BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Entraînement	7

Exercice 1

Poser X = exp(x) : une équation, une inéquation, une variante

On étudie l'expression $2e^{2x}+e^{x}-6$, où x est un réel, puis une équation voisine.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x}+e^{x}-6=0$.

INDICE

Pose $X=e^{x}$: comme $e^{2x}=(e^{x})^{2}$, l'équation devient un trinôme en X. N'oublie pas la condition que vérifie X.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{2x}+e^{x}-6>0$.

INDICE

Factorise $2X^{2}+X-6$ à l'aide de ses racines. Pour $X=e^{x}$, l'un des deux facteurs a un signe constant.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x}-6e^{-x}=1$.

INDICE

Multiplie les deux membres par e^{x}, qui n'est jamais nul : tu retrouves un trinôme en $X=e^{x}$.

Exercice 2

Trois systèmes, dont un sans solution

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 3e^x - e^y = 7 \end{cases}$.

INDICE

Pose $X = e^x$ et $Y = e^y$: le système devient linéaire. Garde en tête que X et Y doivent être strictement positifs.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^{x+y} = 12 \\ e^x + e^y = 7 \end{cases}$.

INDICE

Avec $X = e^x$ et $Y = e^y$, la première équation donne le produit XY (F04, règles de calcul de la notation e^x). Deux nombres de somme et de produit connus sont racines d'un même trinôme.

3.

Montrer que le système $\begin{cases} e^x - e^y = 3 \\ 2e^x + e^y = 3 \end{cases}$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Raisonne par l'absurde : résous d'abord le système linéaire en X et Y, puis confronte le résultat à la positivité de l'exponentielle.

Exercice 3

Quatre formes indéterminées, quatre outils

Calculer chacune des limites suivantes, en signalant chaque forme indéterminée avant de la lever.

1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^3\right)$.

INDICE

Les deux termes tendent vers $+\infty$: mets e^x en facteur, puis utilise F07 (croissances comparées).

2.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

INDICE

Pose $X = 2x$ et écris x^3 en fonction de X. Applique ensuite F07 (croissances comparées) à la variable X.

3.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$.

INDICE

Fais apparaître le taux d'accroissement de F08 (dérivée de l'exponentielle) en posant $X = 3x$.

4.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 5x\right) e^x$.

INDICE

Développe le produit, puis traite chaque terme avec la limite en $-\infty$ de F07 (croissances comparées).

Exercice 4

Encadrer exp(−x) par deux polynômes

On veut montrer que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}.$$

1.

Montrer que, pour tout réel x, $e^{-x} \geq 1 - x$.

INDICE

Applique au réel $-x$ l'inégalité de F10 (étude de l'exponentielle : position par rapport à la tangente en 0).

2.

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$ (F09, dérivée de e^u). Compare ensuite $g'(x)$ avec l'inégalité de la question 1.

3.

En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, puis conclure.

INDICE

Le sens de variation de g découle de la question 2 ; calcule ensuite $g(0)$.

4.

En déduire un encadrement de $e^{-0,1}$ d'amplitude $0{,}005$.

INDICE

Applique l'encadrement avec $x = 0{,}1$, qui est bien positif.

Exercice 5

Étude d'une fonction produit avec exp(−x)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement la limite en $+\infty$.

INDICE

En $+\infty$, c'est une forme indéterminée : écris $f(x) = 2 \times \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{3}{e^x}$ et pense à F07 (croissances comparées).

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (F09, dérivée de e^u). Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(2x+1)$.

3.

Étudier la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

La limite de f en $-\infty$ est infinie : calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.

4.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions réelles.

INDICE

Compare d'abord $2\sqrt{e}$ à 1. Ensuite, sur chacun des deux intervalles de monotonie, applique le théorème des valeurs intermédiaires : f y est continue et strictement monotone.

Exercice 6

Une étude en base 2 et en base 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 3 \times 2^x$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $4^x = \left(2^x\right)^2$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 4$.

INDICE

Écris $4 = 2^2$ et utilise F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel). Pose ensuite $X = 2^x$, en notant que $X > 0$.

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Les limites de $x \mapsto 2^x$ et de $x \mapsto 4^x$ sont données par F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$). En $+\infty$, mets 2^x en facteur.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (\ln 2)\, 2^x \left(2^{x+1} - 3\right)$. Étudier les variations de f et montrer que son minimum vaut $-\dfrac{9}{4}$.

INDICE

F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$) donne $\left(4^x\right)' = (\ln 4)\, 4^x$; écris $\ln 4 = 2 \ln 2$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $2^{x+1} - 3$.

Exercice 7

Primitives à ajuster : exponentielle et puissance réelle

Les fonctions g et h sont définies par :

$$g(x) = x\left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}} \text{ sur } \mathbb{R},$$

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0,+\infty[\,.$$

1.

Déterminer une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Avec $u(x)=\sqrt{x}$, calcule $u'(x)$: quel facteur constant manque pour reconnaître $u'e^u$?

2.

Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x)=x^2+1$, on a $u'(x)=2x$. Écris g sous la forme $\lambda\, u'\, u^{\alpha}$, vérifie les conditions de F17 (primitives de $u'u^{\alpha}$), puis applique-le.

3.

Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, puis vérifier le résultat en dérivant.

INDICE

Les primitives de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ diffèrent d'une constante : calcule la valeur en 0 de celle de la question 2.