BURHAN

Résumé : Fonctions exponentielles et puissances réelles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Semestre 1

L'exponentielle, réciproque du logarithme

> **À retenir**
>
> Une seule équivalence porte tout le chapitre. Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:
>
> $$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$
>
> Pour prouver une propriété de $\exp$, traduis-la en une propriété de $\ln$, déjà démontrée.

Définition : Fonction exponentielle népérienne

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (chapitre des logarithmes).

On appelle **fonction exponentielle népérienne**, notée $\exp$, sa fonction réciproque. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, +\infty[$:

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Propriété : Premières propriétés de la fonction exponentielle

- Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$.
- Pour tout réel $y > 0$: $\exp(\ln y) = y$.
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$, où e est le réel tel que $\ln e = 1$.
- $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b : $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$, et $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$.

Exemple

- Comme $\ln 8 = 3 \ln 2$, l'équivalence donne $\exp(3 \ln 2) = 8$.
- Comme $\ln \dfrac{1}{5} = -\ln 5$, on obtient $\exp(-\ln 5) = \dfrac{1}{5}$.

Attention au sens : $\ln\big(\exp(x)\big) = x$ vaut pour tout réel x, mais $\exp(\ln y) = y$ exige $y > 0$.

Règles de calcul avec e^x

Propriété : Relation fonctionnelle de l'exponentielle

Pour tous réels a et b et tout rationnel r :

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b),\\ \exp(-a) &= \frac{1}{\exp(a)},\\ \exp(a-b) &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)},\\ \exp(ra) &= \big(\exp(a)\big)^r.\end{aligned}$$

Définition : Notation e^x

Pour tout réel x, on note $e^x = \exp(x)$.

Conséquence (F03) : cette notation prolonge les puissances rationnelles de e, car pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(r) = \exp(r \times 1) = \big(\exp(1)\big)^r = e^r$ (F03).

Avec elle, pour tous réels a et b, tout rationnel r et tout réel $y > 0$:

$$\begin{aligned}e^{a+b} &= e^a e^b,\\ e^{-a} &= \frac{1}{e^a},\\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b},\\ \big(e^a\big)^r &= e^{ra},\\ \ln\big(e^a\big) &= a,\\ e^{\ln y} &= y.\end{aligned}$$

Exemple

Pour tout réel x, on regroupe les exposants :

$$\begin{aligned}&\frac{e^{2x+1}\,(e^{-x})^3}{e^{1-x}}\\ &= e^{2x+1-3x-(1-x)}\\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

Chaque égalité cite une règle : produit, puissance, puis quotient.

Attention : Une somme d'exponentielles ne se regroupe pas

✗ $e^x + e^{2x} = e^{3x}$. En $x = 0$, le membre de gauche vaut 2, celui de droite vaut 1.

✓ Seul le **produit** se regroupe : $e^x \times e^{2x} = e^{3x}$. De même, $(e^x)^4 = e^{4x}$, et non e^{x+4}.

Équations, inéquations et systèmes

Propriété : Équations et inéquations exponentielles

Soit A, B et k trois réels. Pour tout réel x :

- $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$, et $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$.
- Si $k > 0$: $e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$; $e^x < k \Leftrightarrow x < \ln k$; $e^x > k \Leftrightarrow x > \ln k$.
- Si $k \leq 0$: l'équation $e^x = k$ n'a aucune solution réelle, et $e^x > k$ pour tout réel x.

Méthode : équation ou inéquation, au besoin par X = e^x

1. **Domaine** : écris l'ensemble où chaque membre a un sens.
2. **Forme** : ramène-toi à $e^A = e^B$, $e^A < e^B$ ou $e^x = k$. Si e^x et e^{2x} (ou e^{-x}) apparaissent ensemble, pose $X = e^x$, avec $X > 0$.
3. **Équivalences** : justifie chacune par la stricte croissance de $\exp$ (équations et inéquations exponentielles, F05). Rejette toute valeur $X \leq 0$.
4. **Conclusion** : écris l'ensemble S des solutions.

Rédaction : « comme $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$ ».

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 3e^{-x} = 2$.

Forme. Soit x un réel. On multiplie par $e^x > 0$: l'équation équivaut à $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$. Avec $X = e^x$, on obtient $X^2 - 2X - 3 = 0$.

Racines. $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc $X = 3$ ou $X = -1$. La valeur -1 est rejetée, car $X > 0$.

Conclusion. $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$, d'où $S = \{\ln 3\}$.

Variante. $e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)$, avec $e^x + 1 > 0$. Donc $e^{2x} - 2e^x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 3$.

Attention : Une exponentielle n'est jamais négative

✗ « $e^x = -1$, donc $x = \ln(-1)$ ». Le réel $\ln(-1)$ n'existe pas.

✓ Pour tout réel x, $e^x > 0$: l'équation $e^x = k$ n'a aucune solution si $k \leq 0$. Après un changement d'inconnue $X = e^x$, toute racine négative ou nulle est rejetée, et tu l'écris.

Méthode : système en e^x et e^y

1. **Nouvelles inconnues** : $X = e^x$ et $Y = e^y$, toutes deux strictement positives.

2. **Système algébrique** : résous-le en X et Y, par combinaison ou substitution.
3. **Tri** : ne garde que les couples où $X > 0$ et $Y > 0$.
4. **Retour** : $x = \ln X$ et $y = \ln Y$, puis contrôle dans le système de départ.

Rédaction : « on pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, avec $X > 0$ et $Y > 0$ ».

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} e^x + 3e^y = 10 \\ e^x - e^y = 2 \end{cases}$$

Résolution. Avec $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$, la différence des deux lignes donne $4Y = 8$, soit $Y = 2$. Puis $X = 2 + Y = 4$. Les deux valeurs sont strictement positives.

Conclusion. $x = \ln 4 = 2\ln 2$ et $y = \ln 2$: le couple $(2\ln 2, \ln 2)$ est l'unique solution.

Limites et croissances comparées

Propriété : Limites de la fonction exponentielle aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Propriété : Croissances comparées de l'exponentielle et des puissances entières

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

En particulier, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

En plus l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

En moins l'infini

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

En 0 (nombre dérivé de exp)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Méthode : lever une forme indéterminée

1. **Repérer** la forme indéterminée et la borne.
2. **Factoriser** par le terme qui l'emporte, ou faire apparaître $\frac{e^t - 1}{t}$ avec t qui tend vers 0.
3. **Citer** la croissance comparée ou la limite de référence en 0 employée, avec sa borne et son exposant.
4. **Conclure** par les opérations sur les limites, facteur par facteur.

Rédaction : « par croissance comparée, $\frac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ».

Exemple

En $+\infty$. Pour $x > 0$, $\frac{e^x - x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x}$. Par croissance comparée ($n = 2$), le premier terme tend vers $+\infty$; le second tend vers 0. Donc la limite vaut $+\infty$.

En 0. Pour $x \neq 0$, $\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}$. Avec $t = 2x$, qui tend vers 0, le quotient $\frac{e^t - 1}{t}$ tend vers 1 : c'est le nombre dérivé de $\exp$ en 0. Donc la limite vaut 2.

Attention : Une croissance comparée se cite après factorisation

✗ « $\lim_{x \to +\infty} \left(2x^5 - e^x\right) = -\infty$, car l'exponentielle gagne. »

✓ Pour tout $x > 0$, $2x^5 - e^x = e^x \left(2\,\frac{x^5}{e^x} - 1\right)$. Par croissance comparée (F07) avec $n = 5$, $\frac{x^5}{e^x}$ tend vers 0. La parenthèse tend vers -1 et e^x vers $+\infty$: la limite vaut $-\infty$.

Dérivée de e^u, primitives de u'e^u

Théorème : Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\exp'(x) = e^x$.

En particulier, $\exp'(0) = 1$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Propriété : Dérivée de e^u et primitives de u'e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $\left(e^u\right)'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$.

- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sur I ; les primitives de cette fonction sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- En particulier, pour des réels a et b avec $a \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{1}{a} e^{ax+b}$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est de la forme e^u, avec $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, dérivable, et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Sa dérivée est

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

Elle est strictement négative, car $e^{\frac{1}{x}} > 0$: la fonction est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Méthode : primitive de u′e^u, constante à ajuster

1. **Repérer** l'exposant u, dérivable sur un intervalle I, et calculer u'.
2. **Écrire** la fonction sous la forme $\lambda\, u'\, e^u$, avec λ réel constant.
3. **Conclure** avec les primitives de $u'\, e^u$ (F09) : $\lambda\, e^u$ est une primitive sur I ; les autres s'obtiennent en ajoutant une constante k.
4. **Vérifier** en dérivant.

Rédaction : « on pose $u(x) = \ldots$; u est dérivable sur I et $u'(x) = \ldots$ ».

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, cherchons une primitive de $x \mapsto (x+1)\, e^{x^2+2x}$. La fonction $u : x \mapsto x^2 + 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2(x+1)$. La fonction s'écrit donc $\dfrac{1}{2}\, u'\, e^u$. Une primitive est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\, e^{x^2+2x}.$$

Autre cas : une primitive de $x \mapsto e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{3}\, e^{-3x+2}$.

Attention : La dérivée de e^u garde le facteur u′

✗ $\left(e^{\cos x}\right)' = e^{\cos x}$.

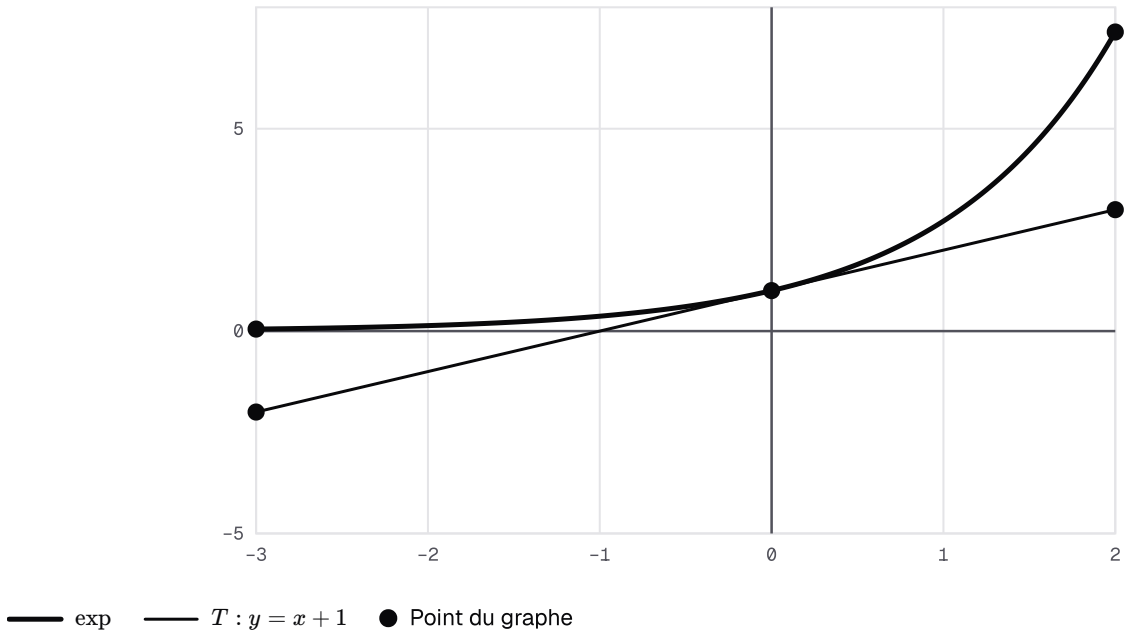
✓ $\left(e^{\cos x}\right)' = -\sin x\, e^{\cos x}$: la dérivée de l'exposant vient en facteur. En $x = \dfrac{\pi}{2}$, la bonne dérivée vaut -1, la fausse vaut 1. Dans l'autre sens, n'oublie pas le facteur $\dfrac{1}{a}$ pour primitiver e^{ax+b}.

Étudier une fonction, prouver une inégalité

Propriété : Étude et courbe de la fonction exponentielle

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $\exp$ dans un repère orthonormé.

- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\exp'' = \exp > 0$: $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente $T : y = x + 1$ au point d'abscisse 0.
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$; en $+\infty$, $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



La courbe de exp au-dessus de sa tangente T d'équation y = x + 1 au point (0, 1) ; vers la gauche, elle se rapproche de l'axe des abscisses, son asymptote.

Méthode : étudier une fonction comportant e^u

1. **Limites** aux bornes, en citant les croissances comparées.
2. **Dérivée** avec $(e^u)' = u'\,e^u$, puis factorisation par $e^{u(x)}$, strictement positif.
3. **Signe** : celui de l'autre facteur ; dresse le tableau de variations.
4. **Courbe** : asymptotes, branches infinies, tangentes utiles.

Rédaction : « comme $e^{u(x)} > 0$, $f'(x)$ a le signe de… ».

Exemple

Étudions $\varphi : x \mapsto (x-2)\,e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Limites. En $+\infty$, les deux facteurs tendent vers $+\infty$. En $-\infty$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}\,(2x)\,e^{2x} - 2e^{2x}$ tend vers 0, par croissance comparée (F07) avec $t = 2x$: la droite $y = 0$ est asymptote.

Dérivée. Pour tout réel x, $\varphi'(x) = e^{2x} + 2(x-2)\,e^{2x} = (2x-3)\,e^{2x}$, du signe de $2x - 3$.

Variations. φ décroît sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$, croît sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$; son minimum vaut $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,e^{3}$.

Méthode : prouver une inégalité par étude de fonction

1. **Fonction auxiliaire** : écris l'inégalité sous la forme $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle donné, où g est la différence des deux membres.
2. **Variations** : étudie le signe de g'.
3. **Minimum** : lis-le dans le tableau et montre qu'il est positif ou nul.
4. **Conclusion** : nomme l'intervalle et le cas d'égalité.

Rédaction : « g admet un minimum égal à 0, donc pour tout x de l'intervalle, $g(x) \geq 0$ ».

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tout réel x, $e^{x-1} \geq x$.

Fonction auxiliaire. Soit $g : x \mapsto e^{x-1} - x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto e^{x-1} - 1$.

Signe. Comme $\exp$ est strictement croissante (F05), $e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x > 1$. Donc g décroît strictement sur $]-\infty, 1]$ et croît strictement sur $[1, +\infty[$.

Conclusion. Le minimum de g vaut $g(1) = e^{0} - 1 = 0$. Donc $e^{x-1} \geq x$ pour tout réel x, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

L'exponentielle de base a

Définition : Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^{x} = e^{x \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^{x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **fonction exponentielle de base** a. Pour $a = e$, on retrouve $x \mapsto e^{x}$, car $\ln e = 1$.

Propriété : Règles de calcul des puissances à exposant réel

Soit a et b deux réels strictement positifs, et x et y deux réels.

- $a^x > 0$ et $\ln\left(a^x\right) = x \ln a$.
- $a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$.
- Si x est rationnel, le réel a^x de F11 est égal à la puissance rationnelle de a déjà connue.

Propriété : Dérivée, variations et limites de x ↦ a^x

Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\left(a^x\right)' = (\ln a)\, a^x$.

- Si $a > 1$: elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- Si $a = 1$: $a^x = 1$ pour tout réel x.

Propriété : Exponentielle de base a et logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

La fonction $x \mapsto a^x$, de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, est la fonction réciproque de $\log_a$. En particulier, pour tout réel x et tout réel $y > 0$: $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y$.

Méthode : revenir à l'exponentielle pour a^x

1. **Condition** : vérifie que la base est strictement positive (et différente de 1 pour $\log_a$).
2. **Réécriture** : $a^x = e^{x \ln a}$.
3. **Outils** : équivalences, dérivée de e^u, limites de l'exponentielle.
4. **Sens** : le signe de $\ln a$ décide du sens des inégalités.

Rédaction : « comme $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$ pour tout réel x ».

Exemple

Équation. Comme $3 > 0$ et $3 \neq 1$: $3^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$, soit environ $1{,}77$.

Inéquation. Pour tout réel x, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = e^{-x \ln 2}$ et $4 = e^{2 \ln 2}$. Par stricte croissance de $\exp$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \Leftrightarrow -x \ln 2 > 2 \ln 2.$$

Comme $\ln 2 > 0$, cela équivaut à $x < -2$. L'ensemble des solutions est $]-\infty, -2[$: la base est inférieure à 1, le sens change.

Attention : Ne confonds pas a^x et x^α

✗ $(5^x)' = x\,5^{x-1}$.

✓ $(5^x)' = (\ln 5)\,5^x$: la **base** est fixe, l'exposant varie. La formule $\alpha\,x^{\alpha-1}$ concerne $x \mapsto x^\alpha$, où l'**exposant** est fixe. En $x = 1$, la fausse dérivée vaut 1, la vraie vaut $5\ln 5$.

Les puissances réelles

Définition : Fonction puissance d'exposant réel

Soit α un réel. Pour tout réel $x > 0$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (F11, avec la base x).

La fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $]0, +\infty[$, est appelée **fonction puissance d'exposant** α. D'après F12, appliquée à la base x : pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β,

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, \\ \left(x^\alpha\right)^\beta &= x^{\alpha\beta}, \\ (xy)^\alpha &= x^\alpha y^\alpha, \\ \ln\left(x^\alpha\right) &= \alpha \ln x. \end{aligned}$$

Propriété : Dérivée, variations et limites de x ↦ x^α

Soit α un réel. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\left(x^\alpha\right)' = \alpha\,x^{\alpha-1}$.

- Si $\alpha > 0$: elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.
- Si $\alpha < 0$: elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha = 0$: $x^0 = 1$ pour tout $x > 0$.

Propriété : Dérivée de u^α et primitives de u'u^α

Soit α un réel et u une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

- La fonction $x \mapsto \left(u(x)\right)^\alpha$ est dérivable sur I et $\left(u^\alpha\right)' = \alpha\,u'\,u^{\alpha-1}$ sur I.
- Si $\alpha \neq -1$, la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $u'\,u^\alpha$ sur I.

Méthode : primitive de u'u^α

1. **Repérer** u et calculer u' ; vérifie que $u > 0$ sur tout l'intervalle I.

2. **Écrire** la fonction sous la forme $\lambda\, u'\, u^{\alpha}$, avec $\alpha \neq -1$.
3. **Conclure** avec F17 : $\lambda\, \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive sur I.
4. **Vérifier** en dérivant.

Rédaction : « u est dérivable et strictement positive sur I, et $\alpha \neq -1$, donc… ».

Exemple

Dérivée. Sur $\mathbb{R}$, $u : x \mapsto 1 + e^{x}$ est dérivable et strictement positive. Donc $x \mapsto (1+e^{x})^{\pi}$ a pour dérivée $x \mapsto \pi\, e^{x}\, (1+e^{x})^{\pi-1}$.

Primitive. Sur $]1, +\infty[$, $\ln x > 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^{\sqrt{2}}}{x}$ s'écrit $u'\, u^{\sqrt{2}}$ avec $u : x \mapsto \ln x$, et $\sqrt{2} \neq -1$. Une primitive est

$$x \mapsto \frac{(\ln x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}.$$

Attention : Une puissance réelle exige une base strictement positive

✗ « $(-8)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(-8)}$ ». Le réel $\ln(-8)$ n'existe pas.

✓ L'écriture $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ ne vaut que pour $x > 0$. Les règles des puissances réelles (F15) et la dérivée $\alpha\, x^{\alpha-1}$ ne s'emploient que sur $]0, +\infty[$.

Croissances comparées avec des puissances réelles

Propriété : Croissances comparées avec des puissances réelles

Soit α un réel strictement positif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0,$$
$$\lim_{x \to 0^{+}} x^{\alpha} \ln x = 0.$$

À retenir

En $+\infty$, pour tout réel $\alpha > 0$, e^{x} l'emporte sur x^{α}, qui l'emporte sur $\ln x$. En 0^{+}, x^{α} l'emporte sur $\ln x$. L'hypothèse $\alpha > 0$ est à écrire à chaque citation.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^{3}}{x}$.

Réécriture. Pour $x > 0$, $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$, donc

$$\frac{(\ln x)^3}{x} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^3.$$

Conclusion. Par croissance comparée (F18) avec $\alpha = \dfrac{1}{3} > 0$, le quotient intérieur tend vers 0. Son cube aussi : la limite vaut 0.

Exemple

En 0^+, $\sqrt{x}\,\ln x = x^{\frac{1}{2}}\ln x$ tend vers 0, par croissance comparée (F18) avec $\alpha = \dfrac{1}{2} > 0$.

Avec $\alpha = -1$, la conclusion tombe : $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ en 0^+.

Formulaire et réflexes d'examen

Exponentielle, sur R

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = u'\,e^u$$

Base a, avec a > 0

$$(a^x)' = (\ln a)\,a^x$$

Puissance réelle, pour x > 0

$$(x^\alpha)' = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

Composée, si u > 0

$$(u^\alpha)' = \alpha\,u'\,u^{\alpha-1}$$

Primitive de e^(ax + b), avec a non nul

$$\left(\frac{1}{a}\,e^{ax+b}\right)' = e^{ax+b}$$

À retenir : Coin examen

Dans 10 des 16 sujets consultés (sessions 2017-2022 et 2024-2025), l'exponentielle porte une fonction, une intégrale ou une suite étudiée. On y demande de « montrer que », puis d'« en déduire ». Ces questions passent par une fonction auxiliaire, des limites par croissance comparée et une étude de variations par le signe de la dérivée.

Rédige chaque réponse comme une preuve courte. Nomme la condition utilisée : $X > 0$, $a > 0$, $x > 0$ ou $u > 0$. Cite le résultat employé avec sa borne. Termine par une phrase de conclusion, puis contrôle une valeur en remplaçant.