BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Application	8

Exercice 1

Regrouper les exposants, puis minorer

Dans tout l'exercice, x désigne un réel quelconque.

1.

Écrire $A = \dfrac{e^{3x+1}\left(e^{x-2}\right)^2}{e^{4x}}$ sous la forme e^B, où B est une expression en x à préciser.

INDICE

Commence par $\left(e^{x-2}\right)^2$ avec la règle $(e^a)^r = e^{ra}$ (F04, règles de calcul de la notation e^x). Regroupe ensuite les exposants du numérateur, puis divise.

CORRIGÉ

Le carré. D'après les règles de calcul de la notation e^x (F04), avec le rationnel $r = 2$:

$$\begin{aligned}\left(e^{x-2}\right)^2 &= e^{2(x-2)}\\ &= e^{2x-4}.\end{aligned}$$

Produit, puis quotient. Toujours d'après F04, $e^a e^b = e^{a+b}$ et $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$:

$$\begin{aligned}A &= \frac{e^{3x+1}\,e^{2x-4}}{e^{4x}}\\ &= \frac{e^{5x-3}}{e^{4x}}\\ &= e^{5x-3-4x}\\ &= e^{x-3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $A = e^B$ avec $B = x - 3$.

2.

Montrer que $e^{2\ln 3 - x} \times e^x = 9$.

INDICE

Regroupe d'abord les deux facteurs en une seule exponentielle. Écris ensuite $2\ln 3$ comme le logarithme d'un seul nombre.

CORRIGÉ

Un seul exposant. D'après les règles de calcul de la notation e^x (F04) :

$$\begin{aligned}e^{2\ln 3 - x} \times e^x &= e^{2\ln 3 - x + x}\\ &= e^{2\ln 3}.\end{aligned}$$

Valeur. D'après les propriétés du logarithme, $2\ln 3 = \ln\left(3^2\right) = \ln 9$. Comme $9 > 0$, les premières propriétés de l'exponentielle (F02) donnent $e^{\ln 9} = 9$.

Conclusion. Pour tout réel x, $e^{2\ln 3 - x} \times e^x = 9$.

3.

Montrer que $\dfrac{e^x + 4e^{-x}}{2} - 2 = \dfrac{(e^x - 2)^2}{2e^x}$.

INDICE

Développe le carré du second membre, puis sépare la fraction en trois termes.

CORRIGÉ

On part du second membre. D'une part, $(e^x - 2)^2 = e^{2x} - 4e^x + 4$; d'autre part, $e^x \neq 0$.

D'après F04 (règles de calcul de la notation e^x), $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ et $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{(e^x - 2)^2}{2e^x} &= \frac{e^{2x}}{2e^x} - \frac{4e^x}{2e^x} \\ &\quad + \frac{4}{2e^x} \\ &= \frac{e^x}{2} - 2 + 2e^{-x} \\ &= \frac{e^x + 4e^{-x}}{2} - 2.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\frac{e^x + 4e^{-x}}{2} - 2 = \frac{(e^x - 2)^2}{2e^x}.$$

4.

En déduire que $e^x + 4e^{-x} \geq 4$, et préciser pour quel réel x il y a égalité.

INDICE

Regarde le signe du quotient obtenu à la question 3. Pour l'égalité, demande-toi quand un carré est nul.

CORRIGÉ

Inégalité. Un carré est positif ou nul, et $2e^x > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle). D'après la question 3, le quotient $\dfrac{(e^x - 2)^2}{2e^x}$ est donc positif ou nul :

$$\frac{e^x + 4e^{-x}}{2} - 2 \geq 0.$$

En multipliant par $2 > 0$, on obtient $e^x + 4e^{-x} \geq 4$.

Cas d'égalité. Il y a égalité si et seulement si $(e^x - 2)^2 = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2$. Comme $2 > 0$, la résolution de $e^x = k$ (F05) donne $x = \ln 2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $e^x + 4e^{-x} \geq 4$, avec égalité si et seulement si $x = \ln 2$.

Exercice 2

Trois équations et une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes, en justifiant chaque équivalence.

1.

$e^{x^2-3} = e^{2x}$.

INDICE

Les deux membres sont de la forme e^A et e^B : quelle propriété de F05 (équations et inéquations exponentielles) permet de comparer A et B ?

CORRIGÉ

Équation équivalente. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), pour tous réels A et B, $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{x^2-3} = e^{2x} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3 = 2x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Trinôme. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$. Ses racines sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2-4}{2} = -1, \\ x_2 &= \frac{2+4}{2} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{-1, 3\}$.

2.

$3e^{2x-1} = 5$.

INDICE

Isole e^{2x-1}, puis vérifie le signe du second membre avant d'utiliser le logarithme.

CORRIGÉ

Isoler l'exponentielle. Pour tout réel x :

$$3e^{2x-1} = 5 \Leftrightarrow e^{2x-1} = \frac{5}{3}.$$

Passage au logarithme. Le réel $\dfrac{5}{3}$ est strictement positif. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles, cas $k > 0$) :

$$\begin{aligned} & e^{2x-1} = \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 1 = \ln\frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1 + \ln 5 - \ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{1 + \ln 5 - \ln 3}{2}\right\}$.

3.

$2e^{4-x}+7=1$.

INDICE

Isole l'exponentielle et regarde le signe du nombre obtenu.

CORRIGÉ

Pour tout réel x :

$$2e^{4-x}+7=1 \Leftrightarrow e^{4-x}=-3.$$

Or $e^{4-x}>0$ pour tout réel x (F02, premières propriétés de l'exponentielle) : il ne peut pas être égal à -3. C'est le cas $k\leq 0$ de F05 (équations et inéquations exponentielles).

On n'écrit jamais $\ln(-3)$, qui n'a pas de sens.

Conclusion. L'ensemble des solutions est vide : $S=\varnothing$.

4.

$e^{x^2}<e^{x+6}$.

INDICE

F05 (équations et inéquations exponentielles) transforme l'inégalité entre exponentielles en inégalité entre exposants, dans le même sens. Il reste le signe d'un trinôme.

CORRIGÉ

Inéquation équivalente. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), pour tous réels A et B, $e^A<e^B \Leftrightarrow A<B$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{x^2}<e^{x+6} \\ \Leftrightarrow\ & x^2<x+6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x-6<0. \end{aligned}$$

Signe du trinôme. Le trinôme x^2-x-6 a pour discriminant 25 et pour racines -2 et 3. Son coefficient dominant est positif : il est strictement négatif entre ses racines, et seulement là.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=]-2,3[$.

Exercice 3

Deux asymptotes horizontales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5e^x + 2}{e^x + 3}.$$

1.

Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Pour le dénominateur, pense au signe de e^x. Pour la limite, F06 (limites de l'exponentielle aux bornes) donne le comportement de e^x en $-\infty$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle), donc $e^x + 3 > 3 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Limite en $-\infty$. D'après F06 (limites de l'exponentielle aux bornes), $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Le numérateur tend donc vers 2 et le dénominateur vers $3 \neq 0$. Par quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. Mets e^x en facteur en haut et en bas.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$. On met e^x en facteur, avec $e^x \neq 0$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x\,(5 + 2e^{-x})}{e^x\,(1 + 3e^{-x})} \\ &= \frac{5 + 2e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$, donc e^{-x} tend vers 0 (F06, limites de l'exponentielle aux bornes, et limite d'une composée). Le numérateur tend vers 5, le dénominateur vers 1.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

3.

Interpréter graphiquement les deux limites obtenues.

INDICE

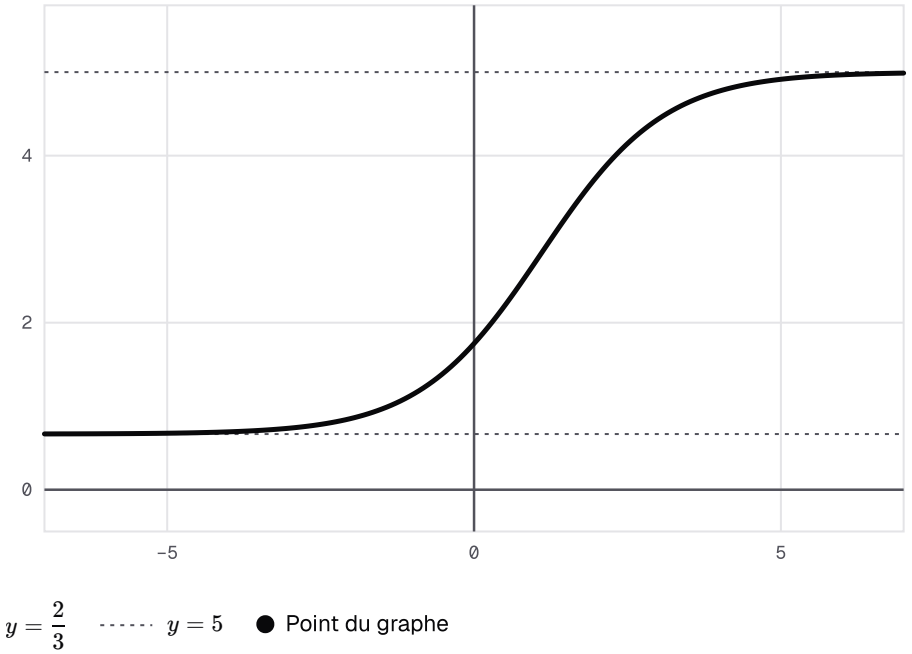
Une limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$ fournit une droite d'un type particulier.

CORRIGÉ

En $-\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$, la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

En $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$, la droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Conclusion. La courbe de f admet deux asymptotes horizontales : $y = \dfrac{2}{3}$ en $-\infty$ et $y = 5$ en $+\infty$.



Courbe de f : x ↦ (5eˣ + 2)/(eˣ + 3), entre ses deux asymptotes horizontales : la droite d'équation y = 2/3 vers la gauche et la droite d'équation y = 5 vers la droite.

Exercice 4

Dériver une exponentielle composée, sans oublier u'

Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x^2-2x+1},$$
$$g(x) = \left(x^2+1\right)e^{-2x},$$
$$h(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Écris f sous la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ en nommant u, puis applique F09 (dérivée de e^u) : la dérivée de e^u est $u'e^u$, pas e^u.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 1$. La fonction polynôme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 6x - 2$ pour tout réel x.

D'après F09 (dérivée de e^u), la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,e^{u(x)} \\ &= (6x-2)\,e^{3x^2-2x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = (6x-2)\,e^{3x^2-2x+1}$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -2\left(x^2 - x + 1\right)e^{-2x}$. En déduire le sens de variation de g.

INDICE

C'est un produit : $(vw)' = v'w + vw'$, avec $w(x) = e^{-2x}$. Pour le signe, calcule le discriminant de $x^2 - x + 1$.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $v(x) = x^2 + 1$ et $w(x) = e^{-2x}$. On a $v'(x) = 2x$, et F09 (dérivée de e^u) avec $u(x) = -2x$ donne $w'(x) = -2e^{-2x}$. Produit de deux fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\,e^{-2x} \\ &\quad - 2\left(x^2 + 1\right)e^{-2x} \\ &= \left(-2x^2 + 2x - 2\right)e^{-2x} \\ &= -2\left(x^2 - x + 1\right)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Signe. Le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. De plus $e^{-2x} > 0$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle). Donc $g'(x) < 0$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = -2\left(x^2 - x + 1\right)e^{-2x}$, et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{e^{2x}\left(e^x + 2\right)}{\left(e^x + 1\right)^2}$.

INDICE

Utilise la dérivée d'un quotient. La dérivée de $x \mapsto e^{2x}$ vient de F09 (dérivée de e^u), celle de $x \mapsto e^x + 1$ de F08 (dérivée de l'exponentielle). Mets ensuite e^{2x} en facteur au numérateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout réel x, $e^x + 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas. Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ (F09, dérivée de e^u) et $x \mapsto e^x + 1$ (F08, dérivée de l'exponentielle) sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Quotient de telles fonctions, h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $e^{2x}e^x = e^{3x}$ (F04, règles de calcul de la notation e^x), le numérateur de $h'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &2e^{2x}\left(e^x + 1\right) - e^{2x}\,e^x \\ &= 2e^{3x} + 2e^{2x} - e^{3x} \\ &= e^{3x} + 2e^{2x} \\ &= e^{2x}\left(e^x + 2\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{e^{2x}\left(e^x + 2\right)}{\left(e^x + 1\right)^2}.$$

Exercice 5

Reconnaître la forme u′ exp(u), et ajuster la constante

Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)e^{x^2-3x},$$
$$g(x) = x\,e^{1-x^2},$$
$$h(x) = 6e^{3x+2}.$$

1.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Cherche dans l'exposant une fonction u dont la dérivée est le facteur $2x-3$.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = x^2 - 3x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x - 3$. Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = u'(x)\,e^{u(x)}.$$

D'après F09 (primitives de $u'e^u$), $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{x^2-3x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Compare $h(x)$ avec la dérivée de e^{3x+2}, qui vaut $3e^{3x+2}$.

CORRIGÉ

Forme de référence. D'après F09 (primitives de $u'e^u$, cas $x \mapsto e^{ax+b}$ avec $a = 3 \neq 0$), la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x+2}$ est une primitive de $x \mapsto e^{3x+2}$ sur $\mathbb{R}$.

Facteur constant. Comme $h(x) = 6e^{3x+2}$, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 6 \times \dfrac{1}{3}e^{3x+2} = 2e^{3x+2}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Vérification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2 \times 3e^{3x+2} \\ &= 6e^{3x+2} = h(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction $H : x \mapsto 2e^{3x+2}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1) = 0$.

INDICE

Avec $u(x) = 1 - x^2$, on a $u'(x) = -2x$: écris $g(x)$ comme un multiple constant de $u'(x)e^{u(x)}$. La condition $G(1) = 0$ fixe ensuite la constante.

CORRIGÉ

Forme $u'e^u$. Posons $u(x) = 1 - x^2$: u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \times (-2x)\, e^{1-x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\, u'(x)\, e^{u(x)}. \end{aligned}$$

Toutes les primitives. D'après F09 (primitives de $u'e^u$), les primitives de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Constante. La condition $G(1) = 0$ s'écrit $-\frac{1}{2}e^0 + k = 0$, soit $k = \frac{1}{2}$. Une seule constante convient.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \frac{1 - e^{1-x^2}}{2}.$$

Exercice 6

Calculer en base a, en revenant à l'exponentielle

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Écrire $2^x \times 8^{1-x}$ sous la forme 2^B, puis sous la forme e^C, où B et C sont des expressions en x.

INDICE

Écris d'abord 8 comme une puissance de 2, puis utilise F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel).

CORRIGÉ

Base 2. On a $8 = 2^3$. D'après F12 (règles de calcul des puissances à exposant réel) :

$$\begin{aligned} 2^x \times 8^{1-x} &= 2^x \times \left(2^3\right)^{1-x} \\ &= 2^x \times 2^{3-3x} \\ &= 2^{3-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi $B = 3 - 2x$.

Base e. Par définition de l'exponentielle de base 2 (F11, avec $2 > 0$), $2^{3-2x} = e^{(3-2x)\ln 2}$. Ainsi $C = (3-2x)\ln 2$.

Conclusion. $2^x \times 8^{1-x} = 2^B = e^C$, avec $B = 3 - 2x$ et $C = (3-2x)\ln 2$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5^x = 12$.

INDICE

Utilise F14 (exponentielle et logarithme de base a) avec $\log_5$, après avoir vérifié ses conditions sur la base et sur le second membre.

CORRIGÉ

La base 5 est strictement positive et différente de 1, et $12 > 0$. D'après F14 (exponentielle et logarithme de base a) :

$$\begin{aligned} 5^x = 12 &\Leftrightarrow x = \log_5 12 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 12}{\ln 5}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{\ln 12}{\ln 5}\right\}$, avec $\dfrac{\ln 12}{\ln 5} \approx 1{,}544$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$.

INDICE

Écris les deux membres comme des exponentielles de base e. Attention : $\ln\frac{1}{3}$ est négatif.

CORRIGÉ

Retour à la base e. D'après F11 (exponentielle de base a), $\left(\frac{1}{3}\right)^x = e^{x\ln\frac{1}{3}} = e^{-x\ln 3}$. De plus $9 = e^{\ln 9} = e^{2\ln 3}$ (F02, premières propriétés de l'exponentielle).

Résolution. D'après F05 (équations et inéquations exponentielles), puis car $\ln 3 > 0$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9\\ \Leftrightarrow\ &-x\ln 3 > 2\ln 3\\ \Leftrightarrow\ &-x > 2\\ \Leftrightarrow\ &x < -2.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -2[$.

4.

Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{2x+1}$ est dérivable, et calculer $f'(x)$.

INDICE

Reviens à l'exponentielle : $3^{2x+1} = e^{(2x+1)\ln 3}$. Applique ensuite F09 (dérivée de e^u).

CORRIGÉ

Écriture exponentielle. D'après F11 (exponentielle de base a), pour tout réel x, $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = (2x+1)\ln 3$. La fonction affine u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2\ln 3$.

Dérivée. D'après F09 (dérivée de e^u), f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\ln 3\ e^{(2x+1)\ln 3}\\ &= 2\ln 3 \times 3^{2x+1}.\end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\ln 3 \times 3^{2x+1}$.

Exercice 7

Puissances d'exposant réel : calculer et dériver

Dans les questions 1 à 3, x désigne un réel strictement positif.

1.

Simplifier $\dfrac{x^{\sqrt{3}} \times x^{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{x}}$ sous la forme x^{β}.

INDICE

Écris $\sqrt{x}$ comme une puissance de x, puis applique les règles de F15 (puissance d'exposant réel).

CORRIGÉ

Comme $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (puissance rationnelle, F12). D'après les règles de calcul de F15 (puissance d'exposant réel) :

$$\begin{aligned} \frac{x^{\sqrt{3}} \times x^{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{x}} &= \frac{x^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x^{2}}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &= x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, l'expression vaut x^{β} avec $\beta = \dfrac{3}{2}$.

2.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1-\sqrt{2}}$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

INDICE

Applique F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^{\alpha}$) avec $\alpha = 1 - \sqrt{2}$. Commence par déterminer le signe de α.

CORRIGÉ

Signe de l'exposant. On a $\sqrt{2} > 1$, donc $\alpha = 1 - \sqrt{2} < 0$.

Dérivée. D'après F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^{\alpha}$), f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \left(1 - \sqrt{2}\right) x^{-\sqrt{2}}.$$

Signe. Pour tout $x > 0$, $x^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\ln x} > 0$, donc $f'(x) < 0$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \left(1 - \sqrt{2}\right) x^{-\sqrt{2}}$, et f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3.

Donner les limites de cette fonction f en 0 à droite et en $+\infty$.

INDICE

F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^\alpha$) distingue trois cas selon le signe de l'exposant : tu as déjà déterminé ce signe.

CORRIGÉ

L'exposant $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ est strictement négatif (question 2). C'est le cas $\alpha < 0$ de F16 (dérivée, variations et limites de $x \mapsto x^\alpha$).

Conclusion.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

4.

Soit g la fonction définie sur $I = \left]-\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$ par $g(x) = (2x+5)^{\sqrt{2}}$. Justifier que g est dérivable sur I et calculer $g'(x)$.

INDICE

Pose $u(x) = 2x + 5$ et vérifie sur I la condition de F17 (dérivée de u^α) avant de dériver.

CORRIGÉ

Hypothèses de F17. Posons $u(x) = 2x + 5$: u est dérivable sur l'intervalle I et $u'(x) = 2$. Soit $x \in I$: $x > -\dfrac{5}{2}$, donc $u(x) > 0$.

Dérivée. D'après F17 (dérivée de u^α), $g = u^{\sqrt{2}}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = \sqrt{2}\, u'(x)\, u(x)^{\sqrt{2}-1}$, soit :

$$g'(x) = 2\sqrt{2}\,(2x+5)^{\sqrt{2}-1}.$$

Conclusion. g est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = 2\sqrt{2}\,(2x+5)^{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 8

Citer la bonne croissance comparée

Calculer chaque limite en citant le résultat utilisé.

1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$.

INDICE

Fais apparaître le quotient $\dfrac{e^x}{x^4}$ de F07 (croissances comparées).

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. Pour $x > 0$:

$$\frac{x^4}{e^x} = \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^4}}.$$

D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$. Par quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

2.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x$.

INDICE

Cherche, dans F07 (croissances comparées), la limite en $-\infty$ qui a exactement cette forme.

CORRIGÉ

Le produit est une forme indéterminée, car x^3 tend vers $-\infty$ et e^x vers 0.

D'après F07 (croissances comparées) avec $n = 3$:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0.$$

3.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{\sqrt{5}}}$.

INDICE

L'exposant n'est pas un entier : quel énoncé traite les puissances réelles ?

CORRIGÉ

L'exposant $\alpha = \sqrt{5}$ n'est pas entier : F07 (croissances comparées avec les puissances entières) ne s'applique pas. Mais α est un réel strictement positif.

D'après F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\sqrt{5}}} = +\infty.$$

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{5}}}$.

INDICE

Repère l'exposant α et vérifie qu'il est strictement positif avant de citer F18 (croissances comparées avec des puissances réelles).

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. L'exposant $\alpha = \dfrac{1}{5}$ est strictement positif.

D'après F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{5}}} = 0.$$

5.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln x$.

INDICE

Écris $\sqrt{x}$ comme une puissance de x d'exposant réel.

CORRIGÉ

Pour $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Le produit est une forme indéterminée, car $\sqrt{x}$ tend vers 0 et $\ln x$ vers $-\infty$.

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2} > 0$, F18 (croissances comparées avec des puissances réelles) donne $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$.

Conclusion.

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln x = 0.$$