BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Niveau examen	5

Exercice 1 7,5 pts

Une fonction auxiliaire, puis une asymptote oblique

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{x} + 2x - 3.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + (1 - 2x)e^{-x},$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. On note Δ la droite d'équation $y = x$.

1. a) 0,75 pts

Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, et calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

g est une somme de fonctions dérivables ; le signe de $g'(x)$ s'obtient directement. Pour les limites, utilise F06 (limites de l'exponentielle aux bornes).

1. b) 1 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$. On donne $1{,}64 < e^{0{,}5} < 1{,}65$ et $1{,}82 < e^{0{,}6} < 1{,}83$.

INDICE

Pense au théorème de la bijection, en t'appuyant sur la continuité, la stricte croissance et les limites de g. Utilise ensuite les valeurs données pour trouver le signe de $g(0{,}5)$ et de $g(0{,}6)$.

1. c) 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Compare $g(x)$ à $g(\alpha) = 0$ en utilisant la stricte croissance de g.

2. a) 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Étudie $f(x) - x = e^{-x} - 2x\,e^{-x}$. La limite de $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$ en $+\infty$ découle de F07 (croissances comparées).

2. b) 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ.

INDICE

Le signe de $f(x) - x$ est celui de $1 - 2x$, car $e^{-x} > 0$.

2. c) 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

La forme indéterminée se lève en écrivant $f(x) = e^{-x}\left(x\,e^{x} + 1 - 2x\right)$, puis avec la limite en $-\infty$ de F07 (croissances comparées).

3. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

INDICE

Dérive $(1-2x)e^{-x}$ comme un produit, puis factorise $f'(x)$ par e^{-x}.

3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$: utilise la question 1. c). Repère où f' s'annule.

3. c) 0,75 pts

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha-2\alpha^{2}}{3-2\alpha}$.

INDICE

De $g(\alpha)=0$, tire $e^{\alpha} = 3-2\alpha$, puis une écriture de $e^{-\alpha}$.

3. d) 0,5 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

INDICE

Factorise $1+\alpha-2\alpha^{2}$ à l'aide de sa racine évidente 1. Le minimum de f est $f(\alpha)$.

Exercice 2 8 pts

Un logarithme d'exponentielle, et une suite qui s'en approche

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(e^x + 3\right) - 1$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a) 0,5 pts

Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Regarde le signe de $e^x + 3$. Pour la limite, cherche celle de l'expression sous le logarithme, puis utilise la continuité de $\ln$.

1. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x - 1 + \ln\left(1 + 3e^{-x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Mets e^x en facteur sous le logarithme. Utilise ensuite $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour deux réels strictement positifs, et $\ln\left(e^x\right) = x$.

1. c) 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ.

INDICE

Compare $1 + 3e^{-x}$ à 1, puis utilise le signe de $\ln$ de part et d'autre de 1.

2. a) 0,5 pts

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$. En déduire le sens de variation de f.

INDICE

Applique la dérivée de $\ln u$ avec $u(x) = e^x + 3$.

2. b) 0,25 pts

Montrer que $0 < f'(x) < 1$ pour tout réel x.

INDICE

Compare le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$.

2. c) 1 pts

Montrer que $1 < e < 4$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution réelle ℓ, que $\ell = \ln \dfrac{3}{e - 1}$ et que $\ell > 0$.

INDICE

Pour $e < 4$, applique l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ (F10, étude de l'exponentielle : tangente en 0) en $t = -\dfrac{1}{2}$. Écris ensuite $f(x) = x$ sous la forme $\ln\left(e^x + 3\right) = x + 1$, puis passe à l'exponentielle.

2. d) 0,75 pts

Montrer que $f(x) > x$ pour tout $x < \ell$.

INDICE

Reprends la chaîne d'équivalences de 2. c) avec des inégalités : chaque fonction utilisée est strictement croissante.

3. a) 0,75 pts

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < \ell$.

INDICE

Pour l'hérédité, applique la fonction strictement croissante f à l'encadrement, puis calcule $f(0)$ et $f(\ell)$.

3. b) 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Utilise la question 2. d) avec $x = u_n$.

3. c) 1 pts

En déduire que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

INDICE

Une suite croissante et majorée converge. Passe ensuite à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, grâce à la continuité de f.

3. d) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x \in [0, \ell]$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{e}$.

INDICE

Écris $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{e^x + 3}$ pour obtenir le sens de variation de f'. Calcule ensuite $e^\ell + 3$ à l'aide de $e^\ell = \dfrac{3}{e - 1}$.

3. e) 1 pts

En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 < \ell - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{e}(\ell - u_n)$, puis que $0 < \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{e^n}$.

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis à f sur $[u_n, \ell]$, en vérifiant ses hypothèses. Termine par une récurrence.

Exercice 3 — 7,25 pts

Un logarithme amorti par une exponentielle

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}-2\ln x.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=e^{-2x}\ln x,$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a) — 0,75 pts

Étudier les variations de g, et calculer ses limites en 0 à droite et en $+\infty$.

INDICE

Calcule $g'(x)$: ses deux termes ont le même signe sur $]0,+\infty[$.

1. b) — 1 pts

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$, et que $1{,}4<\alpha<1{,}5$. On donne $0{,}33<\ln 1{,}4<0{,}34$ et $0{,}40<\ln 1{,}5<0{,}41$.

INDICE

Le théorème de la bijection s'applique, car g est continue et strictement décroissante. Utilise ensuite les valeurs données, avec $\frac{1}{1{,}4}=\frac{5}{7}$ et $\frac{1}{1{,}5}=\frac{2}{3}$.

1. c) — 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Compare $g(x)$ à $g(\alpha)=0$, en tenant compte du sens de variation de g.

2. a) — 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Cherche séparément la limite de chaque facteur en 0 à droite.

2. b) — 1 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{e^{2x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $\frac{x}{e^{2x}}$, pose $X=2x$ et utilise F07 (croissances comparées). Pour $\frac{\ln x}{x}$, utilise F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) avec $\alpha=1$.

3. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, $f'(x)=e^{-2x}g(x)$.

INDICE

Dérive le produit ; la dérivée de $x\mapsto e^{-2x}$ vient de F09 (dérivée de e^u).

3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Comme $e^{-2x}>0$, le signe de $f'(x)$ est donné par la question 1. c). Repère où f' s'annule.

3. c) 1 pts

Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha\,e^{2\alpha}}$, puis que $\dfrac{1}{3e^3}<f(\alpha)<\dfrac{1}{2{,}8\,e^{2{,}8}}$.

INDICE

De $g(\alpha)=0$, tire $\ln\alpha$. Pour l'encadrement, étudie le sens de variation de $t\mapsto 2t\,e^{2t}$ sur $]0,+\infty[$.

4. a) 0,5 pts

On donne $e^3<21$. Montrer que $f(\alpha)>\dfrac{1}{100}$.

INDICE

Utilise la minoration de 3. c), puis compare $3e^3$ à 100.

4. b) 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{100}$ admet exactement deux solutions dans $]0,+\infty[$.

INDICE

Sépare $]0,1]$, où $f(x)\leq 0$, puis $[1,\alpha]$ et $[\alpha,+\infty[$: sur chacun de ces deux derniers intervalles, f est continue et strictement monotone.

Exercice 4 7,5 pts

Une bijection explicite, et la dérivée de sa réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x} - 9e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Repère le comportement de e^{x} et de e^{-x} à chaque borne avec F06 (limites de l'exponentielle aux bornes), par composée pour e^{-x}.

1. b) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \neq 0$, sépare $\dfrac{f(x)}{x}$ en deux quotients. En $-\infty$, le changement de variable $t = -x$ ramène le second quotient à F07 (croissances comparées).

2. a) 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{x} + 9e^{-x}$. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

INDICE

Dérive $x \mapsto e^{-x}$ avec F09 (dérivée de e^{u}), en nommant u et u'. Le signe de $f'(x)$ se lit sans calcul.

2. b) 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

INDICE

Multiplie les deux membres par e^{x}, qui est strictement positif, puis utilise F05 (équations et inéquations exponentielles). Pour le signe, compare x à la solution grâce à la stricte croissance de f.

2. c) 0,5 pts

On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ en A a pour équation $y = 6x - 6\ln 3$.

INDICE

Calcule $f'(\ln 3)$ en simplifiant $e^{\ln 3}$ et $e^{-\ln 3}$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle, et F03, relation fonctionnelle).

3. a) 0,75 pts

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = e^x + 9e^{-x} - 6$. Montrer que, pour tout réel x, $k'(x) = f(x)$. En déduire que $k(x) \geq 0$ pour tout réel x, avec égalité seulement pour $x = \ln 3$.

INDICE

Le signe de $k'(x)$ est donné par 2. b). Le minimum de k est atteint là où sa dérivée change de signe.

3. b) 0,75 pts

On pose, pour tout réel x, $h(x) = f(x) - (6x - 6\ln 3)$. Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de T.

INDICE

Calcule $h'(x)$ et reconnais l'expression de 3. a). Calcule ensuite $h(\ln 3)$ pour lire le signe de $h(x)$.

4. a) 0,5 pts

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa réciproque.

INDICE

Rassemble trois faits établis plus haut : la continuité de f, sa stricte croissance sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et ses limites aux bornes (1. a)).

4. b) 1 pts

Soit y un réel. Montrer que $f(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} - y\,e^x - 9 = 0$. En déduire que $f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{2}\right)$.

INDICE

Pose $X = e^x$: tu obtiens une équation du second degré en X. Le produit de ses racines indique laquelle peut être égale à e^x.

4. c) 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 36$. En déduire que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel y, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + 36}}$.

INDICE

Une différence de deux carrés se factorise ; utilise $e^x e^{-x} = 1$. Applique ensuite le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, rappelé dans le cours, et exprime $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ à l'aide de y.

4. d) 0,5 pts

Calculer $f^{-1}(8)$, puis donner une équation de la tangente T' à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 8.

INDICE

Utilise 4. b), puis vérifie le résultat en calculant son image par f. Le coefficient directeur de T' vient de 4. c).

Exercice 5 7,25 pts

Une famille d'équations, et deux suites de solutions

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on note f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^x - nx.$$

On donne $2{,}7 < e < 2{,}8$.

1. a) 0,75 pts

Montrer que f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$, étudier son sens de variation, et montrer que son minimum vaut $n(1 - \ln n)$.

INDICE

Le signe de $f_n'(x) = e^x - n$ s'obtient avec F05 (équations et inéquations exponentielles), en comparant x à $\ln n$.

1. b) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

INDICE

La forme est indéterminée : factorise par x, puis utilise F07 (croissances comparées).

1. c) 1 pts

Montrer que $\ln n > 1$. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0, +\infty[$: une solution u_n dans $]0, 1[$ et une solution v_n dans $]\ln n, +\infty[$.

INDICE

Compare n à e avec la valeur donnée. Calcule ensuite $f_n(0)$, $f_n(1)$ et le signe du minimum, puis raisonne séparément sur $[0, 1]$, sur $[1, \ln n]$ et sur $[\ln n, +\infty[$.

2. a) 1 pts

Montrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

INDICE

Traduis $f_n(u_n) = 0$ par une égalité entre e^{u_n} et $n\,u_n$. Compare ensuite $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, en te souvenant du sens de variation de f_{n+1} sur $[0, 1]$.

2. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $0 < u_n < \dfrac{e}{n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

INDICE

Écris u_n à l'aide de e^{u_n} et de n, puis majore e^{u_n} grâce à $u_n < 1$.

2. c) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n$.

INDICE

Exprime $n\,u_n$ à l'aide de e^{u_n}, puis utilise la continuité de $\exp$ en 0.

2. d) 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $n\,(n\,u_n - 1) = n\,u_n \times \dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(n\,u_n - 1)$.

INDICE

Remplace $n\,u_n$ par e^{u_n} dans la parenthèse. Pour la limite, l'énoncé F08 (dérivée de l'exponentielle) fournit la limite de $\dfrac{e^x-1}{x}$ en 0.

3. a) 0,25 pts

Montrer que la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

INDICE

Utilise la minoration de v_n obtenue en 1. c).

3. b) 1 pts

Montrer que $v_n = \ln n + \ln v_n$. Montrer ensuite que $\ln t < \dfrac{t}{2}$ pour tout réel $t > 0$, et en déduire que $\ln n < v_n < 2\ln n$.

INDICE

Applique $\ln$ à l'égalité qui traduit $f_n(v_n) = 0$. Pour l'inégalité, étudie la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{2} - \ln t$ sur $]0, +\infty[$; le signe de son minimum se justifie avec la valeur donnée de e.

3. c) 0,75 pts

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\ln n} = 1$.

INDICE

Écris $\dfrac{v_n}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln v_n}{\ln n}$ et encadre $\ln v_n$ grâce à 3. b). Le quotient $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}$ relève d'une croissance comparée du logarithme, avec $y = \ln n$.