BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Application	8

Exercice 1

Regrouper les exposants, puis minorer

Dans tout l'exercice, x désigne un réel quelconque.

1.

Écrire $A = \dfrac{e^{3x+1}\left(e^{x-2}\right)^2}{e^{4x}}$ sous la forme e^B, où B est une expression en x à préciser.

INDICE

Commence par $\left(e^{x-2}\right)^2$ avec la règle $(e^a)^r = e^{ra}$ (F04, règles de calcul de la notation e^x). Regroupe ensuite les exposants du numérateur, puis divise.

2.

Montrer que $e^{2\ln 3 - x} \times e^x = 9$.

INDICE

Regroupe d'abord les deux facteurs en une seule exponentielle. Écris ensuite $2\ln 3$ comme le logarithme d'un seul nombre.

3.

Montrer que $\dfrac{e^x + 4e^{-x}}{2} - 2 = \dfrac{(e^x - 2)^2}{2e^x}$.

INDICE

Développe le carré du second membre, puis sépare la fraction en trois termes.

4.

En déduire que $e^x + 4e^{-x} \geq 4$, et préciser pour quel réel x il y a égalité.

INDICE

Regarde le signe du quotient obtenu à la question 3. Pour l'égalité, demande-toi quand un carré est nul.

Exercice 2

Trois équations et une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes, en justifiant chaque équivalence.

1.

$e^{x^2-3} = e^{2x}$.

INDICE

Les deux membres sont de la forme e^A et e^B : quelle propriété de F05 (équations et inéquations exponentielles) permet de comparer A et B ?

2.

$3e^{2x-1} = 5$.

INDICE

Isole e^{2x-1}, puis vérifie le signe du second membre avant d'utiliser le logarithme.

3.

$2e^{4-x} + 7 = 1$.

INDICE

Isole l'exponentielle et regarde le signe du nombre obtenu.

4.

$e^{x^2} < e^{x+6}$.

INDICE

F05 (équations et inéquations exponentielles) transforme l'inégalité entre exponentielles en inégalité entre exposants, dans le même sens. Il reste le signe d'un trinôme.

Exercice 3

Deux asymptotes horizontales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5e^x + 2}{e^x + 3}.$$

1.

Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Pour le dénominateur, pense au signe de e^x. Pour la limite, F06 (limites de l'exponentielle aux bornes) donne le comportement de e^x en $-\infty$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. Mets e^x en facteur en haut et en bas.

3.

Interpréter graphiquement les deux limites obtenues.

INDICE

Une limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$ fournit une droite d'un type particulier.

Exercice 4

Dériver une exponentielle composée, sans oublier u'

Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x^2-2x+1},$$
$$g(x) = \left(x^2+1\right)e^{-2x},$$
$$h(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Écris f sous la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ en nommant u, puis applique F09 (dérivée de e^u) : la dérivée de e^u est $u'e^u$, pas e^u.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -2\left(x^2-x+1\right)e^{-2x}$. En déduire le sens de variation de g.

INDICE

C'est un produit : $(vw)' = v'w + vw'$, avec $w(x) = e^{-2x}$. Pour le signe, calcule le discriminant de x^2-x+1.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{e^{2x}\left(e^x+2\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$.

INDICE

Utilise la dérivée d'un quotient. La dérivée de $x \mapsto e^{2x}$ vient de F09 (dérivée de e^u), celle de $x \mapsto e^x+1$ de F08 (dérivée de l'exponentielle). Mets ensuite e^{2x} en facteur au numérateur.

Exercice 5

Reconnaître la forme u′ exp(u), et ajuster la constante

Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)e^{x^2-3x},$$

$$g(x) = x\,e^{1-x^2},$$

$$h(x) = 6e^{3x+2}.$$

1.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Cherche dans l'exposant une fonction u dont la dérivée est le facteur $2x-3$.

2.

Déterminer une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Compare $h(x)$ avec la dérivée de e^{3x+2}, qui vaut $3e^{3x+2}$.

3.

Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1) = 0$.

INDICE

Avec $u(x) = 1-x^2$, on a $u'(x) = -2x$: écris $g(x)$ comme un multiple constant de $u'(x)e^{u(x)}$. La condition $G(1) = 0$ fixe ensuite la constante.

Exercice 6

Calculer en base a, en revenant à l'exponentielle

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Écrire $2^x \times 8^{1-x}$ sous la forme 2^B, puis sous la forme e^C, où B et C sont des expressions en x.

INDICE

Écris d'abord 8 comme une puissance de 2, puis utilise F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel).

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5^x = 12$.

INDICE

Utilise F14 (exponentielle et logarithme de base a) avec $\log_5$, après avoir vérifié ses conditions sur la base et sur le second membre.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$.

INDICE

Écris les deux membres comme des exponentielles de base e. Attention : $\ln \frac{1}{3}$ est négatif.

4.

Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{2x+1}$ est dérivable, et calculer $f'(x)$.

INDICE

Reviens à l'exponentielle : $3^{2x+1} = e^{(2x+1)\ln 3}$. Applique ensuite F09 (dérivée de e^u).

Exercice 7

Puissances d'exposant réel : calculer et dériver

Dans les questions 1 à 3, x désigne un réel strictement positif.

1.

Simplifier $\dfrac{x^{\sqrt{3}} \times x^{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{x}}$ sous la forme x^{β}.

INDICE

Écris $\sqrt{x}$ comme une puissance de x, puis applique les règles de F15 (puissance d'exposant réel).

2.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1-\sqrt{2}}$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

INDICE

Applique F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^{\alpha}$) avec $\alpha = 1 - \sqrt{2}$. Commence par déterminer le signe de α.

3.

Donner les limites de cette fonction f en 0 à droite et en $+\infty$.

INDICE

F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^{\alpha}$) distingue trois cas selon le signe de l'exposant : tu as déjà déterminé ce signe.

4.

Soit g la fonction définie sur $I = \left]-\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$ par $g(x) = (2x+5)^{\sqrt{2}}$. Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.

INDICE

Pose $u(x) = 2x + 5$ et vérifie sur I la condition de F17 (dérivée de u^{α}) avant de dériver.

Exercice 8

Citer la bonne croissance comparée

Calculer chaque limite en citant le résultat utilisé.

1.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$.

INDICE

Fais apparaître le quotient $\dfrac{e^x}{x^4}$ de F07 (croissances comparées).

2.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x$.

INDICE

Cherche, dans F07 (croissances comparées), la limite en $-\infty$ qui a exactement cette forme.

3.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\sqrt{5}}}$.

INDICE

L'exposant n'est pas un entier : quel énoncé traite les puissances réelles ?

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{5}}}$.

INDICE

Repère l'exposant α et vérifie qu'il est strictement positif avant de citer F18 (croissances comparées avec des puissances réelles).

5.

$\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\ln x$.

INDICE

Écris $\sqrt{x}$ comme une puissance de x d'exposant réel.