication s'écrit : si $\ln a < \ln b$, alors $a < b$. C'est le sens réciproque de l'équivalence.

Exemple : comparer deux logarithmes

Énoncé. Compare $\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{7}{10}\right)$, puis donne leur signe.

Comparer les nombres. $\dfrac{5}{7} = \dfrac{50}{70}$ et $\dfrac{7}{10} = \dfrac{49}{70}$, donc $\dfrac{7}{10} < \dfrac{5}{7}$. Les deux nombres sont strictement positifs.

Conclure. Par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{7}{10}\right) < \ln\left(\frac{5}{7}\right).$$

De plus, les deux nombres sont dans $]0,1[$: leurs logarithmes sont strictement négatifs.

Le rôle de l'intervalle

Exemple : Contre-exemple : sans intervalle, pas de croissance

La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, strictement positive sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

Pourtant $-1<1$, l'image de -1 vaut 1 et celle de 1 vaut -1 : l'ordre s'inverse.

Ce domaine n'est pas un intervalle. La preuve de la croissance de $\ln$ utilise donc vraiment l'intervalle $]0,+\infty[$.

À toi : Rédige une preuve de signe

Rédige la preuve de : pour tout réel $x>0$, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)<0$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le signe de $\ln$ se lit en comparant le nombre à 1.
Indice 2
Pour $x>0$, compare x et $x+1$, puis divise par $x+1>0$.
Indice 3
Point délicat : vérifie aussi que $\dfrac{x}{x+1}>0$, sinon le logarithme n'existe pas.

Réponse
« Soit $x>0$.

Existence. On a $x+1>0$, donc $\dfrac{x}{x+1}>0$: le logarithme existe.

Position par rapport à 1. De plus $x<x+1$. En divisant par $x+1>0$, on obtient $\dfrac{x}{x+1}<1$.

Conclusion. Or $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$. Donc, pour tout réel $x>0$, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)<0$. »

La relation fondamentale

Une somme cachée

Devine : Trois valeurs approchées

On donne $\ln 2\approx 0{,}693$, $\ln 5\approx 1{,}609$ et $\ln 10\approx 2{,}303$. Quelle relation ces valeurs suggèrent-elles ?

A. $\ln 10=\ln 2\times\ln 5$
Faux.
$0{,}693\times 1{,}609\approx 1{,}115$: on est loin de $2{,}303$.

B. $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$

Juste.

Juste : $0{,}693 + 1{,}609 = 2{,}302$, à l'arrondi près.

C. $\ln 10 = 5 \ln 2$

Faux.

$5 \times 0{,}693 = 3{,}465$: c'est trop grand.

D. $\ln 10 = 2 \ln 5$

Faux.

$2 \times 1{,}609 = 3{,}218$: c'est trop grand.

Correction

Les valeurs approchées suggèrent $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$, avec $10 = 2 \times 5$. L'activité d'ouverture le laissait prévoir : $L(5x) = L(x) + L(5)$.

Une valeur approchée ne prouve rien. La relation est démontrée juste après, pour tous les réels strictement positifs.

Pourquoi est-ce vrai ? Au début du chapitre, tu as comparé $x \mapsto L(5x)$ et L : même dérivée, donc un écart constant.

La preuve fait la même chose avec un réel $b > 0$ quelconque à la place de 5. Elle calcule ensuite la constante en $x = 1$.

Théorème : Relation fondamentale

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $b > 0$ fixé. On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(bx) - \ln x$. La fonction $x \mapsto bx$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$; par la dérivée d'une composée et FO1, $x \mapsto \ln(bx)$ y est dérivable, de dérivée $x \mapsto b \times \dfrac{1}{bx} = \dfrac{1}{x}$.

Étape 2. Donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0$. Comme $]0, +\infty[$ est un **intervalle**, g y est constante (signe de la dérivée et variations).

Étape 3. Cette constante vaut $g(1) = \ln b - \ln 1 = \ln b$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\ln(bx) = \ln x + \ln b$. Avec $x = a$, on obtient $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On fabrique une **fonction auxiliaire** g de dérivée nulle. Sur un **intervalle**, elle est constante ; on calcule la constante en un point bien choisi, ici $x = 1$.

Ce geste resservira : pour montrer qu'une expression ne dépend pas de x, on la dérive.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve, à quel moment sert le fait que $]0, +\infty[$ est un **intervalle** ?

A. Pour dériver la fonction $x \mapsto \ln(bx)$.

Faux.

La dérivée de $x \mapsto \ln(bx)$ se calcule en chaque point : ce n'est pas là que sert le fait que $]0, +\infty[$ est d'un seul tenant.

B. Pour calculer la valeur $g(1) = \ln b$.

Faux.

Ce calcul utilise seulement $\ln 1 = 0$.

C. Pour passer de $g' = 0$ à « g est constante ».

Juste.

Juste : une dérivée nulle donne une fonction constante seulement sur un intervalle.

D. Pour remplacer x par a à la toute fin.

Faux.

Ce remplacement demande seulement $a > 0$.

Correction

Les calculs de dérivée se font en chaque point.

L'étape 2 utilise : « une fonction dérivable sur un **intervalle**, de dérivée nulle, y est constante ».

Sur une réunion de deux intervalles, une telle fonction peut prendre deux valeurs différentes.

Quand l'appliquer

Exemple : décomposer un logarithme

Avec $12 = 2 \times 6$ puis $6 = 2 \times 3$, la relation appliquée deux fois donne :

$$\begin{aligned} \ln 12 &= \ln 2 + \ln 6 \\ &= \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 \\ &= 2\ln 2 + \ln 3. \end{aligned}$$

Chaque facteur est strictement positif : c'est l'hypothèse de la relation, vérifiée avant chaque usage.

Exemple : Contre-exemple : des facteurs négatifs

Soit $x = -1$. Le produit $x(x-1) = (-1) \times (-2) = 2$ est strictement positif, donc $\ln\big(x(x-1)\big) = \ln 2$ existe. Mais $\ln x$ et $\ln(x-1)$ n'existent pas.

L'égalité $\ln\big(x(x-1)\big) = \ln x + \ln(x-1)$ vaut seulement si $x > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$.

Le piège de la somme

Attention : un logarithme de somme ne se découpe pas

✗ « $\ln(2+3) = \ln 2 + \ln 3$ ».

✓ $\ln 2 + \ln 3 = \ln(2 \times 3) = \ln 6$, alors que $\ln(2+3) = \ln 5$. Or $5 \neq 6$, donc $\ln 5 \neq \ln 6$ par stricte croissance.

La relation transforme un **produit** en somme ; aucune formule ne découpe $\ln(a+b)$.

Trouve l'erreur : Une seule écriture juste

Pour $x > 0$, laquelle de ces écritures de $\ln(x^2 + 3x)$ est juste ?

A. $\ln(x^2) + \ln(3x)$

Faux.
$x^2 + 3x$ est une somme : on ne la découpe pas ainsi.

B. $\ln x \times \ln(x+3)$

Faux.
La relation donne une somme de logarithmes, pas un produit.

C. $\ln x + \ln(x+3)$

Juste.
Juste : $x^2 + 3x = x(x+3)$, avec $x > 0$ et $x + 3 > 0$.

D. $\ln(x^2) + \ln 3 + \ln x$

Faux.
Tu as découpé la somme $x^2 + 3x$ comme un produit.

Correction
On factorise d'abord : $x^2 + 3x = x(x+3)$. Pour $x > 0$, les deux facteurs sont strictement positifs.

La relation fondamentale donne alors, pour tout $x > 0$:

$$\ln(x^2 + 3x) = \ln x + \ln(x+3).$$

À toi : Rédige une égalité

Rédige la preuve de : pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^2 + 2x) - \ln x = \ln(x + 2)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Factorise $x^2 + 2x$.
Indice 2
Vérifie le signe de chaque facteur pour $x > 0$, puis applique la relation fondamentale.
Indice 3
Point délicat : termine en isolant $\ln(x + 2)$, et rappelle pour quels x l'égalité vaut.

Réponse
« Soit $x > 0$.

Factoriser. On a $x^2 + 2x = x(x + 2)$, avec $x > 0$ et $x + 2 > 0$.

Appliquer la relation. La relation fondamentale donne $\ln(x^2 + 2x) = \ln x + \ln(x + 2)$.

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^2 + 2x) - \ln x = \ln(x + 2)$. »

Inverse, quotient, puissances

Inverse, quotient, puissances

Devine : Le logarithme d'un inverse

Sachant que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$, que vaut $\ln\left(\frac{1}{7}\right)$?

A. $\frac{1}{\ln 7}$
Faux.
Teste avec la relation : $\ln 7 + \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \ln 1 = 0$.

B. $-\ln 7$
Juste.
Juste : $\ln 7 + \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \ln\left(7 \times \frac{1}{7}\right) = \ln 1 = 0$.

C. $\ln 7 - 1$
Faux.
Rien ne fait apparaître 1 : écris plutôt $7 \times \frac{1}{7} = 1$.

D. 0
Faux.
C'est $\ln 1$ qui vaut 0 ; or $\frac{1}{7} \neq 1$.

Correction
On applique la relation à 7 et $\frac{1}{7}$, tous deux strictement positifs :

$$\ln 7 + \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \ln 1 = 0.$$

Donc $\ln\left(\frac{1}{7}\right) = -\ln 7$.

Une puissance entière est un produit répété. Pour tout $a > 0$:

$$\begin{aligned}\ln(a^3) &= \ln a + \ln a + \ln a \\ &= 3\ln a.\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai pour tout exposant ? Pour les entiers naturels, une récurrence répète la relation fondamentale. Pour un exposant rationnel $\frac{p}{q}$, on se ramène aux entiers.

Propriété : Logarithme d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Soit $a > 0$ et $b > 0$.

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- Pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln a$.
- Pour tout rationnel r, $\ln(a^r) = r\ln a$; en particulier $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Démonstration

Étape 1. F03 avec $a = \frac{1}{b}$ donne $\ln 1 = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln b$, et $\ln 1 = 0$. Puis $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Étape 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. Initialisation : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$. Hérédité : si $\ln(a^n) = n\ln a$, alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = n\ln a + \ln a$ (F03). Conclusion : l'égalité vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étape 3. Si $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors $a^n = \frac{1}{a^m}$ et les étapes 1 et 2 donnent $\ln(a^n) = -\ln(a^m) = -m\ln a = n\ln a$.

Étape 4. Soit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (le cas $r = 0$ est l'étape 2). Par définition d'une puissance rationnelle, $c = a^r = \sqrt[q]{a^p} > 0$ vérifie $c^q = a^p$. Les étapes 2 et 3 donnent $q\ln c = p\ln a$, donc $\ln c = r\ln a$. Enfin $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout découle de la relation fondamentale.

- L'inverse vient de $b \times \frac{1}{b} = 1$.
- Les exposants entiers naturels se traitent par **récurrence**, les entiers négatifs par l'inverse.
- Pour $r = \frac{p}{q}$, on pose $c = a^r$: l'égalité $c^q = a^p$ ne fait intervenir que des exposants entiers.

Vérifie : L'argument de l'étape 4

À l'étape 4 de la preuve, pourquoi a-t-on $\ln(c^q) = q \ln c$?

A. Par la définition de $\ln$ comme primitive.

Faux.

La définition donne $\ln 1 = 0$ et $\ln' = \dfrac{1}{x}$, rien sur les puissances.

B. Par l'étape 3, car q est négatif.

Faux.

q est un entier naturel non nul : il est positif.

C. Par l'étape 2, car q est un entier naturel.

Juste.

Juste : $c > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$, c'est le cas démontré par récurrence.

D. Par le résultat sur les exposants rationnels.

Faux.

C'est ce qu'on démontre : l'utiliser serait tourner en rond.

Correction

Le réel $c = a^r$ est strictement positif et q est un entier naturel non nul. L'étape 2 s'applique donc : $\ln(c^q) = q \ln c$.

De même, $\ln(a^p) = p \ln a$ par les étapes 2 ou 3, selon le signe de p.

Simplifier, et le piège du carré

Exemple **: Exemple guidé : tout écrire avec ln 2 et ln 3**

Énoncé. Exprime $A = \ln 72 - 2\ln 3 + \ln\left(\dfrac{1}{16}\right)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

Décomposer. $72 = 2^3 \times 3^2$ et $16 = 2^4$: ces nombres sont strictement positifs.

Calculer. Par les règles de calcul :

$$\begin{aligned} A &= 3\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 3 - 4\ln 2 \\ &= -\ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = -\ln 2$.

Exemple **: des racines carrées**

Énoncé. Simplifie $B = \ln\sqrt{18} + \ln\sqrt{2}$.

Calcul. Pour tout $a > 0$, $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$. Donc :

$$B = \frac{1}{2}\ln 18 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 36$$
$$= \frac{1}{2} \times 2\ln 6 = \ln 6.$$

Attention : ln(x²) et 2 ln x n'ont pas le même domaine

✗ « Pour tout $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$. »

✓ Pour tout $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$, car $x^2 = |x|^2$ et $|x| > 0$.

Avec $x = -3$: $\ln\left((-3)^2\right) = \ln 9 = 2\ln 3$, alors que $2\ln(-3)$ n'existe pas.

La fonction $x \mapsto \ln(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto 2\ln x$ seulement sur $]0, +\infty[$.

Vérifie : Un carré de négatif

Soit $x < 0$. Laquelle de ces égalités est juste ?

A. $\ln(x^2) = 2\ln x$

Faux.

$\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$.

B. $\ln(x^2) = -2\ln x$

Faux.

Même défaut : $\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$, quel que soit le signe devant.

C. $\ln(x^2) = \ln 2 + \ln x$

Faux.

x^2 est un carré, pas un produit par 2 ; et $\ln x$ n'existe pas.

D. $\ln(x^2) = 2\ln(-x)$

Juste.

Juste : $x^2 = (-x)^2$ avec $-x > 0$.

Correction

Pour $x < 0$, le réel $-x$ est strictement positif et $x^2 = (-x)^2$.

La règle des puissances s'applique à $-x$: $\ln(x^2) = 2\ln(-x)$. C'est la formule $2\ln|x|$, car $|x| = -x$.

À toi : Rédige un calcul exact

Rédige le calcul de $C = \ln 48 - \ln\left(\frac{9}{8}\right)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Décompose 48, 9 et 8 en produits de puissances de 2 et de 3.

Indice 2

Applique la règle du quotient, puis celle des puissances, à chaque logarithme.

Indice 3

Point délicat : le signe moins porte sur tout $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

Réponse

« **Décomposer.** On a $48 = 2^4 \times 3$, $9 = 3^2$ et $8 = 2^3$. Donc :

- $\ln 48 = 4\ln 2 + \ln 3$;
- $\ln\left(\frac{9}{8}\right) = 2\ln 3 - 3\ln 2$.

Calculer.

$$\begin{aligned} C = {} & 4\ln 2 + \ln 3 \\ & - 2\ln 3 + 3\ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Donc $C = 7\ln 2 - \ln 3$. »

Équations et inéquations

Le domaine d'abord

Devine : Une racine suspecte

Le réel -3 vérifie $x^2 = 9$. Est-il solution de l'équation $2\ln x = \ln 9$?

A. Oui, car $2\ln x = \ln(x^2)$.

Faux.

Cette égalité suppose $x > 0$: pour $x = -3$, le membre $2\ln x$ n'existe pas.

B. Non, car $\ln(-3)$ n'existe pas.

Juste.

Juste : un nombre hors du domaine n'est jamais solution.

C. Oui, car $(-3)^2 = 9$.

Faux.

C'est vrai pour l'équation $x^2 = 9$, pas pour l'équation donnée, qui exige $x > 0$.

D. Non, car $\ln 9$ est négatif.

Faux.

$9 > 1$, donc $\ln 9 > 0$; et ce n'est pas la raison.

Correction

L'équation $2\ln x = \ln 9$ n'a de sens que pour $x > 0$: son domaine est $]0, +\infty[$. Le réel -3 n'y appartient pas, donc il n'est pas solution.

Sur $]0, +\infty[$, l'équation équivaut à $\ln(x^2) = \ln 9$, puis à $x^2 = 9$: sa seule solution est 3.

Pour tous réels $A > 0$ et $B > 0$:

$$\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B.$$

Cette équivalence exige $A > 0$ et $B > 0$. Le domaine n'est donc pas une formalité : il dit où les transformations sont permises.

On le détermine **avant** tout calcul, et on y revient à la fin.

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation avec ln

1. **Domaine.** Écris une condition par logarithme : chaque expression sous un $\ln$ est strictement positive. Résous ces conditions : c'est D.
2. **Transformer.** Sur D, ramène l'équation à $\ln A = \ln B$, ou l'inéquation à $\ln A < \ln B$, avec les règles de calcul.
3. **Conclure.** Par stricte croissance de $\ln$: $A = B$, ou $A < B$, sans changer le sens.
4. **Intersecter.** Garde les solutions qui sont dans D, puis écris l'ensemble S.

Rédaction attendue. « On résout dans $\mathbb{R}$. L'équation a un sens si et seulement si … ; donc $D = \ldots$. Pour $x \in D$: … Donc $S = \ldots$. »

Exemple : Exemple guidé : une équation

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\ln(x+4) + \ln(x-1) = \ln(5x+4)$.

Domaine. Il faut $x + 4 > 0$, $x - 1 > 0$ et $5x + 4 > 0$, soit $x > -4$, $x > 1$ et $x > -\dfrac{4}{5}$. Donc $D =]1, +\infty[$.

Transformer. Pour $x \in D$, l'équation équivaut à $\ln\big((x+4)(x-1)\big) = \ln(5x+4)$, puis à :

$$\begin{aligned} &(x+4)(x-1) = 5x + 4 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 3x - 4 = 5x + 4 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 - 2x - 8 = 0. \end{aligned}$$

Conclure. Les racines sont 4 et -2. Seul 4 est dans D. Donc $S = \{4\}$.

Une inéquation

Exemple : Exemple guidé : une inéquation

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\ln(3-x) \leq \ln(2x+9)$.

Domaine. Il faut $3 - x > 0$ et $2x + 9 > 0$, soit $-\dfrac{9}{2} < x < 3$. Donc $D = \left]-\dfrac{9}{2}, 3\right[$.

Transformer. Sur D, $\ln$ est strictement croissante, donc l'inéquation équivaut à $3 - x \leq 2x + 9$, soit $x \geq -2$.

Intersecter. On garde les solutions qui sont dans D :

$$S = D \cap [-2, +\infty[= [-2, 3[\,.$$

Vérifie : L'ensemble des solutions

Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $\ln(2x - 1) < \ln x$?

A. $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

Juste.

Juste : le domaine est $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $2x - 1 < x$ donne $x < 1$.

B. $]-\infty, 1[$

Faux.

Tu as oublié le domaine : $2x - 1 > 0$ impose $x > \frac{1}{2}$.

C. $]1, +\infty[$

Faux.

$\ln$ est croissante : le sens de l'inégalité ne change pas.

D. $]0, 1[$

Faux.

Il faut aussi $2x - 1 > 0$: pour $x = \frac{1}{4}$, $\ln(2x - 1)$ n'existe pas.

Correction

Domaine. $2x - 1 > 0$ et $x > 0$, donc $D = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Transformer. Sur D, par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $2x - 1 < x$, soit $x < 1$.

Conclusion. $S = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Attention : une racine du calcul n'est pas toujours une solution

✗ « $\ln(x - 5) = \ln(1 - x)$ équivaut à $x - 5 = 1 - x$, donc $S = \{3\}$. »

✓ Le domaine exige $x > 5$ et $x < 1$: il est vide. Pour $x = 3$, $x - 5 = -2$ et $\ln(-2)$ n'existe pas. Donc $S = \varnothing$.

Chaque valeur trouvée se confronte au domaine.

Rédiger, comme à l'examen

À toi : Rédige une résolution complète

Rédige la résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(x^2-4) \leq \ln(3x)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par le domaine : deux conditions, $x^2-4>0$ et $3x>0$.
Indice 2
Sur le domaine, la stricte croissance de $\ln$ donne une inéquation du second degré : factorise x^2-3x-4.
Indice 3
Point délicat : intersecte l'intervalle trouvé avec le domaine, en regardant chaque borne.

Réponse
« On résout dans $\mathbb{R}$.

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $x^2-4>0$ et $3x>0$. Or $x^2-4>0$ équivaut à $x<-2$ ou $x>2$; avec $x>0$, on obtient $D=]2,+\infty[$.

Transformer. Pour $x \in D$, par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $x^2-4 \leq 3x$, soit $x^2-3x-4 \leq 0$.

Signe. Or $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$: ce trinôme est négatif ou nul sur $[-1,4]$.

Conclusion. Donc $S=]2,+\infty[\cap[-1,4]=]2,4]$. »

Remarque : Coin examen : « résoudre dans $\mathbb{R}$ »

La consigne « résoudre dans $\mathbb{R}$ » attend trois temps visibles :

- le domaine, écrit avec ses conditions ;
- une chaîne d'équivalences, chacune justifiée (relation fondamentale, stricte croissance de $\ln$) ;
- une phrase finale qui donne l'ensemble S.

Une solution juste sans domaine reste une rédaction incomplète.

Limites aux bornes et nombre e

Jusqu'où monte ln ?

Devine : Dépasser 100

La courbe de $\ln$ s'aplatit quand x grandit. On admet que $0{,}69<\ln 2<0{,}7$. D'après toi, $\ln x$ peut-il dépasser 100 ?

A. Non : une courbe qui s'aplatit reste sous une valeur fixe.

Faux.
S'aplatir ne veut pas dire rester bornée : regarde $\ln(2^N) = N\ln 2$.

B. Oui, dès que x dépasse 100.
Faux.
Non : $101 < 2^7$, donc $\ln 101 < 7\ln 2 < 5$.

C. On ne peut pas le savoir sans calculatrice.
Faux.
Les règles de calcul suffisent : $\ln(2^N) = N\ln 2$.

D. Oui : pour $x > 2^{145}$, $\ln x > 145 \times 0{,}69$.
Juste.
Juste : $145 \times 0{,}69 = 100{,}05$, et $\ln$ est strictement croissante.

Correction
Soit N un entier naturel non nul. Alors $\ln(2^N) = N\ln 2$, et $N\ln 2 > 0{,}69\,N$, car $\ln 2 > 0{,}69$. Avec $N = 145$, on obtient $\ln(2^{145}) > 100{,}05$.

Par stricte croissance, $\ln x > 100$ pour tout $x > 2^{145}$.

Le même raisonnement marche pour n'importe quel seuil à la place de 100.

Pourquoi est-ce vrai ? L'activité contient l'idée : pour dépasser un seuil A, il suffit de dépasser une puissance de 2 bien choisie. C'est la définition d'une limite égale à $+\infty$.

En 0, on se ramène à $+\infty$ en passant à l'inverse.

Ensuite, la continuité, la stricte croissance et ces deux limites montrent que $\ln$ prend chaque valeur réelle une seule fois.

Limites aux bornes, bijection

Propriété : Limites de ln en 0 et en +∞

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Démonstration

Étape 1. Comme $2 > 1$, $\ln 2 > 0$ (F02), et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\ln(2^N) = N\ln 2$ (F04).

Étape 2. Soit $A > 0$. Il existe un entier naturel N tel que $N > \dfrac{A}{\ln 2}$ (tout réel est majoré par un entier). Pour tout $x > 2^N$, la stricte croissance de $\ln$ (F02) donne $\ln x > \ln(2^N) = N\ln 2 > A$. Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $B = 2^N$ tel que $x > B$ entraîne $\ln x > A$: c'est la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Étape 3. Pour tout $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ (F04). Quand $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \to +\infty$ (limite d'une fonction composée et étape 2), et $\ln x \to -\infty$.

Exemple : deux limites sans forme indéterminée

En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

En $+\infty$: $x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ln x) = +\infty$.

La limite en 0 se prend **à droite** : $\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$.

Théorème : Bijection de]0, +∞[sur $\mathbb{R}$; le nombre e

La fonction $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: pour tout réel y, l'équation $\ln x = y$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

En particulier, il existe un unique réel strictement positif, noté e, tel que $\ln e = 1$. Pour tout rationnel r, $\ln(e^r) = r$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (F02). L'image de cet intervalle est donc l'intervalle d'extrémités $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$ (image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone), soit $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après F05.

Étape 2. Le théorème de la bijection donne : pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = y$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Étape 3. Avec $y = 1$, on obtient l'existence et l'unicité de e. Pour r rationnel, $e^r > 0$ et F04 donne $\ln(e^r) = r \ln e = r$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour la limite en $+\infty$, on revient à la **définition** : à chaque seuil A, on associe $B = 2^N$. La limite en 0^+ s'en déduit en passant à l'inverse.

Ensuite, continuité, stricte monotonie et limites aux bornes donnent l'image d'un intervalle, puis la bijection.

Le nombre e est l'unique antécédent de 1.

Vérifie : Un seul nombre e

Dans la preuve, quel argument assure qu'il n'existe **qu'un seul** réel $x > 0$ tel que $\ln x = 1$?

A. La continuité de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Faux.

La continuité, avec les limites, donne l'existence d'une solution, pas son unicité.

B. La limite de $\ln$ en $+\infty$.

Faux.

Elle sert à montrer que l'image est $\mathbb{R}$ tout entier.

C. La stricte croissance de $\ln$.

Juste.

Juste : deux réels distincts ont des images distinctes.

D. Le fait que $\ln 1 = 0$.

Faux.

Cette valeur dit seulement que $e \neq 1$.

Correction

Existence. Elle vient de la continuité et des limites aux bornes : l'image de $]0, +\infty[$ est $\mathbb{R}$.

Unicité. Elle vient de la stricte croissance : si $x_1 < x_2$, alors $\ln x_1 < \ln x_2$, donc x_1 et x_2 n'ont pas la même image.

Le nombre e au travail

Remarque : une valeur approchée de e

On donne la valeur numérique $e \approx 2{,}718$: elle sert seulement à situer e, et aucune preuve ne l'utilise. Elle place e entre 2 et 3 : $2 < e < 3$.

Dans ce chapitre, seules les puissances rationnelles de e sont écrites, comme e^2 ou $e^{-\frac{1}{2}}$. Pour tout rationnel r, $\ln(e^r) = r$.

Exemple : résoudre avec le nombre e

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\ln(2x - 1) = -2$.

Domaine. $2x - 1 > 0$, donc $D = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Transformer. $-2 = \ln(e^{-2})$. Sur D, l'équation équivaut à $2x - 1 = e^{-2}$, soit $x = \dfrac{1 + e^{-2}}{2}$.

Conclure. Ce nombre est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, car $e^{-2} > 0$. Donc $S = \left\{\dfrac{1 + e^{-2}}{2}\right\}$.

Un second membre négatif n'empêche pas l'existence d'une solution : tout réel a un antécédent par $\ln$.

Vérifie : Une racine de e

Que vaut $\ln \sqrt{e}$?

A. $\dfrac{1}{2}$

Juste.

Juste : $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ et $\ln(e^r) = r$.

B. 1

Faux.

$\sqrt{e} \neq e$: la racine carrée change la valeur.

C. $\dfrac{e}{2}$

Faux.

Le logarithme d'une puissance de e donne un exposant, pas une fraction de e.

D. $\sqrt{\ln e}$

Faux.

$\ln$ ne passe pas sous la racine ; ici $\sqrt{\ln e} = 1$, ce qui est faux.

Correction

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, avec $\dfrac{1}{2}$ rationnel. Donc $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2} \ln e = \dfrac{1}{2}$.

À toi : Rédige avec le nombre e

Rédige la résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(3x) \leq 2$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Domaine : $3x > 0$.

Indice 2

Écris $2 = \ln(e^2)$, puis utilise la stricte croissance de $\ln$.

Indice 3

Point délicat : intersecte avec le domaine ; la borne 0 est exclue.

Réponse

« On résout dans $\mathbb{R}$.

Domaine. L'inéquation a un sens si et seulement si $3x > 0$: $D =]0, +\infty[$.

Transformer. Pour $x \in D$, $2 = \ln(e^2)$. Par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à $3x \leq e^2$, soit $x \leq \dfrac{e^2}{3}$.

Conclusion. Donc $S = \left]0, \dfrac{e^2}{3}\right]$. »

Croissances comparées

Sous la tangente ?

Devine : Deux essais

On donne $\ln 2 \approx 0{,}69$. Compare $\ln 2$ et $2-1$, puis $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{2}-1$. Que prévois-tu pour tout $x>0$?

A. $\ln x \leq x-1$

Juste.

Juste : $0{,}69<1$ et $-0{,}69<-0{,}5$; il y a égalité en $x=1$.

B. $\ln x \geq x-1$

Faux.

Les deux essais donnent l'inégalité inverse : $0{,}69<1$.

C. Cela dépend de la position de x par rapport à 1.

Faux.

Les deux essais, de part et d'autre de 1, donnent le même sens.

D. $\ln x = x-1$

Faux.

L'égalité n'a lieu qu'en $x=1$: $\ln 2 \neq 1$.

Correction

Les deux essais donnent $\ln x < x-1$, et l'égalité a lieu en $x=1$, car $\ln 1 = 0$.

On prévoit donc $\ln x \leq x-1$ pour tout $x>0$. Deux essais ne prouvent rien : la preuve suit.

Pourquoi est-ce vrai ? Comparer deux expressions, c'est étudier le signe de leur **écart**.

La preuve étudie l'écart $x-1-\ln x$ sur $]0,+\infty[$. Elle montre que son minimum vaut 0, atteint seulement en 1.

Une inégalité de référence

Propriété : Inégalité ln x ≤ x – 1

Pour tout réel $x>0$, $\ln x \leq x-1$, avec égalité si et seulement si $x=1$.

Démonstration

Étape 1. On pose, pour tout $x>0$, $g(x)=x-1-\ln x$. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (FO1 et opérations sur les fonctions dérivables) et $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

Étape 2. Sur $]0,1]$, $g'(x) \leq 0$ et g' ne s'annule qu'en 1 : g est strictement décroissante sur $]0,1]$. Sur $[1,+\infty[$, $g'(x) \geq 0$ et g' ne s'annule qu'en 1 : g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ (signe de la dérivée et variations).

Étape 3. Donc, pour tout $x > 0$ avec $x \neq 1$, $g(x) > g(1)$, et $g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$ (F01). Comme $g(1) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$: c'est l'inégalité annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer une inégalité $A(x) \leq B(x)$, on étudie la fonction écart $B - A$.

Son tableau de variations donne un minimum ; s'il vaut 0, l'écart est positif. Le cas d'égalité se lit là où le minimum est atteint.

Cette méthode resservira pour toutes les inégalités du chapitre.

Vérifie : Le rôle des variations

Dans la preuve, pourquoi $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$ différent de 1 ?

A. Parce que $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc g est strictement croissante.
Faux.
$g'(x) < 0$ sur $]0,1[$: le signe de g' change en 1.

B. Parce que g décroît strictement sur $]0,1]$ et croît strictement sur $[1,+\infty[$.
Juste.
Juste : de chaque côté de 1, g s'éloigne strictement de sa valeur $g(1) = 0$.

C. Parce que $\ln x$ est strictement négatif pour tout réel $x > 0$.
Faux.
C'est faux pour $x > 1$.

D. Parce que $g(1) = 0$ et que g est continue sur $]0,+\infty[$.
Faux.
Une valeur et la continuité ne disent rien du signe ailleurs : il faut le sens de variation.

Correction

- Sur $]0,1]$, g est strictement décroissante : si $0 < x < 1$, alors $g(x) > g(1) = 0$.
- Sur $[1,+\infty[$, g est strictement croissante : si $x > 1$, alors $g(x) > g(1) = 0$.

Les deux cas couvrent tous les $x > 0$ différents de 1.

Exemple : une minoration, par changement de variable

Soit $x > 0$. Le réel $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif : on peut lui appliquer l'inégalité.

On obtient $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leq \dfrac{1}{x} - 1$. Donc, pour tout $x > 0$:

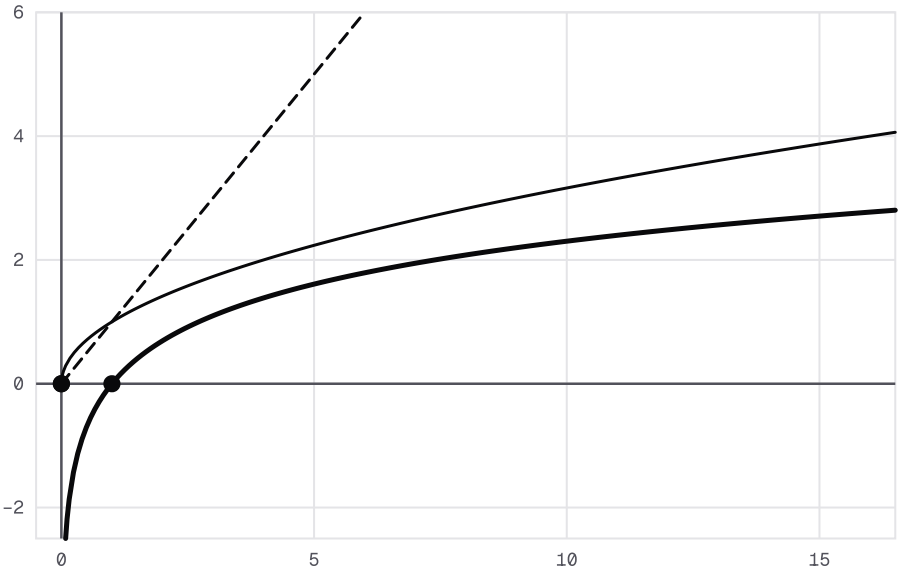
$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

L'hypothèse $x > 0$ sert deux fois : pour que $\ln x$ existe, et pour que $\dfrac{1}{x}$ soit strictement positif.

ln face à x

On donne $\ln 1000 \approx 6{,}9$: pour $x = 1000$, $\dfrac{\ln x}{x}$ vaut à peu près $0{,}007$. Le logarithme grandit, mais bien moins vite que x.

Pourquoi est-ce vrai en général ? L'inégalité précédente, appliquée à $\sqrt{x}$, encadre $\dfrac{\ln x}{x}$. Pour une puissance x^n, on factorise ensuite.



Pour x > 0, les courbes de x ↦ ln x, de x ↦ √x et de x ↦ x. Les trois grandissent, mais celle de ln reste sous les deux autres et prend du retard à mesure que x augmente.

Propriété : Croissances comparées : ln x sur x, x ln x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $x > 1$. F07 appliquée à $\sqrt{x}$ donne $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}$, et F04 donne $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$. De plus $\ln x > 0$ (F02). Donc $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Étape 2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Étape 3. Pour $x > 0$, on pose $t = \dfrac{1}{x}$: $x \ln x = -\dfrac{\ln t}{t}$ (F04). Quand $x \to 0^+$, $t \to +\infty$; la limite d'une fonction composée et l'étape 2 donnent $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

Vérifie : Le théorème qui conclut

Dans la preuve de la première limite, quel théorème conclut l'étape 2 ?

A. Les opérations sur les limites.

Faux.
Le quotient $\dfrac{\ln x}{x}$ est une forme indéterminée : les opérations ne concluent pas.

B. La limite d'une fonction composée.

Faux.
Elle sert à l'étape 3, pour passer de $+\infty$ à 0^+.

C. Le théorème des gendarmes.

Juste.
Juste : $\dfrac{\ln x}{x}$ est coincé entre 0 et $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, qui tend vers 0.

D. Le théorème des valeurs intermédiaires.

Faux.
Ce théorème donne l'existence d'une solution, pas une limite.

Correction

L'étape 1 donne, pour tout $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$. Le théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Propriété : Croissances comparées avec une puissance de x

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Le cas $n = 1$ est F08. Soit $n \geq 2$.

Étape 2. Pour $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$. Quand $x \to +\infty$, le premier facteur tend vers 0 (F08) et le second vers 0 car $n - 1 \geq 1$: le produit tend vers 0 (opérations sur les limites).

Étape 3. Pour $x > 0$, $x^n \ln x = x^{n-1} \times (x \ln x)$. Quand $x \to 0^+$, $x^{n-1} \to 0$ et $x \ln x \to 0$ (F08) : le produit tend vers 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer $\ln x$ à x, on l'écrit $2 \ln \sqrt{x}$ et on majore $\ln \sqrt{x}$ par $\sqrt{x}$. On encadre, puis on conclut par les gendarmes.

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ transporte une limite en $+\infty$ vers une limite en 0^+.

Pour une puissance, on factorise et on multiplie des limites connues.

Lever une forme indéterminée

Exemple : Exemple guidé : ln x face à √x

Énoncé. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Transformer. Pour $x > 0$, $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$, donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \times \dfrac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Changer de variable. On pose $t = \sqrt{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, t tend vers $+\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$.

Conclure. Par limite d'une fonction composée, puis par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

La puissance $\sqrt{x}$ n'est pas entière : la propriété sur x^n ne suffisait pas.

Vérifie : Une différence à l'infini

Quelle est la limite de $x - 3 \ln x$ en $+\infty$?

A. 0

Faux.
Les deux termes ne se compensent pas : x l'emporte sur $3 \ln x$.

B. $-\infty$

Faux.
$3 \ln x$ grandit bien moins vite que x.

C. Il n'y en a pas : c'est une forme indéterminée.

Faux.
Une forme indéterminée se lève : factorise par x.

D. $+\infty$

Juste.

Juste : $x - 3\ln x = x\left(1 - 3 \times \dfrac{\ln x}{x}\right)$, et la parenthèse tend vers 1.

Correction

C'est une forme « $+\infty$ moins $+\infty$ ». Pour $x > 0$, on factorise par le terme dominant :

$$x - 3\ln x = x\left(1 - 3 \times \frac{\ln x}{x}\right).$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers 1. Par produit, la limite vaut $+\infty$.

Méthode : lever une forme indéterminée avec ln

1. **Identifier** la forme : « $0 \times (-\infty)$ », « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »…
2. **Faire apparaître** une limite de référence : factoriser par le terme dominant, écrire $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, ou changer de variable.
3. **Conclure** par les opérations sur les limites, en **citant** la limite de référence employée.

Rédaction attendue. « Pour $x > 0$, on écrit … . Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées). Donc, par produit, … »

Attention : l'infini sur l'infini ne vaut pas 1

✗ « $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $\dfrac{+\infty}{+\infty} = 1$. »

✓ « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » est une forme indéterminée : aucune règle de calcul ne la tranche. Ici, la limite vaut 0, par croissances comparées.

De même, $x\ln x$ en 0^+ est une forme « $0 \times (-\infty)$ » dont la limite vaut 0.

À toi : Rédige un calcul de limite

Rédige le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(4x)}{x+1}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Sépare $\ln(4x)$ en $\ln 4 + \ln x$, pour $x > 0$.

Indice 2

Écris le quotient comme le produit de $\dfrac{\ln 4 + \ln x}{x}$ par $\dfrac{x}{x+1}$.

Indice 3

Point délicat : cite la limite de référence pour $\dfrac{\ln x}{x}$, et calcule celle de $\dfrac{x}{x+1}$.

Réponse

« **Transformer.** Pour $x > 0$, $\ln(4x) = \ln 4 + \ln x$, donc :

$$\frac{\ln(4x)}{x+1} = \left(\frac{\ln 4}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) \times \frac{x}{x+1}.$$

Limites. En $+\infty$, $\dfrac{\ln 4}{x}$ tend vers 0, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 (croissances comparées) et $\dfrac{x}{x+1}$ tend vers 1.

Conclusion. Par somme et produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(4x)}{x+1} = 0$. »

Limites en 1 et courbe de ln

Un nombre dérivé déguisé

Devine : Zéro sur zéro

Quand x tend vers 1, $\ln x$ et $x - 1$ tendent tous deux vers 0. D'après toi, vers quoi tend $\dfrac{\ln x}{x-1}$?

A. 0

Faux.

Le numérateur ne tend pas plus vite vers 0 : près de 1, $\ln x$ et $x - 1$ sont presque égaux.

B. 1

Juste.

Juste : c'est un taux d'accroissement de $\ln$ en 1, et $\ln'(1) = 1$.

C. $+\infty$

Faux.

Le dénominateur ne l'emporte pas : les deux termes s'annulent au même rythme.

D. Aucune : « $\dfrac{0}{0}$ » n'a pas de sens.

Faux.

Une forme « $\dfrac{0}{0}$ » est indéterminée, pas impossible : elle peut avoir une limite.

Correction

Comme $\ln 1 = 0$, le quotient s'écrit $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$: c'est un taux d'accroissement de $\ln$ en 1.

On prévoit donc la limite $\ln'(1) = 1$; la propriété suivante le rédige.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour la première limite, on reconnaît la définition du nombre dérivé de $\ln$ en 1. La seconde s'en déduit par le changement de variable $t = 1 + x$.

Deux limites de référence

Propriété : Limites liées au nombre dérivé de ln en 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ (F01). Par définition du nombre dérivé, $\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ tend vers 1 quand $x\to 1$; comme $\ln 1=0$, c'est la première limite.

Étape 2. Pour $x>-1$ avec $x\neq 0$, on pose $t=1+x$: $t>0$, $t\neq 1$ et $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln t}{t-1}$. Quand $x\to 0$, $t\to 1$ avec $t\neq 1$; la limite d'une fonction composée et l'étape 1 donnent la seconde limite.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une forme « $\dfrac{0}{0}$ » peut cacher un **taux d'accroissement**. On reconnaît $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, et la limite est le nombre dérivé $f'(a)$.

Un changement de variable ramène ensuite d'autres formes à celle-ci, ici $t=1+x$.

Vérifie : Un facteur dans le logarithme

Quelle est la limite de $\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ quand x tend vers 0 ?

A. 1

Faux.

Le facteur 3 ne disparaît pas : pose $t=3x$.

B. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

Tu as divisé au lieu de multiplier : $\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3\times\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}$.

C. 3

Juste.

Juste : avec $t=3x$, le quotient vaut $3\times\dfrac{\ln(1+t)}{t}$, et $t\to 0$.

D. 0

Faux.

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 au même rythme, à un facteur près.

Correction

Soit $x\neq 0$ tel que $1+3x>0$. Alors :

$$\frac{\ln(1+3x)}{x}=3\times\frac{\ln(1+3x)}{3x}.$$

On pose $t = 3x$: t tend vers 0 quand x tend vers 0. Comme $\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ tend vers 1, la limite vaut 3.

Exemple : Exemple guidé : faire apparaître x – 1

Énoncé. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.

Transformer. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, donc :

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1}.$$

Conclure. Le premier facteur tend vers 1, le second vers $\dfrac{1}{2}$. La limite vaut $\dfrac{1}{2}$, par produit.

On a exclu $x = 1$ et $x \leq 0$: le quotient n'y existe pas.

La courbe de ln

Tu connais maintenant les limites de $\ln$, sa tangente en 1 et l'inégalité $\ln x \leq x - 1$. Ces résultats dessinent déjà la courbe.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque point de la propriété suivante traduit un résultat démontré en langage graphique.

Propriété : Courbe de la fonction ln

Dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ de la fonction $\ln$:

- admet l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$) pour asymptote verticale ;
- admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des abscisses ;
- admet au point d'abscisse 1 la tangente d'équation $y = x - 1$, et se situe en dessous de cette tangente ;
- est tournée vers le bas : $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$;
- passe par les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(e, 1)$.

Démonstration

Étape 1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (F05) : la droite $x = 0$ est asymptote verticale (définition des asymptotes).

Étape 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (F05) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (F08) : c'est la définition d'une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Étape 3. La tangente en 1 a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 = x - 1$ (F01). D'après F07, $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$: la courbe est en dessous.

Étape 4. $\ln' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (F01) est dérivable sur $]0, +\infty[$ (dérivées usuelles) et $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: $\ln$ est concave (dérivée seconde et convexité).

Étape 5. $\ln 1 = 0$ (F01) et $\ln e = 1$ (F06).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Cette preuve n'invente rien : elle **traduit**.

- Une limite infinie en un réel donne une asymptote verticale.
- Le quotient $\dfrac{\ln x}{x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$, donne une branche parabolique horizontale.
- L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ place la courbe sous sa tangente.
- Le signe de $\ln''$, strictement négatif, donne la concavité.

Vérifie : Un autre point commun ?

La courbe de $\ln$ et sa tangente $y = x - 1$ ont-elles un autre point commun que $(1, 0)$?

A. Oui, le point d'abscisse e.

Faux.

En $x = e$: $\ln e = 1$, alors que $e - 1 \neq 1$, car $e \neq 2$.

B. Oui, loin à droite, car la courbe finit par rejoindre la droite.

Faux.

La courbe a une branche parabolique horizontale : elle s'éloigne de la droite.

C. Non : l'égalité $\ln x = x - 1$ n'a lieu qu'en $x = 1$.

Juste.

Juste : c'est le cas d'égalité de l'inégalité $\ln x \leq x - 1$.

D. Oui, une infinité, car elles sont tangentes.

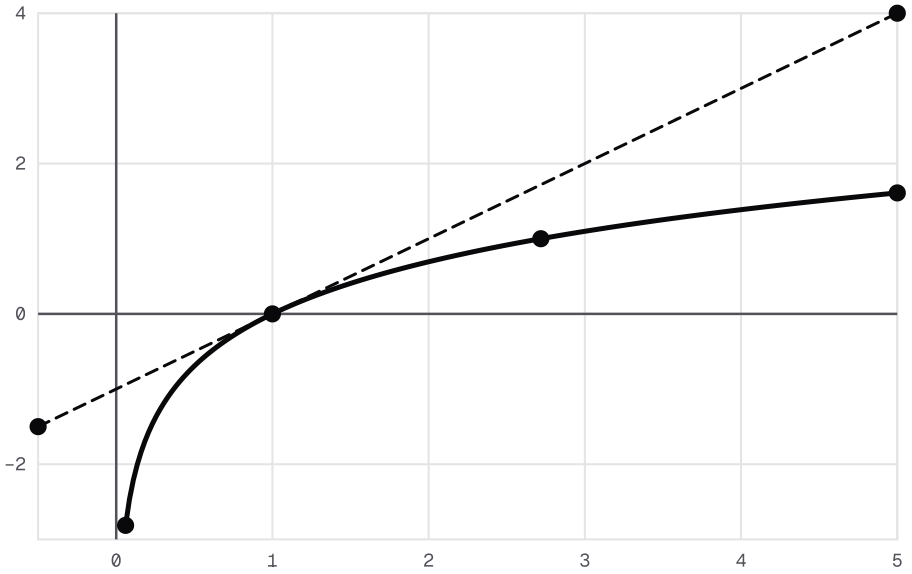
Faux.

Être tangentes en un point ne donne aucun autre point commun.

Correction

Un point commun d'abscisse $x > 0$ vérifie $\ln x = x - 1$. Or l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ est une égalité seulement pour $x = 1$.

Le seul point commun est donc $(1, 0)$; partout ailleurs, la courbe est strictement en dessous.



La courbe de ln, sa tangente y = x − 1 au point (1, 0), et le point (e, 1). L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.

Sous chaque tangente

Exemple : sous une autre tangente

Énoncé. Montre que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \dfrac{x}{e}$.

Preuve. Soit $x > 0$. Alors $\dfrac{x}{e} > 0$, et l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ appliquée à $t = \dfrac{x}{e}$ donne $\ln x - \ln e \leq \dfrac{x}{e} - 1$.

Conclusion. Comme $\ln e = 1$, on obtient $\ln x \leq \dfrac{x}{e}$, avec égalité seulement pour $x = e$.

Lecture. La droite $y = \dfrac{x}{e}$ est la tangente en $(e, 1)$: la courbe est aussi sous elle.

À toi : Rédige une limite en 0

Rédige le calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 2x)}{x}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le quotient existe pour $x < \dfrac{1}{2}$ et $x \neq 0$.

Indice 2

Pose $t = -2x$: écris le quotient avec $\dfrac{\ln(1 + t)}{t}$.

Indice 3

Point délicat : le facteur -2 et son signe.

Réponse

« **Changer de variable.** Soit $x < \dfrac{1}{2}$ avec $x \neq 0$. On pose $t = -2x$: $t > -1$, $t \neq 0$, et

$$\frac{\ln(1-2x)}{x} = -2 \times \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Conclusion. Quand x tend vers 0, t tend vers 0, et $\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ tend vers 1. Par limite d'une fonction composée, la limite cherchée vaut -2. »

Dérivée de ln u et primitives de u'/u

Dériver ln u

Devine : Une première dérivée

D'après toi, quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$

Faux.

Il manque la dérivée de l'intérieur, $x \mapsto 2x$.

B. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+3}$

Juste.

Juste : dérivée d'une composée, $\ln'\big(u(x)\big) \times u'(x)$.

C. $x \mapsto 2x\ln(x^2+3)$

Faux.

On ne multiplie pas $\ln u$ par u' : c'est $\ln'$ qu'on évalue en $u(x)$.

D. $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$

Faux.

Tu as pris l'inverse de u' ; la dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Correction

Pour tout réel x, $x^2+3>0$. La dérivée d'une composée donne :

$$\ln'(x^2+3) \times 2x = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Donc la dérivée est $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour $\ln u$, c'est la dérivée d'une composée, à condition que u reste dans $]0,+\infty[$.

Pour $\ln|u|$, il faut d'abord savoir que u garde un signe constant : le théorème des valeurs intermédiaires le donne, sur un intervalle.

Les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ viennent en lisant ce résultat à l'envers.

Le théorème et sa lecture à l'envers

Théorème : Dérivée de ln(u) ; dérivée logarithmique

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$.
- Si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\big(\ln|u|\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

La fonction $\dfrac{u'}{u}$ s'appelle la **dérivée logarithmique** de u. En particulier, $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Démonstration

Étape 1. Si $u > 0$ sur I : $\ln$ est dérivable sur $J =]0, +\infty[$ (F01) et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. La dérivée d'une composée donne $\big(\ln u\big)'(x) = \ln'\big(u(x)\big) \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Étape 2. Si u ne s'annule pas sur I : u est continue sur I, car dérivable. Si u prenait en deux points $a < b$ de I des valeurs de signes contraires, le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b] \subset I$ donnerait un zéro de u. Donc u garde un signe constant sur I.

Étape 3. Si $u > 0$ sur I, $|u| = u$: c'est l'étape 1. Si $u < 0$ sur I, $|u| = -u > 0$ et l'étape 1 appliquée à $-u$ donne $\big(\ln(-u)\big)' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Étape 4. Le cas particulier est $u(x) = x$ sur chacun des deux intervalles.

Vérifie : Un signe constant

Dans l'étape 2 de la preuve, pourquoi u garde-t-elle un signe constant sur I ?

A. Parce que u est dérivable, donc sa dérivée garde un signe constant.
Faux.
Le signe de u' ne dit rien du signe de u.

B. Parce que $u(x) > 0$ pour tout x de I, par hypothèse.
Faux.
Ce n'est pas l'hypothèse : on suppose seulement que u ne s'annule pas.

C. Par le théorème des valeurs intermédiaires, u étant continue sur I.
Juste.
Juste : un changement de signe sur $[a, b] \subset I$ donnerait un zéro de u.

D. Parce que $|u|$ est toujours positive ou nulle.
Faux.
C'est vrai, mais cela ne dit rien du signe de u elle-même.

Correction

u est dérivable, donc continue sur I.

Si elle prenait des valeurs de signes contraires en deux points $a < b$ de I, le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a, b]$ donnerait un zéro de u. C'est exclu : u garde un signe constant.

L'hypothèse « I est un intervalle » sert ici.

Propriété : Primitives de u′/u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I.

La fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I ; les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où $k \in \mathbb{R}$. Si de plus $u > 0$ sur I, $\ln|u| = \ln u$.

En particulier, les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln x + k$ sur $]0, +\infty[$, et $x \mapsto \ln(-x) + k$ sur $]-\infty, 0[$, où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. D'après F12, $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, de dérivée $\dfrac{u'}{u}$: c'est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I (définition d'une primitive).

Étape 2. Comme I est un **intervalle**, les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sur I sont exactement les fonctions $\ln|u| + k$, $k \in \mathbb{R}$ (ensemble des primitives sur un intervalle).

Étape 3. Si $u > 0$ sur I, $|u| = u$. Pour $u(x) = x$: sur $]0, +\infty[$, $|x| = x$; sur $]-\infty, 0[$, $|x| = -x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées réutilisables.

- Une fonction continue qui ne s'annule pas sur un **intervalle** y garde un signe constant : on se ramène au cas $u > 0$, avec $-u$ si besoin.
- Toute formule de dérivée, lue à l'envers, donne une primitive ; sur un intervalle, on obtient toutes les primitives en ajoutant une constante k.

Exemple : u négative sur un intervalle

Sur $I =]-2, 2[$, la fonction $u : x \mapsto x^2 - 4$ est strictement négative. Donc $\ln\big(u(x)\big)$ n'existe en aucun point de I.

En revanche, $\ln|u(x)| = \ln(4 - x^2)$ existe, et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}\big(\ln(4-x^2)\big)' &= \frac{-2x}{4-x^2}\\ &= \frac{2x}{x^2-4}\\ &= \frac{u'(x)}{u(x)}.\end{aligned}$$

Sans la valeur absolue, la formule n'aurait aucun sens : il faut écrire le signe de u sur l'intervalle nommé.

Méthode et exemples

Vérifie : Une primitive à gauche de 5/2

Laquelle de ces fonctions est une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{2x-5}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$?

A. $x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(2x-5)$

Faux.

Sur cet intervalle, $2x-5<0$: ce logarithme n'existe pas.

B. $x \mapsto 3\ln(5-2x)$

Faux.

Sa dérivée vaut $\dfrac{-6}{5-2x} = \dfrac{6}{2x-5}$: il manque le facteur $\dfrac{1}{2}$.

C. $x \mapsto -\dfrac{3}{(2x-5)^2}$

Faux.

Dérive-la : tu obtiens $\dfrac{12}{(2x-5)^3}$, pas la fonction donnée.

D. $x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(5-2x)$

Juste.

Juste : sa dérivée vaut $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-2}{5-2x} = \dfrac{3}{2x-5}$.

Correction

Avec $u(x)=2x-5$, on a $u'(x)=2$ et $\dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$, $u<0$ et $|u(x)| = 5-2x$.

Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(5-2x)$.

Méthode : dériver ln u, primitiver u'/u

1. **Identifier** u et calculer u'.

2. **Vérifier la condition** sur l'intervalle nommé : $u > 0$ pour $\ln u$; u ne s'annule pas pour $\ln|u|$, et donner son signe.
3. **Conclure** : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; ou écrire la fonction sous la forme $\lambda \dfrac{u'}{u}$ et donner ses primitives $\lambda \ln|u| + k$.
4. **Vérifier** en dérivant le résultat.

Rédaction attendue. « u est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ (ou $u(x) < 0$). Donc les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto \cdots + k$, où $k \in \mathbb{R}$. »

Exemple **: Exemple guidé : ln|u| sur un intervalle nommé**

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $I =]-2, 5[$ par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-10}$. Détermine ses primitives sur I.

Condition. $u(x) = x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ est dérivable sur I et $u'(x) = 2x - 3$. Pour $x \in I$, $x + 2 > 0$ et $x - 5 < 0$, donc $u(x) < 0$ et $|u(x)| = 10 + 3x - x^2$.

Conclure. $f = \dfrac{u'}{u}$ sur I. Ses primitives sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(10 + 3x - x^2) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Vérifier. Pour tout $x \in I$, $\big(\ln(10 + 3x - x^2)\big)' = \dfrac{3 - 2x}{10 + 3x - x^2} = f(x)$.

Exemple **: Exemple guidé : la forme λu′/u**

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x-3}{x^2-x+2}$. Détermine une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Condition. Le trinôme $x^2 - x + 2$ a pour discriminant $1 - 8 = -7 < 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2 - x + 2$, et $u'(x) = 2x - 1$.

Repérer. $6x - 3 = 3(2x - 1)$, donc $f = 3 \times \dfrac{u'}{u}$.

Conclure. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3\ln(x^2 - x + 2)$.

Le signe de u

Attention **: ln u exige u > 0**

✗ « Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-4}$ sur $]-\infty, 4[$ est $x \mapsto \ln(x-4)$. »

✓ Sur $]-\infty, 4[$, $x - 4 < 0$: $\ln(x-4)$ n'existe pas. Une primitive est $x \mapsto \ln(4-x)$, car $|x-4| = 4 - x$; sa dérivée vaut $\dfrac{-1}{4-x} = \dfrac{1}{x-4}$.

Nomme toujours l'intervalle et le signe de u.

À toi : Rédige une recherche de primitives

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$. Rédige la recherche de ses primitives sur $]1,+\infty[$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $u(x)=x^2+2x-3$ et calcule $u'(x)$.
Indice 2
Compare $x+1$ et $u'(x)$: il manque un facteur. Factorise $u(x)$ pour obtenir son signe sur $]1,+\infty[$.
Indice 3
Point délicat : $u>0$ sur cet intervalle, donc pas de valeur absolue ; n'oublie pas la constante k.

Réponse
« **Condition.** Soit $u(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$. Pour $x>1$, les deux facteurs sont strictement positifs, donc $u(x)>0$.

Repérer. De plus $u'(x)=2x+2=2(x+1)$, donc $f=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$ sur $]1,+\infty[$.

Conclusion. Les primitives de f sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x-3)+k$, où $k\in\mathbb{R}$. »

Étudier une fonction, démontrer une inégalité

Étudier une fonction avec ln

Devine : Qui l'emporte ?

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=3\ln x-x+1$. En $+\infty$, $3\ln x$ tend vers $+\infty$ et $-x+1$ vers $-\infty$. D'après toi, quelle est la limite de f en $+\infty$?

A. $+\infty$, car $\ln x$ tend vers $+\infty$.
Faux.
$\ln x$ grandit bien moins vite que x : factorise $f(x)$ par x.

B. $-\infty$, car x l'emporte sur $\ln x$.
Juste.
Juste : après factorisation par x, la parenthèse tend vers -1.

C. 0, car les deux termes se compensent.
Faux.
Ils ne se compensent pas : après factorisation par x, la parenthèse tend vers -1.

D. Aucune : c'est une forme indéterminée.
Faux.
Une forme indéterminée se lève : factorise par x.

Correction

Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x\left(3 \times \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right).$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 ; la parenthèse tend vers -1. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Méthode : étudier une fonction comportant ln

1. **Domaine** : chaque expression sous un $\ln$ est strictement positive.
2. **Limites aux bornes** : formes indéterminées levées par une limite de référence citée ; branches infinies.
3. **Dérivée** : par la dérivée de $\ln u$, puis factorisée pour lire son signe.
4. **Tableau de variations**, puis tangentes, position relative et courbe.
5. **Solutions de $f(x) = 0$** : sur chaque intervalle de monotonie, continuité et signes aux bornes donnent l'existence (valeurs intermédiaires), la stricte monotonie l'unicité.

Rédaction attendue. « f est dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \ldots$, du signe de $\ldots$. Donc f est strictement croissante sur $\ldots$ » Chaque limite cite sa justification (« par croissances comparées »).

Exemple : Exemple guidé : une étude complète

Énoncé. Étudie la fonction $f : x \mapsto 3\ln x - x + 1$.

Domaine. $D =]0, +\infty[$.

Limites. En 0^+ : $3\ln x$ tend vers $-\infty$ et $-x + 1$ vers 1, donc $f(x)$ tend vers $-\infty$. En $+\infty$: $f(x)$ tend vers $-\infty$, par factorisation et croissances comparées.

Dérivée. Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 1 = \dfrac{3 - x}{x}$, du signe de $3 - x$.

Variations. f est strictement croissante sur $]0, 3]$, strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. Son maximum vaut $f(3) = 3\ln 3 - 2$.

Variations de f sur]0, +∞[: maximum 3 ln 3 − 2 en 3, limite −∞ aux deux bornes.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3\ln 3 - 2$	↘	$-\infty$

Vérifie : La tangente en 1

Pour la même fonction f, quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?

A. $y = 2x - 2$

Juste.

Juste : $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$.

B. $y = 2x$

Faux.

La tangente passe par $(1, f(1)) = (1, 0)$: en $x = 1$, $2x = 2 \neq 0$.

C. $y = x - 1$

Faux.

C'est la tangente à la courbe de $\ln$ en 1 ; ici, $f'(1) = \dfrac{3}{1} - 1 = 2$.

D. $y = -2x + 2$

Faux.

Le signe de la pente est faux : $f'(1) = 2 > 0$.

Correction

$f(1) = 3\ln 1 - 1 + 1 = 0$ et $f'(1) = \dfrac{3 - 1}{1} = 2$.

La tangente a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = 2x - 2$.

Compter les zéros, prolonger en 0

Exemple **: Exemple guidé : compter les solutions de f(x) = 0**

Énoncé. Pour la même fonction f, on donne $1{,}79 < \ln 6 < 1{,}8$ et $1{,}94 < \ln 7 < 1{,}95$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions : 1 et un réel α de $]6, 7[$.

Sur $]0, 3]$**.** f est strictement croissante : elle s'annule au plus une fois. Or $f(1) = 0$.

Sur $[3, +\infty[$**.** f est continue et strictement décroissante. De plus :

- $f(6) = 3\ln 6 - 5 > 3 \times 1{,}79 - 5 > 0$;
- $f(7) = 3\ln 7 - 6 < 3 \times 1{,}95 - 6 < 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires donne un zéro α dans $]6,7[$; la stricte monotonie le rend unique sur $[3,+\infty[$.

Conclure. Les solutions sont 1 et α, avec $6<\alpha<7$.

Exemple **: Exemple guidé : prolonger en 0, puis étudier les bornes**

Énoncé. Soit φ définie sur $[0,+\infty[$ par :

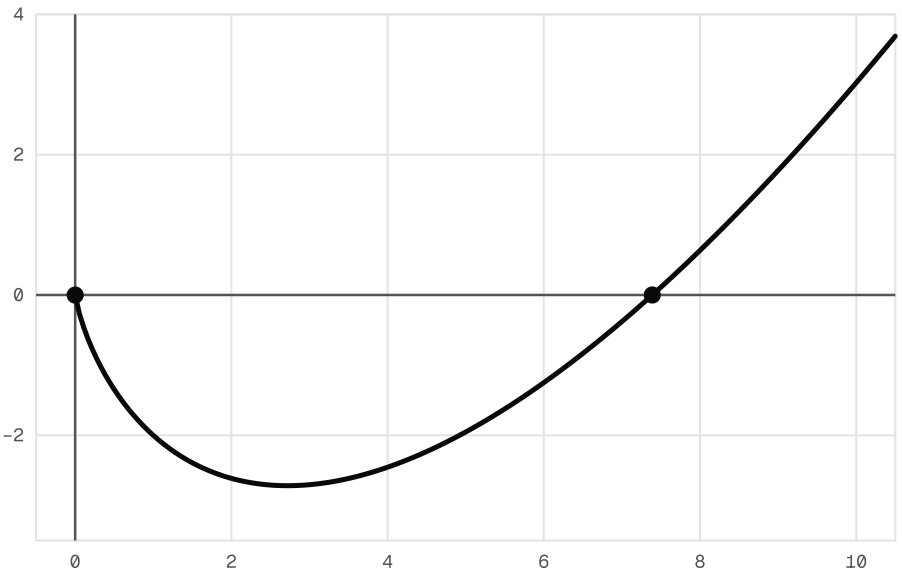
$$\varphi(x)=\begin{cases} x\ln x-2x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Continuité en 0. $x\ln x\to 0$ en 0^+ (croissances comparées) et $2x\to 0$: $\varphi(x)\to 0=\varphi(0)$. Donc φ est continue à droite en 0.

Dérivabilité en 0. Pour $x>0$, $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\ln x-2\to-\infty$. Donc φ n'est pas dérivable à droite en 0 : sa courbe admet en O une demi-tangente verticale.

En $+\infty$. $\varphi(x)=x(\ln x-2)\to+\infty$ et $\dfrac{\varphi(x)}{x}=\ln x-2\to+\infty$: branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Position. $\varphi(x)<0$ sur $\left]0,e^2\right[$, $\varphi(x)>0$ sur $\left]e^2,+\infty\right[$.



La courbe de φ prolongée en 0 : elle part de O avec une demi-tangente verticale, reste sous l'axe des abscisses jusqu'à e², le coupe en ce point, puis monte sans limite finie.

Démontrer une inégalité

Méthode : démontrer une inégalité par l'étude d'une fonction

1. **Se ramener** à $h(x) \geq 0$ sur un intervalle I nommé : pour $A(x) \leq B(x)$, on pose $h(x) = B(x) - A(x)$.
2. **Étudier les variations** de h : signe de h', au besoin à l'aide de h''.
3. **Utiliser** une valeur connue, comme $h(0) = 0$, ou la limite de h à une borne de I, et le sens de variation.
4. **Conclure** sur I, avec le cas d'égalité.

Rédaction attendue. « Soit h la fonction définie sur I par … . Elle est dérivable sur I et … . h est strictement décroissante puis strictement croissante de part et d'autre de x_0 : son minimum sur I est atteint en x_0 seulement, et $h(x_0) = 0$. Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, avec égalité si et seulement si $x = x_0$. »

Exemple : À maîtriser : encadrer ln(1 + x)

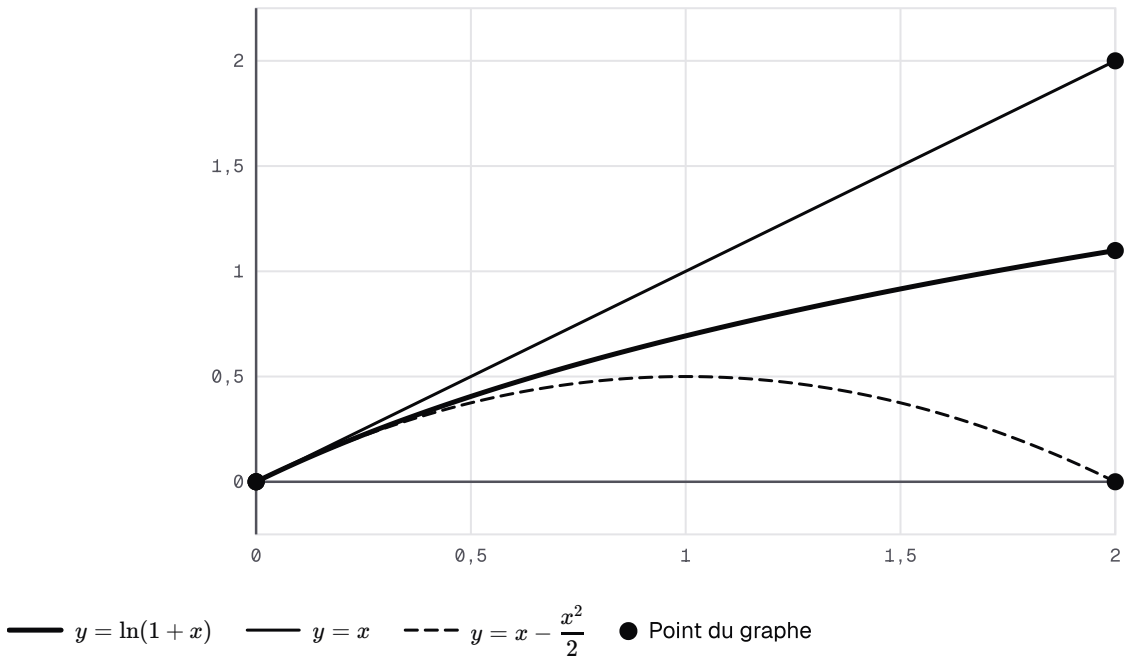
Énoncé. Montre que, pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Majoration. Soit $x \geq 0$. Alors $1 + x > 0$; l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ avec $t = 1 + x$ donne $\ln(1+x) \leq x$.

Minoration. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Elle est dérivable et, pour tout $x \geq 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$.

Comme $h'(x) > 0$ pour $x > 0$, h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$; et $h(0) = 0$. Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Conclure. L'encadrement vaut pour tout $x \geq 0$, avec égalité seulement en 0.



Pour x entre 0 et 2 : la courbe de x ↦ ln(1 + x) reste entre la parabole y = x − x²/2 et la droite y = x.

Vérifie : Un encadrement chiffré

D'après l'encadrement, entre quels nombres se trouve $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$?

A. Entre $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{2}$.

Juste.

Juste : avec $x = \frac{1}{2}$, $x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

B. Entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$.

Faux.

Le terme $\frac{x^2}{2}$ se retranche dans la minoration ; et x est un majorant.

C. Entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{3}{8}$.

Faux.

Avec $x = \frac{1}{2}$, la minoration stricte donne $\ln\left(\frac{3}{2}\right) > \frac{3}{8}$: $\frac{3}{8}$ est un minorant, pas un majorant.

D. Entre 0 et $\frac{1}{4}$.

Faux.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $x - \frac{x^2}{2}$ vaut $\frac{3}{8}$, plus grand que $\frac{1}{4}$.

Correction

On écrit $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ et on applique l'encadrement à $x = \frac{1}{2} \geq 0$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $\frac{3}{8} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$.

Exemple : Exemple guidé : une limite au lieu d'une valeur

Énoncé. Montre que, pour tout $x > 0$, $\ln(x+2) - \ln x > \frac{2}{x+1}$.

Écart. Soit h la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $h(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+1}$. Au même dénominateur, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \frac{-2}{x(x+1)^2(x+2)} < 0$: h est strictement décroissante sur I.

Limite. $\ln(x+2) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$, et $\frac{2}{x+1}$ tend vers 0 : $h(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Conclure. Soit $x > 0$. Pour tout $t > x$, $h(x) > h(t)$; quand t tend vers $+\infty$, on obtient $h(x) \geq 0$. Ce résultat vaut aussi en $x+1$, donc $h(x) > h(x+1) \geq 0$, et $h(x) > 0$.

Rédiger, comme à l'examen

À toi : Rédige une inégalité

Rédige la preuve de : pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pose $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$ sur $[1, +\infty[$: c'est l'écart entre les deux membres.

Indice 2

Dérive : $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. Au même dénominateur $2x\sqrt{x}$, le numérateur est $x - 2\sqrt{x} + 1$.

Indice 3

Point délicat : reconnais le carré $(\sqrt{x}-1)^2$, puis utilise $h(1) = 0$.

Réponse

« **Fonction écart.** Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln x$. Pour tout $x \geq 1$, $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x$.

Dérivée. h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &\quad - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Variations. Donc $h'(x) \geq 0$: h est croissante sur $[1, +\infty[$, et $h(1) = 0$.

Conclusion. Ainsi $h(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \geq 1$. »

Remarque : Coin examen : « montrer que », puis « en déduire »

$\ln$ intervient dans la fonction étudiée dans 10 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). Les questions s'enchaînent :

- « montrer que, pour tout $x > 0$, … » : une inégalité, démontrée par l'étude d'une fonction ;
- « en déduire … » : on réutilise ce résultat, sans le redémontrer ;
- « prolonger par continuité en 0 », puis « étudier la dérivabilité en 0 » : limite par croissances comparées, puis taux d'accroissement ;
- limites, dérivée, tableau de variations, puis tangente et position.

Chaque réponse se termine par une phrase qui conclut, avec l'ensemble où elle vaut.

Logarithme de base a, logarithme décimal

Compter les chiffres

Devine : Un grand nombre

Le nombre $2^{10} = 1024$ s'écrit avec 4 chiffres. D'après toi, avec combien de chiffres s'écrit 2^{30} ?

A. 9

Faux.
$2^{30} = 1024^3$, qui dépasse $1000^3 = 10^9$: il faut au moins 10 chiffres.

B. 10

Juste.
Juste : $10^9 \leq 2^{30} < 10^{10}$.

C. 12

Faux.
Multiplier des nombres n'additionne pas leurs nombres de chiffres.

D. 30

Faux.
30 est l'exposant. En base 2, 2^{30} s'écrit avec 31 chiffres, un 1 suivi de 30 zéros ; ici, on compte en base 10.

Correction
$2^{30} = 1024^3$.

- D'une part, $1024^3 > 1000^3 = 10^9$.
- D'autre part, $1024 < 2000$, donc $1024^3 < 8 \times 10^9 < 10^{10}$.

Ainsi $10^9 \leq 2^{30} < 10^{10}$: 2^{30} s'écrit avec 10 chiffres. Le logarithme décimal fait ce calcul pour tous les nombres.

Le nombre de chiffres d'un entier $N \geq 1$ dépend de la puissance de 10 qui l'encadre. On cherche l'entier p tel que :

$$10^p \leq N < 10^{p+1}.$$

Une fonction qui transforme 10^p en p ferait ce travail. On l'obtient en divisant $\ln$ par la constante $\ln 10$. Plus généralement, on divise par $\ln a$ pour une base a.

Définition : Logarithme de base a ; logarithme décimal

Soit a un réel strictement positif, avec $a \neq 1$; alors $\ln a \neq 0$ (F02).

On appelle **fonction logarithme de base** a, notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le **logarithme décimal**, noté $\log$, est le logarithme de base 10 : pour tout $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Exemple : premières valeurs

Avec la définition et les règles de calcul de $\ln$:

- $\log_2 8 = \dfrac{\ln 8}{\ln 2} = \dfrac{3\ln 2}{\ln 2} = 3$;
- $\log 1000 = \dfrac{3\ln 10}{\ln 10} = 3$;
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \dfrac{2\ln 2}{-\ln 2} = -2$.

La base $\dfrac{1}{2}$ est inférieure à 1 : son logarithme est négatif, ce qui change des signes. La base 1 est exclue, car $\ln 1 = 0$.

Propriétés et variations

Pourquoi est-ce vrai ? Le logarithme de base a est $\ln$ multiplié par la constante $\dfrac{1}{\ln a}$.

Ses règles de calcul viennent de celles de $\ln$, divisées par $\ln a \neq 0$. Ses variations viennent du signe de $\ln a$: positif si $a > 1$, négatif si $0 < a < 1$.

Propriété : Propriétés algébriques du logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout rationnel r :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$, $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ et $\log_a(x^r) = r\log_a x$;
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ et $\log_a(a^r) = r$.

En particulier, $\log 10 = 1$ et $\log(10^r) = r$ pour tout rationnel r ; et $\log_e = \ln$.

Démonstration

Étape 1. Comme $a > 0$ et $a \neq 1$, $\ln a \neq 0$ (F02) : on peut diviser par $\ln a$.

Étape 2. On divise par $\ln a$ les égalités de F03 et F04 écrites pour x et y : on obtient les quatre égalités du premier point.

Étape 3. $\log_a 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln a} = 0$, $\log_a a = \dfrac{\ln a}{\ln a} = 1$ et, par F04, $\log_a(a^r) = \dfrac{r\ln a}{\ln a} = r$.

Étape 4. Le cas $a = 10$ donne $\log 10 = 1$ et $\log(10^r) = r$. Comme $\ln e = 1$ (F06), $\log_e x = \dfrac{\ln x}{1} = \ln x$.

Vérifie : Une base 4

Que vaut $\log_4 32$?

A. 8

Faux.

$32 \div 4 = 8$: un logarithme n'est pas un quotient de nombres.

B. $\dfrac{2}{5}$

Faux.

Tu as inversé : c'est $\dfrac{\ln 32}{\ln 4}$, pas $\dfrac{\ln 4}{\ln 32}$.

C. $\dfrac{5}{2}$

Juste.

Juste : $32 = 2^5 = 4^{\frac{5}{2}}$.

D. $\dfrac{5}{4}$

Faux.

$4^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} \neq 32$; écris 32 comme une puissance de 4.

Correction

$\log_4 32 = \dfrac{\ln 32}{\ln 4} = \dfrac{5\ln 2}{2\ln 2} = \dfrac{5}{2}$. On peut aussi écrire $32 = 4^{\frac{5}{2}}$, avec $\dfrac{5}{2}$ rationnel, et utiliser $\log_a(a^r) = r$.

Propriété : Variations et limites du logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

- Si $a > 1$: $\log_a$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y$ si et seulement si $x < y$.
- Si $0 < a < 1$: $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$; pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y$ si et seulement si $x > y$.

Démonstration

Étape 1. $\log_a = \dfrac{1}{\ln a} \times \ln$ est le produit de $\ln$ par une constante : par les opérations sur les fonctions dérivables, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}$ (F01).

Étape 2. Si $a > 1$, $\ln a > 0$ (F02) : la dérivée est strictement positive, donc $\log_a$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Les limites de F05, multipliées par la constante $\dfrac{1}{\ln a} > 0$, gardent leur signe (opérations sur les limites). Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow \ln x < \ln y$ (multiplication par $\ln a > 0$) $\Leftrightarrow x < y$ (F02).

Étape 3. Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ (F02) : la dérivée est strictement négative, $\log_a$ est strictement décroissante, et la multiplication par $\dfrac{1}{\ln a} < 0$ change le signe des limites. Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow \ln x > \ln y$ (multiplication par $\ln a < 0$) $\Leftrightarrow x > y$ (F02).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout se ramène à $\ln$ par la constante $\dfrac{1}{\ln a}$. Avant de diviser par $\ln a$, on vérifie qu'il est non nul : c'est $a \neq 1$.

Le **signe** de $\ln a$ décide du reste : il conserve les inégalités et les limites si $a > 1$, il les renverse si $0 < a < 1$.

La base face à 1

Exemple : une base inférieure à 1

Compare $\log_{\frac{1}{3}} 5$ et $\log_{\frac{1}{3}} 7$.

La base $\dfrac{1}{3}$ vérifie $0 < \dfrac{1}{3} < 1$: $\log_{\frac{1}{3}}$ est strictement décroissante. Comme $5 < 7$, on obtient $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$.

Avec une base supérieure à 1, la conclusion serait inverse : $\log_3 5 < \log_3 7$. La position de a par rapport à 1 est donc une hypothèse à écrire.

Vérifie : Une inéquation en base 1/2

Quel est l'ensemble des solutions de $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$?

A. $\left]\frac{1}{8}, +\infty\right[$

Faux.

La base $\frac{1}{2}$ est inférieure à 1 : le sens de l'inégalité change.

B. $]8, +\infty[$

Faux.

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, pas 3 : c'est $\frac{1}{8}$ qui a pour image 3.

C. $]0, 8[$

Faux.

Même confusion : 3 est l'image de $\frac{1}{8}$, pas celle de 8.

D. $\left]0, \frac{1}{8}\right[$

Juste.

Juste : 3 est l'image de $\frac{1}{8}$, et $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante.

Correction

Domaine. $D =]0, +\infty[$.

Écrire 3 comme un logarithme. $3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$.

Conclure. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante, donc $x < \frac{1}{8}$. Avec le domaine : $S = \left]0, \frac{1}{8}\right[$.

Inconnue entière et nombre de chiffres

Méthode : utiliser un logarithme de base a

1. **Revenir** à $\ln$: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
2. **Inconnue entière** dans $a^n \geq b$ ou $a^n \leq b$: applique $\ln$, strictement croissante, puis divise par $\ln a$ en **nommant son signe**.
3. **Nombre de chiffres** d'un entier $N \geq 1$: c'est $p + 1$, où p est l'entier tel que $p \leq \log N < p + 1$.

Rédaction attendue. « Comme $0 < a < 1$, $\ln a < 0$; en divisant par $\ln a$, le sens de l'inégalité change. »

Exemple : Exemple guidé : la plus petite puissance

Énoncé. On donne $4{,}605 < \ln 100 < 4{,}606$ et $0{,}223 < \ln\left(\frac{5}{4}\right) < 0{,}224$. Trouve le plus petit entier n tel que $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{100}$.

Appliquer ln. Par stricte croissance de $\ln$, l'inégalité équivaut à $n \ln\left(\frac{4}{5}\right) \leq -\ln 100$, soit $-n \ln\left(\frac{5}{4}\right) \leq -\ln 100$.

Diviser. $\ln\left(\frac{5}{4}\right) > 0$, car $\frac{5}{4} > 1$. Donc $n \geq q$, avec $q = \frac{\ln 100}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$. Les encadrements donnent $\frac{4{,}605}{0{,}224} < q < \frac{4{,}606}{0{,}223}$, soit $20{,}5 < q < 20{,}7$.

Conclure. Le plus petit entier qui convient est $n = 21$.

Attention **: diviser par ln a, c'est regarder son signe**

✗ « $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{50}$ équivaut à $n < \frac{\ln\left(\frac{1}{50}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$. »

✓ $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$: la division change le sens. L'inégalité équivaut à $n > \frac{\ln 50}{\ln 3}$.

Une puissance de $\frac{1}{3}$ diminue quand n augmente : on attend bien « n assez grand ».

À toi : Rédige un comptage de chiffres

On donne $0{,}698 < \log 5 < 0{,}699$. Rédige la recherche du nombre de chiffres de 5^{40}. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\log(5^{40})$ avec la règle des puissances.
Indice 2
Encadre $40 \log 5$ à l'aide de l'encadrement donné.
Indice 3
Point délicat : trouve l'entier p tel que $p \leq \log(5^{40}) < p + 1$; le nombre de chiffres est $p + 1$.

Réponse
« **Encadrer.** $\log(5^{40}) = 40 \log 5$, et $40 \times 0{,}698 < 40 \log 5 < 40 \times 0{,}699$, soit $27{,}92 < \log(5^{40}) < 27{,}96$.

Revenir aux puissances de 10. Donc $27 \leq \log(5^{40}) < 28$, puis $10^{27} \leq 5^{40} < 10^{28}$ par stricte croissance de $\log$.

Conclusion. Ainsi 5^{40} s'écrit avec 28 chiffres. »

Systèmes comportant des logarithmes

Changer d'inconnues

Devine : L'idée qui simplifie

On veut résoudre le système $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x + \ln y = 5 \end{cases}$. D'après toi, quelle idée le rend simple ?

A. Poser $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.

Juste.

Juste : le système devient linéaire en X et Y.

B. Supprimer les $\ln$ des deux côtés.

Faux.

On ne « supprime » pas un logarithme : on revient à x grâce au nombre e, à la fin.

C. Remplacer $\ln x + \ln y$ par $\ln x \times \ln y$.

Faux.

La relation fondamentale donne $\ln(xy)$, pas un produit de logarithmes.

D. Élever chaque équation au carré.

Faux.

Cela compliquerait le système sans faire disparaître les logarithmes.

Correction

Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient $2X - Y = 1$ et $X + Y = 5$.

En additionnant, $3X = 6$, donc $X = 2$, puis $Y = 3$.

On revient à $x = e^2$ et $y = e^3$, qui sont strictement positifs.

Méthode : résoudre un système avec des logarithmes

1. **Conditions** : chaque logarithme exige un réel strictement positif.
2. **Changer d'inconnues** : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$; ou se ramener à la somme et au produit de x et y.
3. **Résoudre** le système obtenu : linéaire, ou équation du second degré $t^2 - st + p = 0$ pour une somme s et un produit p.
4. **Revenir** aux inconnues x et y, puis **vérifier** les conditions.

Rédaction attendue. « Le système a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. … Donc $S = \{(\dots, \dots)\}$. »

Exemple : Exemple guidé : un système linéaire caché

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \ln x + 2\ln y = 4 \\ 3\ln x - \ln y = 5 \end{cases}$

Conditions. $x > 0$ et $y > 0$.

Changer d'inconnues. Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: $X + 2Y = 4$ et $3X - Y = 5$. La seconde équation donne $Y = 3X - 5$; la première devient $7X - 10 = 4$, donc $X = 2$ et $Y = 1$.

Revenir. $\ln x = 2$ et $\ln y = 1$, donc $x = e^2$ et $y = e$, strictement positifs. Donc $S = \{(e^2, e)\}$.

Somme et produit

Exemple **: Exemple guidé : somme et produit**

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y = 9 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 5 \end{cases}$

Conditions. $x > 0$ et $y > 0$. Sous ces conditions, la seconde équation s'écrit $\ln(xy) = \ln 20$, soit $xy = 20$.

Résoudre. x et y sont les racines de $t^2 - 9t + 20 = 0$, soit 4 et 5.

Vérifier. Les deux sont strictement positifs. Donc $S = \{(4, 5), (5, 4)\}$.

Vérifie : Un couple suspect

Le couple $(-2, -3)$ vérifie $x + y = -5$ et $xy = 6$. Est-il solution du système $\begin{cases} x + y = -5 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$?

A. Oui, car $xy = 6$ donne $\ln(xy) = \ln 6$.

Faux.
$\ln x + \ln y = \ln(xy)$ exige $x > 0$ et $y > 0$.

B. Non : $\ln(-2)$ et $\ln(-3)$ n'existent pas.

Juste.
Juste : les conditions $x > 0$ et $y > 0$ ne sont pas remplies.

C. Oui, car -2 et -3 sont racines de $t^2 + 5t + 6 = 0$.

Faux.
Être racines de l'équation ne suffit pas : il faut aussi vérifier les conditions.

D. Non, car $(-2) + (-3) \neq -5$.

Faux.
La somme vaut bien -5 ; le problème vient des logarithmes.

Correction
Le système n'a de sens que pour $x > 0$ et $y > 0$. Le couple $(-2, -3)$ ne vérifie pas ces conditions : il n'est pas solution.

Ici, aucun couple ne convient, car deux réels strictement positifs ont une somme strictement positive.

À toi : Rédige un système

Rédige la résolution du système $\begin{cases} \ln(xy) = 5 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$, d'inconnues réelles $x > 0$ et $y > 0$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Avec $x > 0$ et $y > 0$, transforme chaque équation par les règles de calcul.

Indice 2

Pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$: tu obtiens un système linéaire.

Indice 3

Point délicat : reviens à x et y avec le nombre e, puis vérifie les conditions.

Réponse

« **Conditions.** Soit $x > 0$ et $y > 0$. Alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

Changer d'inconnues. Avec $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient $X + Y = 5$ et $X - Y = 1$. Donc $X = 3$ et $Y = 2$.

Revenir. $x = e^3$ et $y = e^2$, strictement positifs.

Conclusion. Donc $S = \{(e^3, e^2)\}$. »

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- $\ln$ est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 ; elle est strictement croissante.
- Pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; pour r rationnel, $\ln(a^r) = r \ln a$.
- Une équation ou une inéquation commence par son domaine et finit par l'ensemble S.
- Limites de référence : $\ln x \to +\infty$ en $+\infty$ et $\ln x \to -\infty$ en 0^+ ; $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$ et $x \ln x \to 0$ en 0^+ ; $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ en 0.
- Sur un intervalle : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ si $u > 0$; primitives de $\dfrac{u'}{u}$: $\ln|u| + k$ si u ne s'annule pas.
- Une inégalité se démontre par l'étude d'une fonction écart.
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$: regarde le signe de $\ln a$.

Le mot du prof. Tu as construit une fonction à partir d'une seule définition, puis tu as tout démontré. Tu sais maintenant résoudre, calculer des limites et étudier des fonctions qui la contiennent. Au chapitre suivant, la fonction réciproque de $\ln$ t'attend : la fonction exponentielle.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions logarithmiques » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)