BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Entraînement	7

Exercice 1

Poser X = exp(x) : une équation, une inéquation, une variante

On étudie l'expression $2e^{2x}+e^{x}-6$, où x est un réel, puis une équation voisine.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x}+e^{x}-6=0$.

INDICE

Pose $X=e^{x}$: comme $e^{2x}=(e^{x})^{2}$, l'équation devient un trinôme en X. N'oublie pas la condition que vérifie X.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X=e^{x}$. D'après F04 (règles de calcul de la notation e^{x}), $e^{2x}=(e^{x})^{2}=X^{2}$, et $X>0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle). L'équation devient :

$$2X^{2}+X-6=0,\quad X>0.$$

Trinôme. Le discriminant vaut $1+48=49$. Les racines sont :

$$X_{1}=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2},$$
$$X_{2}=\frac{-1-7}{4}=-2.$$

Retour à x. La racine -2 est rejetée, car $e^{x}>0$. Il reste $e^{x}=\frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2}>0$, F05 (équations et inéquations exponentielles) donne $x=\ln\frac{3}{2}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=\left\{\ln\frac{3}{2}\right\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{2x}+e^{x}-6>0$.

INDICE

Factorise $2X^{2}+X-6$ à l'aide de ses racines. Pour $X=e^{x}$, l'un des deux facteurs a un signe constant.

CORRIGÉ

Factorisation. Avec les racines trouvées, $2X^{2}+X-6=(2X-3)(X+2)$ pour tout réel X. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&2e^{2x}+e^{x}-6\\&=\left(2e^{x}-3\right)\left(e^{x}+2\right).\end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, $e^{x}+2>0$. Le produit est donc strictement positif si et seulement si $2e^{x}-3>0$, c'est-à-dire $e^{x}>\frac{3}{2}$.

Résolution. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), $e^{x}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>\ln\frac{3}{2}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=\left]\ln\frac{3}{2},+\infty\right[$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 6e^{-x} = 1$.

INDICE

Multiplie les deux membres par e^x, qui n'est jamais nul : tu retrouves un trinôme en $X = e^x$.

CORRIGÉ

Équation équivalente. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x \neq 0$, multiplier les deux membres par e^x donne une équation équivalente. Avec $e^{-x}e^x = 1$ (F04, règles de calcul de la notation e^x) :

$$\begin{aligned} & e^x - 6e^{-x} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 6 = e^x \\ \Leftrightarrow\ & X^2 - X - 6 = 0, \end{aligned}$$

avec $X = e^x$.

Trinôme. Pour tout réel X, $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2)$. Comme $X = e^x > 0$, seule la racine $X = 3$ convient.

Retour à x. On a $e^x = 3$ avec $3 > 0$, soit $x = \ln 3$ (F05, équations et inéquations exponentielles).

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{\ln 3\}$.

Exercice 2

Trois systèmes, dont un sans solution

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 3e^x - e^y = 7 \end{cases}$.

INDICE

Pose $X = e^x$ et $Y = e^y$: le système devient linéaire. Garde en tête que X et Y doivent être strictement positifs.

CORRIGÉ

Système linéaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, avec $X > 0$ et $Y > 0$. Le système devient :

$$\begin{cases} X + 2Y = 7 \\ 3X - Y = 7 \end{cases}$$

Résolution. La seconde équation donne $Y = 3X - 7$. En reportant : $X + 6X - 14 = 7$, donc $X = 3$, puis $Y = 2$.

Retour à (x, y). Les deux valeurs sont strictement positives. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$ et $e^y = 2 \Leftrightarrow y = \ln 2$.

Vérification. Réciproquement, $3 + 2 \times 2 = 7$ et $3 \times 3 - 2 = 7$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{(\ln 3, \ln 2)\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^{x+y} = 12 \\ e^x + e^y = 7 \end{cases}$.

INDICE

Avec $X = e^x$ et $Y = e^y$, la première équation donne le produit XY (F04, règles de calcul de la notation e^x). Deux nombres de somme et de produit connus sont racines d'un même trinôme.

CORRIGÉ

Somme et produit. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. D'après F04 (règles de calcul de la notation e^x), $e^{x+y} = e^x e^y = XY$. Le système équivaut à :

$$\begin{cases} XY = 12 \\ X + Y = 7 \end{cases}$$

Trinôme. Les réels X et Y sont donc les racines du trinôme $t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$. Ainsi $(X, Y) = (3, 4)$ ou $(X, Y) = (4, 3)$: deux couples de réels strictement positifs.

Retour à (x, y). D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), on obtient $(x, y) = (\ln 3, \ln 4)$ ou $(x, y) = (\ln 4, \ln 3)$, avec $\ln 4 = 2 \ln 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est formé de deux couples :

$$\{(\ln 3, 2\ln 2), (2\ln 2, \ln 3)\}.$$

3.

Montrer que le système $\begin{cases} e^x - e^y = 3 \\ 2e^x + e^y = 3 \end{cases}$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Raisonne par l'absurde : résous d'abord le système linéaire en X et Y, puis confronte le résultat à la positivité de l'exponentielle.

CORRIGÉ

Supposons, par l'absurde, qu'un couple (x, y) de réels soit solution. Alors $X = e^x$ et $Y = e^y$ vérifient :

$$\begin{cases} X - Y = 3 \\ 2X + Y = 3 \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations, $3X = 6$, donc $X = 2$, puis $Y = X - 3 = -1$.

On aurait donc $e^y = -1$. Or $e^y > 0$ pour tout réel y (F02, premières propriétés de l'exponentielle) : c'est une contradiction.

Conclusion. Le système n'a aucune solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Quatre formes indéterminées, quatre outils

Calculer chacune des limites suivantes, en signalant chaque forme indéterminée avant de la lever.

1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^3\right)$.

INDICE

Les deux termes tendent vers $+\infty$: mets e^x en facteur, puis utilise F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

Forme indéterminée. C'est une forme du type $+\infty - (+\infty)$. Pour tout réel x :

$$e^x - x^3 = e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right).$$

Limite de la parenthèse. D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 3$, $\dfrac{e^x}{x^3}$ tend vers $+\infty$; son inverse $\dfrac{x^3}{e^x}$ tend donc vers 0, et la parenthèse vers 1.

Produit. De plus, e^x tend vers $+\infty$ (F06, limites de l'exponentielle aux bornes).

Conclusion. Par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x^3\right) = +\infty.$$

2.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

INDICE

Pose $X = 2x$ et écris x^3 en fonction de X. Applique ensuite F07 (croissances comparées) à la variable X.

CORRIGÉ

Changement de variable. C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Pour $x > 0$, posons $X = 2x$: alors $x = \dfrac{X}{2}$ et $x^3 = \dfrac{X^3}{8}$, donc :

$$\frac{e^{2x}}{x^3} = 8 \times \frac{e^X}{X^3}.$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$. D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 3$, $\dfrac{e^X}{X^3}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. Par composée puis produit par $8 > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty.$$

3.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$.

INDICE

Fais apparaître le taux d'accroissement de F08 (dérivée de l'exponentielle) en posant $X = 3x$.

CORRIGÉ

Changement de variable. C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. Pour $x \neq 0$, posons $X = 3x$, qui est non nul :

$$\frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \times \frac{e^{X} - 1}{X}.$$

Limite. Quand x tend vers 0, X tend vers 0. D'après F08 (dérivée de l'exponentielle), $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^{X} - 1}{X} = 1$.

Conclusion. Par composée puis produit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3.$$

4.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 5x\right) e^{x}$.

INDICE

Développe le produit, puis traite chaque terme avec la limite en $-\infty$ de F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

C'est une forme indéterminée du type $(+\infty) \times 0$. Pour tout réel x :

$$\left(x^2 + 5x\right) e^{x} = x^2 e^{x} + 5\, x\, e^{x}.$$

D'après F07 (croissances comparées), avec $n = 2$ puis $n = 1$, $x^2 e^{x}$ et $x\, e^{x}$ tendent vers 0 en $-\infty$.

Conclusion. Par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + 5x\right) e^{x} = 0.$$

Exercice 4

Encadrer exp(−x) par deux polynômes

On veut montrer que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}.$$

1.

Montrer que, pour tout réel x, $e^{-x} \geq 1 - x$.

INDICE

Applique au réel $-x$ l'inégalité de F10 (étude de l'exponentielle : position par rapport à la tangente en 0).

CORRIGÉ

D'après F10 (étude de l'exponentielle : la courbe est au-dessus de sa tangente en 0), pour tout réel t :

$$e^t \geq 1 + t.$$

Soit x un réel. En appliquant cette inégalité à $t = -x$, on obtient $e^{-x} \geq 1 - x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $e^{-x} \geq 1 - x$. C'est en particulier vrai pour tout $x \geq 0$: c'est l'inégalité de gauche.

2.

Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$ (F09, dérivée de e^u). Compare ensuite $g'(x)$ avec l'inégalité de la question 1.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction g est la somme d'une fonction polynôme et de $x \mapsto -e^{-x}$, dérivable d'après F09 (dérivée de e^u) avec $u(x) = -x$. Donc g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 + x + e^{-x} \\ &= e^{-x} - (1 - x). \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 1, $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout $x \geq 0$.

Conclusion. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

3.

En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, puis conclure.

INDICE

Le sens de variation de g découle de la question 2 ; calcule ensuite $g(0)$.

CORRIGÉ

Variations. D'après la question 2, $g'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$: g est croissante sur cet intervalle.

Signe de g. Or $g(0) = 1 - 0 + 0 - e^0 = 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

Conclusion. Avec la question 1, pour tout réel $x \geq 0$:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

4.

En déduire un encadrement de $e^{-0{,}1}$ d'amplitude $0{,}005$.

INDICE

Applique l'encadrement avec $x = 0{,}1$, qui est bien positif.

CORRIGÉ

Le réel $0{,}1$ est positif. L'encadrement de la question 3 donne :

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}1 &\leq e^{-0{,}1} \\ &\leq 1 - 0{,}1 + \frac{0{,}01}{2}, \end{aligned}$$

soit :

$$0{,}9 \leq e^{-0{,}1} \leq 0{,}905.$$

L'amplitude de cet encadrement est $0{,}905 - 0{,}9 = 0{,}005$.

Conclusion. $0{,}9 \leq e^{-0{,}1} \leq 0{,}905$ est un encadrement de $e^{-0{,}1}$ d'amplitude $0{,}005$.

Exercice 5

Étude d'une fonction produit avec exp(−x)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement la limite en $+\infty$.

INDICE

En $+\infty$, c'est une forme indéterminée : écris $f(x) = 2 \times \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{3}{e^x}$ et pense à F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

En $-\infty$. $2x+3$ tend vers $-\infty$, et $-x$ tend vers $+\infty$, donc e^{-x} tend vers $+\infty$ (F06, limites de l'exponentielle aux bornes, et limite d'une composée). Par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$. C'est une forme indéterminée du type $(+\infty) \times 0$. Pour tout réel x :

$$f(x) = 2 \times \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x}.$$

D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 1$, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0. De plus $\dfrac{3}{e^x}$ tend vers 0 (F06). Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit avec $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$ (F09, dérivée de e^u). Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(2x+1)$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (F09, dérivée de e^u, pour $x \mapsto e^{-x}$). Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} - (2x+3)e^{-x} \\ &= (-2x-1)e^{-x} \\ &= -(2x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-(2x+1)$:

- $f'(x) > 0$ pour $x < -\dfrac{1}{2}$;
- $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$;
- $f'(x) < 0$ pour $x > -\dfrac{1}{2}$.

Maximum. On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -(2x+1)e^{-x}$. La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$, de $-\infty$ à $2\sqrt{e}$, puis strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, de $2\sqrt{e}$ vers 0. Son maximum est $2\sqrt{e}$.

3.

Étudier la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

La limite de f en $-\infty$ est infinie : calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.

CORRIGÉ

Pour $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{3}{x}\right)e^{-x}.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $2 + \dfrac{3}{x}$ tend vers 2 et e^{-x} vers $+\infty$. Par produit, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions réelles.

INDICE

Compare d'abord $2\sqrt{e}$ à 1. Ensuite, sur chacun des deux intervalles de monotonie, applique le théorème des valeurs intermédiaires : f y est continue et strictement monotone.

CORRIGÉ

Valeur du maximum. D'après F04 (règles de calcul de la notation e^x), $\sqrt{e} = \left(e^1\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$. Comme $\frac{1}{2} > 0$ et que l'exponentielle est strictement croissante (F02), $e^{\frac{1}{2}} > e^0 = 1$. Donc $2\sqrt{e} > 2 > 1$.

Sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. La fonction f y est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ en $-\infty$, et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e} > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction strictement monotone, 1 a exactement un antécédent sur cet intervalle.

Sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. La fonction f y est continue et strictement décroissante, de $2\sqrt{e}$ vers la limite 0. Comme $0 < 1 < 2\sqrt{e}$, 1 a exactement un antécédent sur cet intervalle.

Bilan. Les deux intervalles n'ont en commun que $-\frac{1}{2}$, où f vaut $2\sqrt{e} \neq 1$: les deux solutions sont distinctes.

Conclusion. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions réelles.

Exercice 6

Une étude en base 2 et en base 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 3 \times 2^x$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $4^x = \left(2^x\right)^2$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 4$.

INDICE

Écris $4 = 2^2$ et utilise F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel). Pose ensuite $X = 2^x$, en notant que $X > 0$.

CORRIGÉ

Écriture en base 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel) :

$$\begin{aligned} 4^x &= \left(2^2\right)^x = 2^{2x} \\ &= \left(2^x\right)^2. \end{aligned}$$

Changement d'inconnue. Posons $X = 2^x$, avec $X > 0$ (F12). L'équation $f(x) = 4$ devient $X^2 - 3X - 4 = 0$, soit $(X - 4)(X + 1) = 0$.

Retour à x. La racine -1 est rejetée car $X > 0$. Il reste $2^x = 4$. D'après F14 (exponentielle et logarithme de base a) avec la base 2 :

$$x = \log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $4^x = \left(2^x\right)^2$, et l'ensemble des solutions de $f(x) = 4$ est $S = \{2\}$.

2.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Les limites de $x \mapsto 2^x$ et de $x \mapsto 4^x$ sont données par F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$). En $+\infty$, mets 2^x en facteur.

CORRIGÉ

En $-\infty$. Les bases 2 et 4 sont strictement supérieures à 1. D'après F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$), 2^x et 4^x tendent vers 0 en $-\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

En $+\infty$. C'est une forme indéterminée du type $+\infty - (+\infty)$. Pour tout réel x, $f(x) = 2^x\left(2^x - 3\right)$, et 2^x tend vers $+\infty$ (F13). Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (\ln 2)\, 2^x \left(2^{x+1} - 3\right)$. Étudier les variations de f et montrer que son minimum vaut $-\dfrac{9}{4}$.

INDICE

F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$) donne $\left(4^x\right)' = (\ln 4)\, 4^x$; écris $\ln 4 = 2 \ln 2$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $2^{x+1} - 3$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après F13 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto a^x$), f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $\ln 4 = 2 \ln 2$ et $4^x = \left(2^x\right)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln 2 \left(2^x\right)^2 \\ &\quad - 3 \ln 2 \times 2^x \\ &= (\ln 2)\, 2^x \left(2 \times 2^x - 3\right) \\ &= (\ln 2)\, 2^x \left(2^{x+1} - 3\right). \end{aligned}$$

Signe. Comme $\ln 2 > 0$ et $2^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2^{x+1} - 3$. D'après F14 (exponentielle et logarithme de base a), $3 = 2^{\log_2 3}$. La fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante (F13, base $2 > 1$), donc :

$$2^{x+1} \geq 3 \Leftrightarrow x + 1 \geq \log_2 3,$$

avec égalité seulement pour $x + 1 = \log_2 3$. Posons $x_0 = \log_2 3 - 1$.

Variations. f' est strictement négative sur $]-\infty, x_0[$, nulle en x_0 seulement, strictement positive sur $]x_0, +\infty[$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Minimum. En x_0, $2^{x_0+1} = 3$, donc $2^{x_0} = \dfrac{2^{x_0+1}}{2} = \dfrac{3}{2}$ (F12), et :

$$f(x_0) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = (\ln 2)\, 2^x \left(2^{x+1} - 3\right)$; f est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$, strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$, et son minimum vaut $-\dfrac{9}{4}$, atteint en $x_0 = \log_2 3 - 1$.

Exercice 7

Primitives à ajuster : exponentielle et puissance réelle

Les fonctions g et h sont définies par :

$$g(x) = x\left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}} \text{ sur } \mathbb{R},$$

$$h(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0,+\infty[\,.$$

1.

Déterminer une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Avec $u(x)=\sqrt{x}$, calcule $u'(x)$: quel facteur constant manque pour reconnaître $u'e^u$?

CORRIGÉ

Forme $u'e^u$. Posons $u(x)=\sqrt{x}$: u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x>0$, $h(x) = 2\,u'(x)\,e^{u(x)}$.

Primitive. D'après F09 (primitives de $u'e^u$), $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de $u'e^u$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi $H(x)=2e^{\sqrt{x}}$ définit une primitive de h sur cet intervalle.

Vérification. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction H définie sur $]0,+\infty[$ par $H(x)=2e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de h.

2.

Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$. Écris g sous la forme $\lambda\, u'\, u^{\alpha}$, vérifie les conditions de F17 (primitives de $u'u^{\alpha}$), puis applique-le.

CORRIGÉ

Forme $u'u^{\alpha}$. Posons $u(x) = x^2 + 1$: u est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$, et $u(x) \geq 1 > 0$ pour tout réel x. Ainsi $g = \dfrac{1}{2}\, u'\, u^{\sqrt{2}}$.

Primitive. L'exposant $\alpha = \sqrt{2}$ est différent de -1. D'après F17 (primitives de $u'u^{\alpha}$), $\dfrac{u^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$ est une primitive de $u'u^{\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Simplification. Comme $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Conclusion. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G_0 définie par :

$$G_0(x) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}+1}.$$

3.

Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, puis vérifier le résultat en dérivant.

INDICE

Les primitives de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ diffèrent d'une constante : calcule la valeur en 0 de celle de la question 2.

CORRIGÉ

Constante. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, les primitives de g sont les fonctions $G_0 + k$, où $k \in \mathbb{R}$. Or $G_0(0) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, donc $G(0) = 0$ impose $k = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Expression. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G(x) &= G_0(x) - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ &\quad \times \left(\left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}+1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Vérification. D'après F17 (dérivée de u^α), pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \left(\sqrt{2}+1\right) \\ &\quad \times 2x \left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}} \\ &= x \left(x^2+1\right)^{\sqrt{2}} = g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction G définie par l'expression ci-dessus, et $G' = g$ sur $\mathbb{R}$.