BURHAN

# Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Fonctions exponentielles et puissances réelles | Niveau examen | 5 |

**Exercice 1** 7,5 pts

## Une fonction auxiliaire, puis une asymptote oblique

**Partie A.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + 2x - 3.$$

**Partie B.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + (1 - 2x)e^{-x},$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. On note $\Delta$ la droite d'équation $y = x$.

**1. a)** 0,75 pts

Étudier le sens de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$, et calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

$g$ est une somme de fonctions dérivables ; le signe de $g'(x)$ s'obtient directement. Pour les limites, utilise F06 (limites de l'exponentielle aux bornes).

CORRIGÉ

**Variations.** La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F08, dérivée de l'exponentielle) et, pour tout réel $x$, $g'(x) = e^x + 2$. Comme $e^x > 0$, $g'(x) > 0$ pour tout réel $x$.

**En $-\infty$.** $e^x$ tend vers $0$ (F06, limites de l'exponentielle aux bornes) et $2x - 3$ vers $-\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

**En $+\infty$.** $e^x$ et $2x - 3$ tendent vers $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**Conclusion.** $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**1. b)** 1 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$, et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$. On donne $1{,}64 < e^{0{,}5} < 1{,}65$ et $1{,}82 < e^{0{,}6} < 1{,}83$.

INDICE

Pense au théorème de la bijection, en t'appuyant sur la continuité, la stricte croissance et les limites de $g$. Utilise ensuite les valeurs données pour trouver le signe de $g(0{,}5)$ et de $g(0{,}6)$.

CORRIGÉ

**Existence et unicité.** La fonction $g$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur :

$$g(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g\right[ = \mathbb{R}.$$

Cet intervalle contient $0$ : le réel $0$ a donc un unique antécédent $\alpha$ par $g$.

**Encadrement.** Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned} g(0{,}5) &= e^{0{,}5} - 2 \\ &< 1{,}65 - 2 \\ &= -0{,}35 < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0{,}6) &= e^{0{,}6} - 1{,}8 \\ &> 1{,}82 - 1{,}8 \\ &= 0{,}02 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $g(0{,}5) < g(\alpha) < g(0{,}6)$. Comme $g$ est strictement croissante, $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

**Conclusion.** L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$, et $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

**1. c)** 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs du réel $x$.

INDICE

Compare $g(x)$ à $g(\alpha) = 0$ en utilisant la stricte croissance de $g$.

CORRIGÉ

La fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\alpha) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ :

- si $x < \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$ ;
- si $x > \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$.

**Conclusion.** $g(x) < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

### 2. a) 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\Delta$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Étudie $f(x)-x = e^{-x} - 2x\,e^{-x}$. La limite de $x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$ en $+\infty$ découle de F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

**Écart à $\Delta$.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (1-2x)e^{-x} \\ &= e^{-x} - 2 \times \frac{x}{e^{x}}. \end{aligned}$$

**Limite de l'écart.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $e^{-x}$ tend vers $0$ (F06, limites de l'exponentielle aux bornes, et limite d'une composée). D'après F07 (croissances comparées) avec $n=1$, $\dfrac{e^{x}}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{x}{e^{x}}$ tend vers $0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = 0.$$

**Limite de $f$.** Comme $f(x) = x + \big(f(x)-x\big)$, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Conclusion.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et la droite $\Delta$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

### 2. b) 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\Delta$.

INDICE

Le signe de $f(x)-x$ est celui de $1-2x$, car $e^{-x} > 0$.

CORRIGÉ

**Signe de l'écart.** Pour tout réel $x$, $f(x)-x = (1-2x)e^{-x}$, avec $e^{-x} > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle). Le signe de $f(x)-x$ est donc celui de $1-2x$.

**Conclusion.**

- Sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\Delta$.
- Sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $\Delta$.
- $\mathcal{C}$ et $\Delta$ se coupent au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

### 2. c) 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

La forme indéterminée se lève en écrivant $f(x) = e^{-x}\left(x\,e^{x} + 1 - 2x\right)$, puis avec la limite en $-\infty$ de F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

**Factorisation.** Pour tout réel $x$, comme $e^{-x}e^{x} = 1$ (F04, règles de calcul de la notation $e^{x}$) :

$$f(x) = e^{-x}\left(x\,e^{x} + 1 - 2x\right).$$

**Limite de $f$.** Quand $x$ tend vers $-\infty$, $x\,e^{x}$ tend vers $0$ (F07, croissances comparées, $n = 1$) et $1 - 2x$ vers $+\infty$ : la parenthèse tend vers $+\infty$. Comme $e^{-x}$ tend vers $+\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.** Pour $x < 0$ :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \left(\frac{1}{x} - 2\right)e^{-x}.$$

La parenthèse tend vers $-2$ et $e^{-x}$ vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

**Conclusion.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ : la courbe $\mathcal{C}$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

### 3. a) 0,75 pts

Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel $x$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

INDICE

Dérive $(1-2x)e^{-x}$ comme un produit, puis factorise $f'(x)$ par $e^{-x}$.

CORRIGÉ

**Dérivabilité.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit de fonctions dérivables ( $x \mapsto e^{-x}$ l'est d'après F09, dérivée de $e^{u}$).

**Calcul.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2e^{-x} \\ &\quad - (1-2x)e^{-x} \\ &= 1 + (2x-3)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(e^{x} + 2x - 3\right) \\ &= e^{-x}g(x). \end{aligned}$$

**Conclusion.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

### 3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de $f$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ : utilise la question 1. c). Repère où $f'$ s'annule.

CORRIGÉ

**Signe de $f'(x)$.** Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. D'après 1. c), $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$, $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$, et $f'$ ne s'annule qu'en $\alpha$.

**Variations.** D'après le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation, $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

**Conclusion.** Tableau de variations : $f$ décroît strictement de $+\infty$ (limite en $-\infty$) jusqu'à son minimum $f(\alpha)$, atteint en $\alpha$, puis croît strictement jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

### 3. c) 0,75 pts

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha - 2\alpha^2}{3 - 2\alpha}$.

INDICE

De $g(\alpha) = 0$, tire $e^{\alpha} = 3 - 2\alpha$, puis une écriture de $e^{-\alpha}$.

CORRIGÉ

**Valeur de $e^{-\alpha}$.** Comme $g(\alpha) = 0$, $e^{\alpha} = 3 - 2\alpha$, et $3 - 2\alpha > 0$ car $\alpha < 0{,}6$. D'après F04 (règles de calcul de la notation $e^x$) :

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{1}{3 - 2\alpha}.$$

**Calcul.**

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha + \frac{1 - 2\alpha}{3 - 2\alpha} \\ &= \frac{3\alpha - 2\alpha^2 + 1 - 2\alpha}{3 - 2\alpha} \\ &= \frac{1 + \alpha - 2\alpha^2}{3 - 2\alpha}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha - 2\alpha^2}{3 - 2\alpha}$.

**3. d)** 0,5 pts

En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) > 0$.

INDICE

Factorise $1 + \alpha - 2\alpha^2$ à l'aide de sa racine évidente $1$. Le minimum de $f$ est $f(\alpha)$.

CORRIGÉ

**Signe de $f(\alpha)$.** On a $1 + \alpha - 2\alpha^2 = (1 - \alpha)(1 + 2\alpha)$. Comme $0 < \alpha < 1$ (1. b)), les deux facteurs sont strictement positifs. De plus $3 - 2\alpha > 0$. Donc $f(\alpha) > 0$.

**Minimum.** D'après 3. b), $f(\alpha)$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ : pour tout réel $x$, $f(x) \geq f(\alpha) > 0$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f(x) > 0$.

**Exercice 2** 8 pts

## Un logarithme d'exponentielle, et une suite qui s'en approche

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(e^x + 3\right) - 1$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

### 1. a) 0,5 pts

Justifier que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Regarde le signe de $e^x + 3$. Pour la limite, cherche celle de l'expression sous le logarithme, puis utilise la continuité de $\ln$.

CORRIGÉ

**Ensemble de définition.** Pour tout réel $x$, $e^x + 3 > 3 > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle) : $\ln\left(e^x + 3\right)$ existe, et $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**Limite.** Quand $x$ tend vers $-\infty$, $e^x$ tend vers $0$ (F06, limites de l'exponentielle aux bornes), donc $e^x + 3$ tend vers $3$. La fonction $\ln$ est continue en $3$, donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 3 - 1.$$

**Conclusion.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 3 - 1$, et la droite d'équation $y = \ln 3 - 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

### 1. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x) = x - 1 + \ln\left(1 + 3e^{-x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Mets $e^x$ en facteur sous le logarithme. Utilise ensuite $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour deux réels strictement positifs, et $\ln\left(e^x\right) = x$.

CORRIGÉ

**Nouvelle écriture.** Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après F04 (règles de calcul de la notation $e^x$), $e^x + 3 = e^x\left(1 + 3e^{-x}\right)$, produit de deux réels strictement positifs. Avec $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(e^x\right) = x$ (F02) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x\right) - 1 \\ &\quad + \ln\left(1 + 3e^{-x}\right) \\ &= x - 1 \\ &\quad + \ln\left(1 + 3e^{-x}\right). \end{aligned}$$

**Asymptote.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $e^{-x}$ tend vers $0$, donc, par continuité de $\ln$ en $1$, $\ln\left(1 + 3e^{-x}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x - 1)\big) = 0.$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f(x) = x - 1 + \ln\left(1 + 3e^{-x}\right)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme, et $\Delta$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

**1. c)** 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\Delta$.

INDICE

Compare $1+3e^{-x}$ à $1$, puis utilise le signe de $\ln$ de part et d'autre de $1$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 1. b), $f(x)-(x-1)=\ln\left(1+3e^{-x}\right)$.

Comme $3e^{-x}>0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle), $1+3e^{-x}>1$. La fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1=0$, donc $\ln\left(1+3e^{-x}\right)>0$.

**Conclusion.** La courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de $\Delta$ sur $\mathbb{R}$.

**2. a)** 0,5 pts

Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$. En déduire le sens de variation de $f$.

INDICE

Applique la dérivée de $\ln u$ avec $u(x)=e^x+3$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** Posons $u(x)=e^x+3$ : $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F08, dérivée de l'exponentielle), strictement positive, et $u'(x)=e^x$. D'après la dérivée de $\ln\circ u$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{e^x}{e^x+3}.$$

**Signe.** Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $f'(x)>0$ pour tout réel $x$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$, et $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2. b)** 0,25 pts

Montrer que $0<f'(x)<1$ pour tout réel $x$.

INDICE

Compare le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $0<e^x<e^x+3$. En divisant par $e^x+3>0$ :

$$0<\frac{e^x}{e^x+3}<1.$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $0<f'(x)<1$.

**2. c)** 1 pts

Montrer que $1 < e < 4$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution réelle $\ell$, que $\ell = \ln \dfrac{3}{e-1}$ et que $\ell > 0$.

INDICE

Pour $e < 4$, applique l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ (F10, étude de l'exponentielle : tangente en $0$) en $t = -\dfrac{1}{2}$. Écris ensuite $f(x) = x$ sous la forme $\ln(e^x + 3) = x + 1$, puis passe à l'exponentielle.

CORRIGÉ

**Encadrement de $e$.** D'après F02 (l'exponentielle est strictement croissante), $e = e^1 > e^0 = 1$. D'après F10 (étude de l'exponentielle : $e^t \geq 1 + t$, avec égalité seulement en $0$), appliqué en $-\dfrac{1}{2} \neq 0$ :

$$e^{-\frac{1}{2}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} < 2$, puis $e = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 < 4$ (F04, et carrés de réels positifs).

**Équation équivalente.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x + 3 > 0$, d'après F02 et F05 (équations et inéquations exponentielles) :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \ln(e^x + 3) = x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^x + 3 = e^{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & e^x(e - 1) = 3. \end{aligned}$$

**Résolution.** Comme $e > 1$, $e - 1 > 0$ et l'équation équivaut à $e^x = \dfrac{3}{e-1}$. Ce réel est strictement positif : F05 donne une unique solution, $\ell = \ln \dfrac{3}{e-1}$.

**Signe de $\ell$.** Comme $e < 4$, $0 < e - 1 < 3$, donc $\dfrac{3}{e-1} > 1$ et $\ell > 0$.

**Conclusion.** $1 < e < 4$ ; l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution réelle $\ell = \ln \dfrac{3}{e-1}$, et $\ell > 0$.

### 2. d) 0,75 pts

Montrer que $f(x) > x$ pour tout $x < \ell$.

INDICE

Reprends la chaîne d'équivalences de 2. c) avec des inégalités : chaque fonction utilisée est strictement croissante.

CORRIGÉ

Soit $x$ un réel. Comme à la question 2. c), avec $\ln$ et $\exp$ strictement croissantes (F05, équations et inéquations exponentielles) et $e - 1 > 0$ :

$$\begin{aligned} & f(x) > x \\ \Leftrightarrow\ & e^x + 3 > e^{x+1} \\ \Leftrightarrow\ & e^x < \frac{3}{e-1} \\ \Leftrightarrow\ & x < \ell. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x < \ell$, $f(x) > x$.

### 3. a) 0,75 pts

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n < \ell$.

INDICE

Pour l'hérédité, applique la fonction strictement croissante $f$ à l'encadrement, puis calcule $f(0)$ et $f(\ell)$.

CORRIGÉ

**Initialisation.** $u_0 = 0$, et $0 \leq 0 < \ell$ d'après 2. c).

**Hérédité.** Soit $n$ un entier naturel tel que $0 \leq u_n < \ell$. La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (2. a)), donc :

$$f(0) \leq f(u_n) < f(\ell).$$

Or $f(\ell) = \ell$. De plus $f(0) = \ln 4 - 1 > 0$, car $4 > e$ (2. c)) et $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln 4 > \ln e = 1$. Ainsi $0 < f(0) \leq u_{n+1} < \ell$, et en particulier $0 \leq u_{n+1} < \ell$.

**Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n < \ell$.

### 3. b) 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

INDICE

Utilise la question 2. d) avec $x = u_n$.

CORRIGÉ

Soit $n$ un entier naturel. D'après 3. a), $u_n < \ell$. D'après 2. d), appliqué à $x = u_n$, $f(u_n) > u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

**Conclusion.** La suite $(u_n)$ est strictement croissante.

### 3. c) 1 pts

En déduire que la suite $(u_n)$ converge, et déterminer sa limite.

INDICE

Une suite croissante et majorée converge. Passe ensuite à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, grâce à la continuité de $f$.

CORRIGÉ

**Convergence.** La suite $(u_n)$ est croissante (3. b)) et majorée par $\ell$ (3. a)) : elle converge vers un réel $L$, avec $0 \leq L \leq \ell$.

**Équation de la limite.** La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en $L$ : $f(u_n)$ tend vers $f(L)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ tend aussi vers $L$, l'unicité de la limite donne $f(L) = L$.

**Identification.** D'après 2. c), l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $\ell$. Donc $L = \ell$.

**Conclusion.** La suite $(u_n)$ converge, et sa limite est $\ell$.

### 3. d) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel $x \in [0, \ell]$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{e}$.

INDICE

Écris $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{e^x + 3}$ pour obtenir le sens de variation de $f'$. Calcule ensuite $e^\ell + 3$ à l'aide de $e^\ell = \dfrac{3}{e - 1}$.

CORRIGÉ

**Variations de $f'$.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 3 - 3}{e^x + 3} \\ &= 1 - \frac{3}{e^x + 3}. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto e^x + 3$ est strictement croissante et strictement positive, donc $x \mapsto \dfrac{3}{e^x + 3}$ est strictement décroissante, et $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Valeur de $f'(\ell)$.** Pour $x \in [0, \ell]$, on a donc $f'(x) \leq f'(\ell)$. Or $e^\ell = \dfrac{3}{e - 1}$, d'où :

$$\begin{aligned} e^\ell + 3 &= \frac{3 + 3(e - 1)}{e - 1} \\ &= \frac{3e}{e - 1}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f'(\ell) &= \frac{3}{e - 1} \times \frac{e - 1}{3e} \\ &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Avec 2. b), pour tout réel $x \in [0, \ell]$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{e}$.

**3. e)** 1 pts

En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $0 < \ell - u_{n+1} \leq \frac{1}{e}(\ell - u_n)$, puis que $0 < \ell - u_n \leq \frac{\ell}{e^n}$.

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis à $f$ sur $[u_n, \ell]$, en vérifiant ses hypothèses. Termine par une récurrence.

CORRIGÉ

**Hypothèses de l'inégalité des accroissements finis.** Soit $n$ un entier naturel. D'après 3. a), $0 \leq u_n < \ell$. La fonction $f$ est continue sur $[u_n, \ell]$ et dérivable sur $]u_n, \ell[$. Pour tout $x \in ]u_n, \ell[$, on a $x \in [0, \ell]$, donc $0 < f'(x) \leq \frac{1}{e}$ (3. d)).

**Première inégalité.** D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$f(\ell) - f(u_n) \leq \frac{1}{e}(\ell - u_n).$$

De plus $f(\ell) - f(u_n) > 0$, car $f$ est strictement croissante et $u_n < \ell$. Comme $f(\ell) = \ell$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ :

$$0 < \ell - u_{n+1} \leq \frac{1}{e}(\ell - u_n).$$

**Seconde inégalité, par récurrence.**

- Initialisation : $\ell - u_0 = \ell = \frac{\ell}{e^0}$, et $\ell > 0$.
- Hérédité : soit $n$ un entier naturel tel que $0 < \ell - u_n \leq \frac{\ell}{e^n}$. L'inégalité précédente donne $0 < \ell - u_{n+1} \leq \frac{1}{e} \times \frac{\ell}{e^n} = \frac{\ell}{e^{n+1}}$.

**Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$, $0 < \ell - u_{n+1} \leq \frac{1}{e}(\ell - u_n)$ et $0 < \ell - u_n \leq \frac{\ell}{e^n}$.

## Exercice 3 — 7,25 pts

### Un logarithme amorti par une exponentielle

**Partie A.** Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}-2\ln x.$$

**Partie B.** Soit $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=e^{-2x}\ln x,$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

#### 1. a) — 0,75 pts

Étudier les variations de $g$, et calculer ses limites en $0$ à droite et en $+\infty$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ : ses deux termes ont le même signe sur $]0,+\infty[$.

CORRIGÉ

**Variations.** La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$ :

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}.$$

Pour $x>0$, les deux termes sont strictement négatifs, donc $g'(x)<0$.

**En $0$ à droite.** $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $-2\ln x$ aussi. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.

**En $+\infty$.** $\dfrac{1}{x}$ tend vers $0$ et $-2\ln x$ vers $-\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

**Conclusion.** $g$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

**1. b)** 1 pts

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0, +\infty[$, et que $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$. On donne $0{,}33 < \ln 1{,}4 < 0{,}34$ et $0{,}40 < \ln 1{,}5 < 0{,}41$.

INDICE

Le théorème de la bijection s'applique, car $g$ est continue et strictement décroissante. Utilise ensuite les valeurs données, avec $\dfrac{1}{1{,}4} = \dfrac{5}{7}$ et $\dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$.

CORRIGÉ

**Existence et unicité.** La fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur :

$$\left]\lim_{+\infty} g, \lim_{0^+} g\right[ = \mathbb{R}.$$

Cet intervalle contient $0$ : le réel $0$ a un unique antécédent $\alpha$ dans $]0, +\infty[$.

**Encadrement.** Avec les valeurs données, et $\dfrac{5}{7} > 0{,}71$ :

$$\begin{aligned} g(1{,}4) &= \frac{5}{7} - 2\ln 1{,}4 \\ &> 0{,}71 - 0{,}68 \\ &= 0{,}03 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1{,}5) &= \frac{2}{3} - 2\ln 1{,}5 \\ &< 0{,}67 - 0{,}80 < 0. \end{aligned}$$

Ainsi $g(1{,}5) < g(\alpha) < g(1{,}4)$. Comme $g$ est strictement décroissante, $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

**Conclusion.** L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0, +\infty[$, et $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

**1. c)** 0,5 pts

En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Compare $g(x)$ à $g(\alpha) = 0$, en tenant compte du sens de variation de $g$.

CORRIGÉ

La fonction $g$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$. Soit $x > 0$ :

- si $x < \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha) = 0$ ;
- si $x > \alpha$, alors $g(x) < g(\alpha) = 0$.

**Conclusion.** $g(x) > 0$ sur $]0, \alpha[$, $g(\alpha) = 0$, et $g(x) < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

### 2. a)

0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Cherche séparément la limite de chaque facteur en $0$ à droite.

CORRIGÉ

Quand $x$ tend vers $0$ à droite, $e^{-2x}$ tend vers $e^0 = 1$ (continuité de $\exp$ en $0$) et $\ln x$ vers $-\infty$. Par produit :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

**Conclusion.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

### 2. b)

1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^{2x}}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $\dfrac{x}{e^{2x}}$, pose $X = 2x$ et utilise F07 (croissances comparées). Pour $\dfrac{\ln x}{x}$, utilise F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) avec $\alpha = 1$.

CORRIGÉ

**Écriture.** Soit $x > 0$. D'après F04 (règles de calcul de la notation $e^x$) :

$$\begin{aligned} &\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^{2x}} \\ &= \frac{\ln x}{e^{2x}} \\ &= e^{-2x} \ln x = f(x). \end{aligned}$$

**Premier facteur.** D'après F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) avec l'exposant $1 > 0$, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $0$ en $+\infty$.

**Second facteur.** Posons $X = 2x$ : $\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{X}{e^X}$, et $X$ tend vers $+\infty$. D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 1$, $\dfrac{e^X}{X}$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{X}{e^X}$ tend vers $0$.

**Conclusion.** Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ : l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

### 3. a) 0,75 pts

Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, $f'(x)=e^{-2x}g(x)$.

INDICE

Dérive le produit ; la dérivée de $x\mapsto e^{-2x}$ vient de F09 (dérivée de $e^u$).

CORRIGÉ

**Dérivabilité.** Les fonctions $x\mapsto e^{-2x}$ (F09, dérivée de $e^u$, avec $u(x)=-2x$) et $\ln$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Leur produit $f$ l'est aussi.

**Calcul.** Pour tout $x>0$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\ln x \\ &\quad + e^{-2x}\times\frac{1}{x} \\ &= e^{-2x}\left(\frac{1}{x}-2\ln x\right) \\ &= e^{-2x}g(x). \end{aligned}$$

**Conclusion.** $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $f'(x)=e^{-2x}g(x)$.

### 3. b) 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de $f$.

INDICE

Comme $e^{-2x}>0$, le signe de $f'(x)$ est donné par la question 1. c). Repère où $f'$ s'annule.

CORRIGÉ

**Signe de $f'(x)$.** Comme $e^{-2x}>0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. D'après 1. c), $f'(x)>0$ sur $]0,\alpha[$, $f'(x)<0$ sur $]\alpha,+\infty[$, et $f'$ ne s'annule qu'en $\alpha$.

**Variations.** D'après le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation, $f$ est strictement croissante sur $]0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$.

**Conclusion.** Tableau de variations : $f$ croît strictement de $-\infty$ (limite en $0$ à droite) jusqu'à son maximum $f(\alpha)$, atteint en $\alpha$, puis décroît strictement vers $0$ (limite en $+\infty$).

### 3. c) 1 pts

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha\, e^{2\alpha}}$, puis que $\dfrac{1}{3e^3} < f(\alpha) < \dfrac{1}{2{,}8\, e^{2{,}8}}$.

INDICE

De $g(\alpha) = 0$, tire $\ln \alpha$. Pour l'encadrement, étudie le sens de variation de $t \mapsto 2t\, e^{2t}$ sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

**Expression de $f(\alpha)$.** Comme $g(\alpha) = 0$, $\ln \alpha = \dfrac{1}{2\alpha}$. Donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= e^{-2\alpha} \times \frac{1}{2\alpha} \\ &= \frac{1}{2\alpha\, e^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

**Monotonie auxiliaire.** Sur $]0, +\infty[$, $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto e^{2t}$ sont strictement positives et strictement croissantes. Leur produit $t \mapsto 2t\, e^{2t}$ est donc strictement croissant sur $]0, +\infty[$.

**Encadrement.** De $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$, on tire :

$$2{,}8\, e^{2{,}8} < 2\alpha\, e^{2\alpha} < 3e^3.$$

Ces réels sont strictement positifs et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ : en passant aux inverses, on renverse les inégalités, ce qui encadre $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha\, e^{2\alpha}}$.

**Conclusion.** $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha\, e^{2\alpha}}$ et $\dfrac{1}{3e^3} < f(\alpha) < \dfrac{1}{2{,}8\, e^{2{,}8}}$.

### 4. a) 0,5 pts

On donne $e^3 < 21$. Montrer que $f(\alpha) > \dfrac{1}{100}$.

INDICE

Utilise la minoration de 3. c), puis compare $3e^3$ à $100$.

CORRIGÉ

D'après 3. c), $f(\alpha) > \dfrac{1}{3e^3}$. Or $3e^3 < 3 \times 21 = 63 < 100$, donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{3e^3} > \dfrac{1}{100}$.

**Conclusion.** $f(\alpha) > \dfrac{1}{100}$.

**4. b)** 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{100}$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

INDICE

Sépare $]0, 1]$, où $f(x) \leq 0$, puis $[1, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$ : sur chacun de ces deux derniers intervalles, $f$ est continue et strictement monotone.

CORRIGÉ

**Sur** $]0, 1]$**.** Pour $0 < x \leq 1$, $\ln x \leq 0$, donc $f(x) \leq 0 < \dfrac{1}{100}$ : aucune solution.

**Sur** $[1, \alpha]$**.** Comme $\alpha > 1{,}4 > 1$ (1. b)), cet intervalle est bien défini. La fonction $f$ y est continue et strictement croissante, avec $f(1) = 0$ et $f(\alpha) > \dfrac{1}{100}$ (4. a)). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction strictement monotone, l'équation y a exactement une solution.

**Sur** $[\alpha, +\infty[$**.** La fonction $f$ y est continue et strictement décroissante, avec $f(\alpha) > \dfrac{1}{100}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Il existe donc $b > \alpha$ tel que $f(b) < \dfrac{1}{100}$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[\alpha, b]$ donne une solution, unique sur $[\alpha, +\infty[$ par stricte monotonie.

**Bilan.** Ces deux solutions sont distinctes : la seule valeur commune aux deux intervalles est $\alpha$, et $f(\alpha) \neq \dfrac{1}{100}$.

**Conclusion.** L'équation $f(x) = \dfrac{1}{100}$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

## Exercice 4 — 7,5 pts

## Une bijection explicite, et la dérivée de sa réciproque

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 9e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

### 1. a) — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Repère le comportement de $e^x$ et de $e^{-x}$ à chaque borne avec F06 (limites de l'exponentielle aux bornes), par composée pour $e^{-x}$.

CORRIGÉ

**En $-\infty$.** Quand $x$ tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ : d'après F06 (limites de l'exponentielle aux bornes) et par composée, $e^x$ tend vers $0$ et $e^{-x}$ vers $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**En $+\infty$.** $e^x$ tend vers $+\infty$ et $e^{-x}$ vers $0$ (F06 et limite d'une composée). Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**Conclusion.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

### 1. b) — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \neq 0$, sépare $\dfrac{f(x)}{x}$ en deux quotients. En $-\infty$, le changement de variable $t = -x$ ramène le second quotient à F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

**Décomposition.** Pour tout réel $x \neq 0$ :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - 9\,\frac{e^{-x}}{x}.$$

**En $+\infty$.** $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ (F07, croissances comparées, $n = 1$), et $\dfrac{e^{-x}}{x}$ tend vers $0$ (numérateur de limite $0$, dénominateur de limite $+\infty$). Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

**En $-\infty$.** $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $0$ (numérateur de limite $0$, dénominateur de limite $-\infty$). Posons $t = -x$, qui tend vers $+\infty$ : $-9\,\dfrac{e^{-x}}{x} = 9\,\dfrac{e^t}{t}$, qui tend vers $+\infty$ (F07). Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

**Conclusion.** Avec 1. a), la courbe $\mathcal{C}$ admet, en $+\infty$ comme en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

### 2. a) 0,75 pts

Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel $x$, $f'(x) = e^x + 9e^{-x}$. En déduire le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variations.

INDICE

Dérive $x \mapsto e^{-x}$ avec F09 (dérivée de $e^u$), en nommant $u$ et $u'$. Le signe de $f'(x)$ se lit sans calcul.

CORRIGÉ

**Dérivée.** La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F08, dérivée de l'exponentielle), et $x \mapsto e^{-x}$ aussi, de dérivée $x \mapsto -e^{-x}$ (F09, dérivée de $e^u$, avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$). Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 9 \times \left(-e^{-x}\right) \\ &= e^x + 9e^{-x}. \end{aligned}$$

**Signe.** Comme $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle), $f'(x) > 0$ pour tout réel $x$.

**Conclusion.** $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Son tableau de variations comporte une seule flèche montante, de $-\infty$ (limite en $-\infty$) à $+\infty$ (limite en $+\infty$), d'après 1. a).

### 2. b) 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel $x$.

INDICE

Multiplie les deux membres par $e^x$, qui est strictement positif, puis utilise F05 (équations et inéquations exponentielles). Pour le signe, compare $x$ à la solution grâce à la stricte croissance de $f$.

CORRIGÉ

**Équation.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x > 0$ et $e^x e^{-x} = 1$ (F03, relation fonctionnelle) :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^x f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} = 9. \end{aligned}$$

Comme $9 > 0$, F05 (équations et inéquations exponentielles) donne :

$$\begin{aligned} e^{2x} = 9 &\Leftrightarrow 2x = 2\ln 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3, \end{aligned}$$

car $\ln 9 = 2\ln 3$. L'équation a pour unique solution $\ln 3$.

**Signe.** La fonction $f$ est strictement croissante et $f(\ln 3) = 0$.

**Conclusion.** $S = \{\ln 3\}$ ; $f(x) < 0$ pour $x < \ln 3$ et $f(x) > 0$ pour $x > \ln 3$.

**2. c)** 0,5 pts

On note $A$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ en $A$ a pour équation $y = 6x - 6\ln 3$.

INDICE

Calcule $f'(\ln 3)$ en simplifiant $e^{\ln 3}$ et $e^{-\ln 3}$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle, et F03, relation fonctionnelle).

CORRIGÉ

**Valeurs en $\ln 3$.** D'après F02 (premières propriétés de l'exponentielle) et F03 (relation fonctionnelle), $e^{\ln 3} = 3$ et $e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{e^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$. Donc $f(\ln 3) = 0$ (2. b)) et :

$$f'(\ln 3) = 3 + 9 \times \frac{1}{3} = 6.$$

**Équation de $T$.** La tangente $T$ en $A(\ln 3, 0)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y = {} & f'(\ln 3)(x - \ln 3) \\ & + f(\ln 3). \end{aligned}$$

**Conclusion.** $T$ a pour équation $y = 6x - 6\ln 3$.

**3. a)** 0,75 pts

Soit $k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = e^x + 9e^{-x} - 6$. Montrer que, pour tout réel $x$, $k'(x) = f(x)$. En déduire que $k(x) \geq 0$ pour tout réel $x$, avec égalité seulement pour $x = \ln 3$.

INDICE

Le signe de $k'(x)$ est donné par 2. b). Le minimum de $k$ est atteint là où sa dérivée change de signe.

CORRIGÉ

**Dérivée de $k$.** La fonction $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F08, dérivée de l'exponentielle, et F09, dérivée de $e^u$) et, pour tout réel $x$ :

$$k'(x) = e^x - 9e^{-x} = f(x).$$

**Variations.** D'après 2. b), $k'(x) < 0$ sur $]-\infty, \ln 3[$, $k'(x) > 0$ sur $]\ln 3, +\infty[$, et $k'$ ne s'annule qu'en $\ln 3$. Donc $k$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 3]$ et strictement croissante sur $[\ln 3, +\infty[$.

**Minimum.** $k$ admet en $\ln 3$ son minimum :

$$\begin{aligned} k(\ln 3) &= 3 + 9 \times \frac{1}{3} - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Cas d'égalité.** Si $x < \ln 3$, la stricte décroissance de $k$ sur $]-\infty, \ln 3]$ donne $k(x) > k(\ln 3) = 0$ ; si $x > \ln 3$, la stricte croissance sur $[\ln 3, +\infty[$ donne aussi $k(x) > 0$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $k'(x) = f(x)$ et $k(x) \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = \ln 3$.

### 3. b) 0,75 pts

On pose, pour tout réel $x$, $h(x) = f(x) - (6x - 6\ln 3)$. Montrer que $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de $T$.

INDICE

Calcule $h'(x)$ et reconnais l'expression de 3. a). Calcule ensuite $h(\ln 3)$ pour lire le signe de $h(x)$.

CORRIGÉ

**Dérivée de $h$.** La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 6 \\ &= e^{x} + 9e^{-x} - 6 \\ &= k(x). \end{aligned}$$

**Monotonie.** D'après 3. a), $h'(x) > 0$ sur $]-\infty, \ln 3[$ et sur $]\ln 3, +\infty[$, et $h'(\ln 3) = 0$. Donc $h$ est strictement croissante sur $]-\infty, \ln 3]$ et sur $[\ln 3, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$.

**Signe de $h$.** De plus $h(\ln 3) = f(\ln 3) - (6\ln 3 - 6\ln 3) = 0$. Par stricte croissance, $h(x) < 0$ pour $x < \ln 3$ et $h(x) > 0$ pour $x > \ln 3$.

**Conclusion.** $h(x)$ est la différence entre l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ et celle du point de $T$ de même abscisse. Donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de $T$ sur $]-\infty, \ln 3[$ et strictement au-dessus sur $]\ln 3, +\infty[$ : la courbe traverse sa tangente au point $A$.

### 4. a) 0,5 pts

Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $f^{-1}$ sa réciproque.

INDICE

Rassemble trois faits établis plus haut : la continuité de $f$, sa stricte croissance sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et ses limites aux bornes (1. a)).

CORRIGÉ

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (2. a)). D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur :

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[.$$

D'après 1. a), cet intervalle est $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

**Conclusion.** $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

**4. b)** 1 pts

Soit $y$ un réel. Montrer que $f(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} - y\,e^{x} - 9 = 0$. En déduire que $f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{2}\right)$.

INDICE

Pose $X = e^x$ : tu obtiens une équation du second degré en $X$. Le produit de ses racines indique laquelle peut être égale à $e^x$.

CORRIGÉ

**Équation équivalente.** Soit $x$ un réel. Comme $e^x > 0$ et $e^x e^{-x} = 1$ :

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & e^x\left(e^x - 9e^{-x}\right) = y\,e^x \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - y\,e^x - 9 = 0. \end{aligned}$$

**Trinôme en $X = e^x$.** Posons $X = e^x$, avec $X > 0$. L'équation $X^2 - yX - 9 = 0$ a pour discriminant $y^2 + 36 > 0$. Ses racines sont :

$$X_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 + 36}}{2},$$

$$X_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{2}.$$

Leur produit vaut $-9 < 0$ : elles sont de signes contraires et, comme $X_1 < X_2$, on a $X_1 < 0 < X_2$.

**Retour à $x$.** Comme $e^x > 0$, $e^x$ ne peut pas être égal à $X_1$. Donc, d'après F05 (équations et inéquations exponentielles), puisque $X_2 > 0$ :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln X_2.$$

**Conclusion.** Pour tout réel $y$, $f(x) = y$ équivaut à $e^{2x} - y\,e^x - 9 = 0$, et l'unique antécédent de $y$ par $f$ est :

$$\begin{aligned} & f^{-1}(y) \\ & = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 36}}{2}\right). \end{aligned}$$

**4. c)** 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x$, $\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 = 36$. En déduire que $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel $y$, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+36}}$.

INDICE

Une différence de deux carrés se factorise ; utilise $e^x e^{-x} = 1$. Applique ensuite le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, rappelé dans le cours, et exprime $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ à l'aide de $y$.

CORRIGÉ

**Identité.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $a = e^x$ et $b = 9e^{-x}$ ; alors $f'(x) = a + b$, $f(x) = a - b$ et $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. Donc :

$$\begin{aligned}&\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2\\ &= 4 \times e^x \times 9e^{-x} = 36.\end{aligned}$$

Comme $f'(x) > 0$, on en déduit $f'(x) = \sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 36}$.

**Dérivabilité de $f^{-1}$.** La fonction $f$ est continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $f'$ ne s'annule pas. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque, $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2+36}}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $y$, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+36}}$.

**4. d)** `0,5 pts`

Calculer $f^{-1}(8)$, puis donner une équation de la tangente $T'$ à la courbe de $f^{-1}$ au point d'abscisse $8$.

INDICE

Utilise 4. b), puis vérifie le résultat en calculant son image par $f$. Le coefficient directeur de $T'$ vient de 4. c).

CORRIGÉ

**Valeur de $f^{-1}(8)$.** D'après 4. b) :

$$\begin{aligned} f^{-1}(8) &= \ln\left(\frac{8+\sqrt{100}}{2}\right) \\ &= \ln 9 = 2\ln 3. \end{aligned}$$

Vérification : $e^{2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^2 = 9$ (F03, relation fonctionnelle), donc $f(2\ln 3) = 9 - 9\times\dfrac{1}{9} = 8$.

**Coefficient directeur.** D'après 4. c), $\left(f^{-1}\right)'(8) = \dfrac{1}{\sqrt{64+36}} = \dfrac{1}{10}$.

**Conclusion.** $f^{-1}(8) = 2\ln 3$, et la tangente $T'$ a pour équation $y = \dfrac{1}{10}(x-8) + 2\ln 3$, soit :

$$y = \frac{x}{10} - \frac{4}{5} + 2\ln 3.$$

**Exercice 5** 7,25 pts

## Une famille d'équations, et deux suites de solutions

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on note $f_n$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^x - nx.$$

On donne $2{,}7 < e < 2{,}8$.

### 1. a) 0,75 pts

Montrer que $f_n$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, étudier son sens de variation, et montrer que son minimum vaut $n(1 - \ln n)$.

INDICE

Le signe de $f_n'(x) = e^x - n$ s'obtient avec F05 (équations et inéquations exponentielles), en comparant $x$ à $\ln n$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** La fonction $f_n$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (F08, dérivée de l'exponentielle) et, pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = e^x - n$.

**Signe.** Comme $n > 0$, F05 (équations et inéquations exponentielles) donne, pour tout réel $x$ :

$$e^x < n \Leftrightarrow x < \ln n,$$

$$e^x > n \Leftrightarrow x > \ln n.$$

De plus $\ln n > \ln 1 = 0$, donc $\ln n \in ]0, +\infty[$. Ainsi $f_n'(x) < 0$ sur $[0, \ln n[$, $f_n'(x) > 0$ sur $]\ln n, +\infty[$, et $f_n'$ ne s'annule qu'en $\ln n$.

**Variations.** $f_n$ est strictement décroissante sur $[0, \ln n]$ et strictement croissante sur $[\ln n, +\infty[$.

**Minimum.** Avec $e^{\ln n} = n$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle) :

$$\begin{aligned} f_n(\ln n) &= e^{\ln n} - n \ln n \\ &= n(1 - \ln n). \end{aligned}$$

**Conclusion.** $f_n$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante sur $[0, \ln n]$, strictement croissante sur $[\ln n, +\infty[$, et son minimum vaut $n(1 - \ln n)$.

**1. b)** 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

INDICE

La forme est indéterminée : factorise par $x$, puis utilise F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

En $+\infty$, $e^x$ et $nx$ tendent tous deux vers $+\infty$ : c'est une forme indéterminée. Pour $x > 0$ :

$$f_n(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - n\right).$$

D'après F07 (croissances comparées) avec l'exposant $1$, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ ; la parenthèse tend donc vers $+\infty$, et $x$ aussi.

**Conclusion.** Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

**1. c)** 1 pts

Montrer que $\ln n > 1$. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0, +\infty[$ : une solution $u_n$ dans $]0, 1[$ et une solution $v_n$ dans $]\ln n, +\infty[$.

INDICE

Compare $n$ à $e$ avec la valeur donnée. Calcule ensuite $f_n(0)$, $f_n(1)$ et le signe du minimum, puis raisonne séparément sur $[0, 1]$, sur $[1, \ln n]$ et sur $[\ln n, +\infty[$.

CORRIGÉ

**Comparaison de $\ln n$ à $1$.** Comme $n \geq 3 > 2{,}8 > e$ et que $\ln$ est strictement croissante, $\ln n > \ln e = 1$. Donc $[0, 1] \subset [0, \ln n]$ et $1 - \ln n < 0$.

**Sur $[0, 1]$.** $f_n$ est continue et strictement décroissante, avec $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e - n < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ a une solution dans $]0, 1[$, unique sur $[0, 1]$ par stricte monotonie : on la note $u_n$.

**Sur $[1, \ln n]$.** $f_n$ est décroissante, donc $f_n(x) \leq f_n(1) < 0$ : aucune solution.

**Sur $[\ln n, +\infty[$.** $f_n$ est continue et strictement croissante, avec $f_n(\ln n) = n(1 - \ln n) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (1. b)). Il existe donc un réel $b > \ln n$ tel que $f_n(b) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[\ln n, b]$ donne une solution dans $]\ln n, b[$, unique sur $[\ln n, +\infty[$ par stricte monotonie. On la note $v_n$ ; elle vérifie $v_n > \ln n$.

**Conclusion.** $\ln n > 1$, et l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0, +\infty[$ : $u_n \in ]0, 1[$ et $v_n \in ]\ln n, +\infty[$.

### 2. a) 1 pts

Montrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$. En déduire que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

INDICE

Traduis $f_n(u_n) = 0$ par une égalité entre $e^{u_n}$ et $n\,u_n$. Compare ensuite $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, en te souvenant du sens de variation de $f_{n+1}$ sur $[0, 1]$.

CORRIGÉ

**Calcul de $f_{n+1}(u_n)$.** Par définition, $f_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire $e^{u_n} = n\,u_n$. Donc :

$$\begin{aligned} & f_{n+1}(u_n) \\ &= e^{u_n} - (n+1)u_n \\ &= n\,u_n - (n+1)u_n \\ &= -u_n. \end{aligned}$$

**Comparaison.** Comme $u_n > 0$, on obtient $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Les réels $u_n$ et $u_{n+1}$ appartiennent à $]0, 1[$, intervalle sur lequel $f_{n+1}$ est strictement décroissante (1. c), appliquée à l'entier $n + 1 \geq 3$).

**Raisonnement par l'absurde.** Si l'on avait $u_n \leq u_{n+1}$, on aurait $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$, ce qui est faux. Donc $u_{n+1} < u_n$.

**Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 3$, $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ et $u_{n+1} < u_n$ : la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

### 2. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $0 < u_n < \dfrac{e}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

INDICE

Écris $u_n$ à l'aide de $e^{u_n}$ et de $n$, puis majore $e^{u_n}$ grâce à $u_n < 1$.

CORRIGÉ

**Encadrement.** Soit $n \geq 3$. De $e^{u_n} = n\,u_n$ (2. a)), on tire $u_n = \dfrac{e^{u_n}}{n}$. Comme $u_n < 1$ et que $\exp$ est strictement croissante (F02, premières propriétés de l'exponentielle), $e^{u_n} < e^1 = e$. Avec $u_n > 0$ (1. c)) :

$$0 < u_n < \frac{e}{n}.$$

**Limite.** Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 3$, $0 < u_n < \dfrac{e}{n}$, et la suite $(u_n)$ converge vers $0$.

**2. c)** 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n$.

INDICE

Exprime $n\,u_n$ à l'aide de $e^{u_n}$, puis utilise la continuité de $\exp$ en $0$.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 3$, $n\,u_n = e^{u_n}$. Comme $u_n$ tend vers $0$ (2. b)) et que $\exp$ est continue en $0$, $e^{u_n}$ tend vers $e^0 = 1$.

**Conclusion.**

$$\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = 1.$$

**2. d)** 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $n\,(n\,u_n - 1) = n\,u_n \times \dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(n\,u_n - 1)$.

INDICE

Remplace $n\,u_n$ par $e^{u_n}$ dans la parenthèse. Pour la limite, l'énoncé F08 (dérivée de l'exponentielle) fournit la limite de $\dfrac{e^x-1}{x}$ en $0$.

CORRIGÉ

**Identité.** Soit $n \geq 3$. Comme $n\,u_n = e^{u_n}$ et $u_n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} & n\,(n\,u_n - 1) \\ &= n\,(e^{u_n} - 1) \\ &= n\,u_n \times \frac{e^{u_n}-1}{u_n}. \end{aligned}$$

**Limite.** D'après F08 (dérivée de l'exponentielle), $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Comme $u_n$ tend vers $0$ (2. b)) en restant non nul, $\dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$ tend vers $1$ ; et $n\,u_n$ tend vers $1$ (2. c)).

**Conclusion.** Par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\,(n\,u_n - 1) = 1.$$

**3. a)** 0,25 pts

Montrer que la suite $(v_n)$ tend vers $+\infty$.

INDICE

Utilise la minoration de $v_n$ obtenue en 1. c).

CORRIGÉ

D'après 1. c), $v_n > \ln n$ pour tout entier $n \geq 3$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, le théorème de comparaison s'applique.

**Conclusion.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

**3. b)** 1 pts

Montrer que $v_n = \ln n + \ln v_n$. Montrer ensuite que $\ln t < \dfrac{t}{2}$ pour tout réel $t > 0$, et en déduire que $\ln n < v_n < 2\ln n$.

INDICE

Applique $\ln$ à l'égalité qui traduit $f_n(v_n) = 0$. Pour l'inégalité, étudie la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{2} - \ln t$ sur $]0, +\infty[$ ; le signe de son minimum se justifie avec la valeur donnée de $e$.

CORRIGÉ

**Égalité.** Comme $f_n(v_n) = 0$, on a $e^{v_n} = n\,v_n$, avec $n\,v_n > 0$. En appliquant $\ln$, avec $\ln\left(e^{v_n}\right) = v_n$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle) et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ :

$$v_n = \ln n + \ln v_n.$$

**Inégalité $\ln t < \dfrac{t}{2}$.** Soit $\varphi$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(t) = \dfrac{t}{2} - \ln t$. Elle est dérivable et, pour tout $t > 0$ :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} = \frac{t-2}{2t}.$$

Donc $\varphi$ est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$ : son minimum est $\varphi(2) = 1 - \ln 2$. Comme $2 < 2{,}7 < e$, $\ln 2 < \ln e = 1$, donc $\varphi(2) > 0$. Ainsi $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$, c'est-à-dire $\ln t < \dfrac{t}{2}$.

**Encadrement de $v_n$.** Avec $t = v_n > 0$ :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln n + \ln v_n \\ &< \ln n + \frac{v_n}{2}, \end{aligned}$$

donc $\dfrac{v_n}{2} < \ln n$, soit $v_n < 2\ln n$. Avec 1. c), $v_n > \ln n$.

**Conclusion.** $v_n = \ln n + \ln v_n$, $\ln t < \dfrac{t}{2}$ pour tout réel $t > 0$, et $\ln n < v_n < 2\ln n$.

**3. c)** 0,75 pts

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\ln n} = 1$.

INDICE

Écris $\dfrac{v_n}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln v_n}{\ln n}$ et encadre $\ln v_n$ grâce à 3. b). Le quotient $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}$ relève d'une croissance comparée du logarithme, avec $y = \ln n$.

CORRIGÉ

**Encadrement.** D'après 3. b), $\dfrac{v_n}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln v_n}{\ln n}$. Comme $1 < \ln n < v_n < 2\ln n$ et que $\ln$ est strictement croissante :

$$0 < \ln v_n < \ln 2 + \ln(\ln n),$$

car $\ln(2\ln n) = \ln 2 + \ln(\ln n)$. Comme $\ln n > 0$ :

$$0 < \frac{\ln v_n}{\ln n} < \frac{\ln 2}{\ln n} + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}.$$

**Limites des bornes.** Quand $n$ tend vers $+\infty$, $y = \ln n$ tend vers $+\infty$ ; alors $\dfrac{\ln 2}{y}$ tend vers $0$, et $\dfrac{\ln y}{y}$ tend vers $0$ (croissance comparée du logarithme, chapitre des logarithmes).

**Conclusion.** D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{\ln v_n}{\ln n}$ tend vers $0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\ln n} = 1.$$