BURHAN

Fonctions exponentielles et puissances réelles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/fonctions-exponentielles/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions exponentielles et puissances réelles	Semestre 1

Retourner le logarithme

Ton amie choisit en secret un réel y strictement positif. Elle ne te donne qu'un indice : $\ln y = 2$. Peux-tu retrouver y ?

Au chapitre précédent, tu partais de y pour calculer $\ln y$. Ici, tu fais le chemin du retour : on connaît le logarithme, on cherche le nombre.

Devine : Combien de candidats ?

Combien de réels $y > 0$ vérifient $\ln y = 2$?

A. Aucun : 2 n'est le logarithme d'aucun réel.
Faux.
Faux : $\ln$ prend toutes les valeurs réelles, donc la valeur 2 aussi.

B. Exactement un.
Juste.
Juste : $\ln$ est strictement croissante et prend chaque valeur réelle une seule fois.

C. Deux, opposés l'un de l'autre.
Faux.
Un logarithme n'existe que pour $y > 0$: un réel négatif ne convient jamais.

D. Une infinité.
Faux.
Deux réels distincts ont des logarithmes distincts, car $\ln$ est strictement croissante.

Correction
La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et elle prend toutes les valeurs réelles. La valeur 2 est donc atteinte, et une seule fois.

Ce réel unique sera noté $\exp(2)$, puis e^2. Ce chapitre étudie la fonction qui associe à chaque réel x le réel $y > 0$ tel que $\ln y = x$.

À la fin du chapitre, tu sauras calculer, dériver et étudier des fonctions qui contiennent e^x. Tu sauras aussi **démontrer** chacune de leurs propriétés, en revenant au logarithme. Enfin, tu donneras un sens à des écritures comme $2^{\sqrt{2}}$ ou x^π.

L'exponentielle, réciproque du logarithme

Lire le logarithme à l'envers

Petit rappel. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Par le théorème de la fonction réciproque, $\ln$ réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est continue, de même sens de variation.

Dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Vérifie : Un point et son reflet

Le point $A(e, 1)$ est sur la courbe de $\ln$, car $\ln e = 1$. Quel point est alors sur la courbe de la fonction réciproque de $\ln$?

A. Le point $(e, 1)$ lui-même.

Faux.

Ce point est sur la courbe de $\ln$; la réciproque associe à e un autre réel.

B. Le point $(-e, -1)$.

Faux.

C'est le symétrique de A par rapport à l'origine, pas par rapport à la droite $y = x$.

C. Le point $(1, e)$.

Juste.

Juste : la symétrie d'axe $y = x$ échange abscisse et ordonnée.

D. Le point $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

Faux.

Tu as pris l'inverse d'une coordonnée au lieu d'échanger les deux coordonnées.

Correction

Le reflet d'un point (a, b) par la symétrie d'axe $y = x$ est le point (b, a). Le reflet de $A(e, 1)$ est donc le point $(1, e)$.

La réciproque de $\ln$ associe au réel 1 le réel e, car $\ln e = 1$.

Définition : Fonction exponentielle népérienne

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (chapitre des logarithmes).

On appelle **fonction exponentielle népérienne**, notée $\exp$, sa fonction réciproque. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, +\infty[$:

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y.$$

En clair. $\exp(x)$ est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut x. L'équivalence porte deux conditions : x est un réel quelconque, et y est strictement positif. Sans la seconde, $\ln y$ n'existe pas.

Exemple : lire des valeurs de exp

Dans chaque cas, on reconnaît x comme le logarithme d'un réel $y > 0$ connu :

- comme $\ln 1 = 0$, l'équivalence donne $\exp(0) = 1$;
- comme $\ln 4 = 2\ln 2$, on obtient $\exp(2\ln 2) = 4$;
- comme $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$, on obtient $\exp(-\ln 3) = \dfrac{1}{3}$.

Les premières propriétés

La définition livre aussitôt des propriétés : $\exp(x)$ est strictement positif, $\exp$ et $\ln$ se compensent, $\exp$ croît comme $\ln$.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque propriété de $\exp$ est une propriété de $\ln$ lue dans l'autre sens. La preuve traduit $y = \exp(x)$ en $x = \ln y$, puis revient.

Propriété : Premières propriétés de la fonction exponentielle

- Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$.
- Pour tout réel $y > 0$: $\exp(\ln y) = y$.
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$, où e est le réel tel que $\ln e = 1$.
- $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b : $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$, et $\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \exp(x)$. Par FO1, $y \in]0, +\infty[$, donc $\exp(x) > 0$, et $x = \ln y$, c'est-à-dire $\ln\big(\exp(x)\big) = x$.

Étape 2. Soit $y > 0$ et $x = \ln y$. Par FO1, $y = \exp(x)$, donc $\exp(\ln y) = y$. Comme $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$, on obtient $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Étape 3. $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la fonction réciproque (chapitre des limites et de la continuité), sa réciproque $\exp$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Étape 4. Si $a < b$, alors $\exp(a) < \exp(b)$. Si $a \geq b$, alors $\exp(a) \geq \exp(b)$; par contraposée, $\exp(a) < \exp(b)$ entraîne $a < b$. Enfin, si $a = b$, alors $\exp(a) = \exp(b)$; réciproquement, si $a \neq b$, l'un est strictement inférieur à l'autre et les images diffèrent : $\exp(a) = \exp(b)$ entraîne $a = b$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer une propriété de $\exp$, on la traduit en une propriété de $\ln$, déjà connue. La continuité et le sens de variation ne viennent d'aucun calcul. Ils viennent du théorème de la fonction réciproque, appliqué à $\ln$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve précédente, d'où vient la stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$?

A. Du signe de la dérivée de $\exp$, qui est positive.
Faux.
Cette dérivée n'est pas encore connue : sa preuve viendra plus loin, et elle utilise ce résultat.

B. De l'inégalité $\exp(x) > 0$, vraie pour tout réel x.
Faux.
Une fonction positive peut décroître : la positivité ne dit rien du sens de variation.

C. Des deux égalités $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
Faux.
Elles donnent $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$, pas le sens de variation.

D. Du théorème de la fonction réciproque.
Juste.
Juste : $\ln$ est continue et strictement croissante sur un intervalle, donc sa réciproque aussi.

Correction
L'étape 3 de la preuve utilise : $\ln$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
D'après le théorème de la fonction réciproque, $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Aucune dérivée n'intervient : la dérivée de $\exp$ se démontre plus loin, à partir de ce résultat.

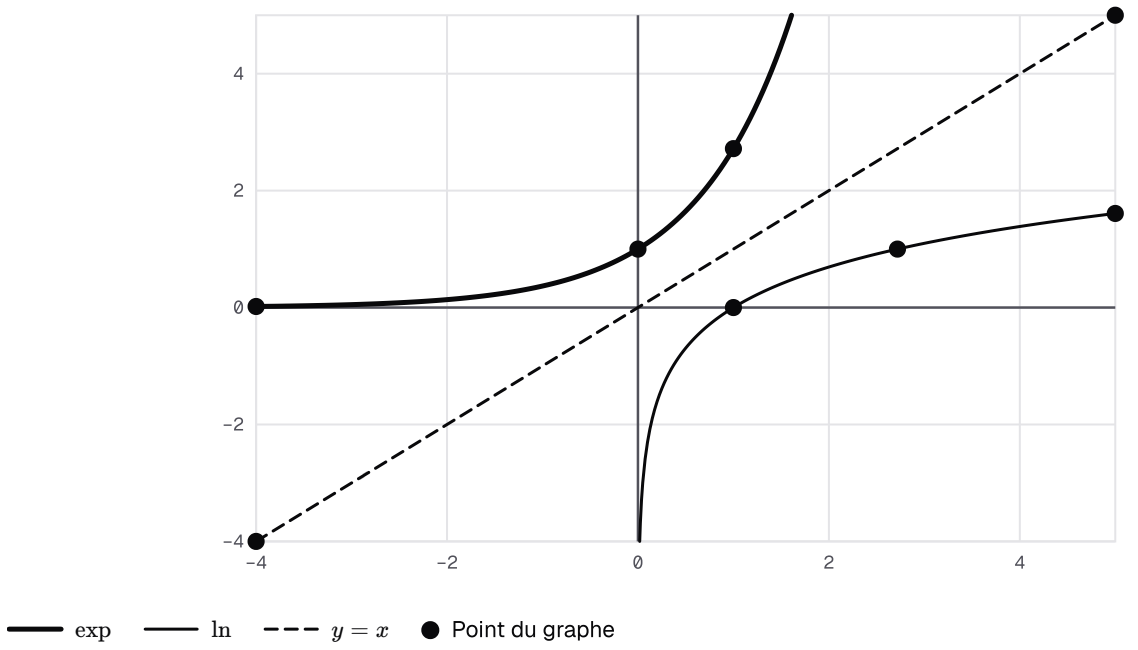
Exemple : Contre-exemple : la condition y > 0

Pour tout réel x, $\ln\big(\exp(x)\big) = x$: par exemple, $\ln\big(\exp(-3)\big) = -3$.

L'autre égalité exige $y > 0$. L'écriture $\exp\big(\ln(-2)\big)$ n'a aucun sens, car $\ln(-2)$ n'existe pas.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \exp(\ln x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ seulement, où elle vaut x. Ce n'est pas la fonction $x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Deux courbes en miroir



Les courbes de exp et de ln, symétriques par rapport à la droite d'équation y = x. Les points (0, 1) et (1, 0) se correspondent, comme les points (1, e) et (e, 1).

À toi : Rédige deux simplifications

Simplifie $A = \exp(\ln 5) + \ln\big(\exp(-2)\big)$. Puis rédige pour quels réels x on a $\exp\big(\ln(x-1)\big) = x - 1$.

Indice 1

Utilise les deux égalités de compensation, chacune avec sa condition.

Indice 2

Pour A : $5 > 0$, et -2 est un réel. Pour la seconde question, cherche où $\ln(x-1)$ existe.

Indice 3

Point délicat : la seconde égalité n'a de sens que si $x - 1 > 0$.

Réponse

Calcul de A. Comme $5 > 0$, $\exp(\ln 5) = 5$. Comme -2 est un réel, $\ln\big(\exp(-2)\big) = -2$. Donc $A = 5 - 2 = 3$.

Domaine de l'égalité. Soit x un réel. L'écriture $\ln(x-1)$ existe si et seulement si $x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. Pour un tel x, le réel $y = x - 1$ est strictement positif, donc $\exp(\ln y) = y$.

Conclusion. $A = 3$, et l'égalité $\exp\big(\ln(x-1)\big) = x - 1$ est vraie exactement pour $x > 1$.

Une somme devient un produit

Une somme devient un produit

Devine : Une somme dans l'exposant

D'après toi, que vaut $\exp(\ln 5 + \ln 4)$?

A. 9

Faux.

Tu as ajouté 5 et 4 : l'exponentielle d'une somme n'est pas une somme.

B. 20

Juste.

Juste : $\ln 5 + \ln 4 = \ln 20$, et $\exp(\ln 20) = 20$.

C. $\ln 20$

Faux.

$\exp$ compense $\ln$: il ne reste aucun logarithme.

D. 625

Faux.

$625 = 5^4$: rien ici n'élève 5 à la puissance 4.

Correction

Par la propriété fondamentale du logarithme, $\ln 5 + \ln 4 = \ln(5 \times 4) = \ln 20$. Comme $20 > 0$, $\exp(\ln 20) = 20$.

On retrouve le produit $\exp(\ln 5) \times \exp(\ln 4) = 5 \times 4$.

Le même calcul marche avec d'autres nombres. Pars de $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$, puis applique $\exp$ aux deux membres : $\exp(\ln 2 + \ln 3) = 6$.

Or $6 = \exp(\ln 2) \times \exp(\ln 3)$. L'exponentielle d'une somme est ici le produit des exponentielles.

Cette règle vaut-elle pour tous les réels a et b, et pas seulement pour des logarithmes connus ?

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux membres sont strictement positifs. On compare donc leurs logarithmes : s'ils sont égaux, les nombres le sont aussi.

La relation fonctionnelle

Propriété : Relation fonctionnelle de l'exponentielle

Pour tous réels a et b et tout rationnel r :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)},$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}, \qquad \exp(ra) = \big(\exp(a)\big)^r.$$

Démonstration

Étape 1. Dans chaque égalité, les deux membres sont des réels strictement positifs (F02 ; une puissance rationnelle d'un réel strictement positif est strictement positive). Comme $\ln$ est strictement croissante, donc injective, sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer qu'ils ont le même logarithme.

Étape 2. Par la propriété fondamentale du logarithme (chapitre des logarithmes) et F02 : $\ln\big(\exp(a)\exp(b)\big) = \ln\big(\exp(a)\big) + \ln\big(\exp(b)\big) = a + b = \ln\big(\exp(a+b)\big)$.

Étape 3. Avec $b = -a$: $\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = 1$ (F02), donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$. Puis $\exp(a - b) = \exp(a)\exp(-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Étape 4. Pour $r \in \mathbb{Q}$: $\ln\Big(\big(\exp(a)\big)^r\Big) = r\ln\big(\exp(a)\big) = ra = \ln\big(\exp(ra)\big)$, par la règle $\ln(y^r) = r\ln y$ (chapitre des logarithmes).

En clair. Pour tous réels a et b, l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, et celle d'une différence est un quotient. La règle $\exp(ra) = \big(\exp(a)\big)^r$, elle, n'est écrite ici que pour un exposant r **rationnel**.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Deux réels strictement positifs sont égaux dès qu'ils ont le même logarithme, car $\ln$ est injective. Toute la preuve repose sur ce geste : calculer le logarithme de chaque membre. Les règles du logarithme font le reste.

> **Vérifie : L'argument de l'étape 4**
>
> L'étape 4 de la preuve montre que $\exp(ra) = \big(\exp(a)\big)^r$. Quelle règle du logarithme emploie-t-elle ?
>
> **A.** $\ln(y^r) = r\ln y$, pour $y > 0$ et r rationnel
> **Juste.**
> Juste : appliquée à $y = \exp(a)$, elle donne $r\ln\big(\exp(a)\big) = ra$.
>
> **B.** $\ln(y + z) = \ln y + \ln z$, pour $y > 0$ et $z > 0$
> **Faux.**
> Cette règle est fausse : $\ln$ transforme un produit en somme, pas une somme en somme.
>
> **C.** $\ln(ry) = r\ln y$, pour $y > 0$ et $r > 0$
> **Faux.**
> Faux en général : $\ln(2y) = \ln 2 + \ln y$, et non $2\ln y$.
>
> **D.** $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$, valeurs connues
> **Faux.**
> Ces valeurs servent ailleurs, pour $\exp(0)$ et $\exp(1)$.
>
> **Correction**

On calcule le logarithme de chaque membre. D'une part, grâce à la règle des puissances rationnelles du logarithme :

$$\begin{aligned}\ln\Big(\big(\exp(a)\big)^{r}\Big) &= r\ln\big(\exp(a)\big)\\ &= ra.\end{aligned}$$

D'autre part, $\ln\big(\exp(ra)\big) = ra$.

Les deux membres sont strictement positifs et ont le même logarithme. Comme $\ln$ est injective, ils sont égaux.

Exemple : pourquoi r est rationnel

Avec $r = 3$: $\exp(3a) = \big(\exp(a)\big)^3$. Avec $r = \dfrac{1}{2}$: $\exp\left(\dfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$, car $\exp(a) > 0$.

En revanche, l'écriture $\big(\exp(a)\big)^{\sqrt{2}}$ n'a encore aucun sens : tu ne connais les puissances que pour un exposant rationnel. L'hypothèse « r rationnel » est donc nécessaire ici. Les puissances réelles viendront à la fin du chapitre.

La notation des puissances

Définition : Notation e^x

Pour tout réel x, on note $e^x = \exp(x)$.

Conséquence (F03) : cette notation prolonge les puissances rationnelles de e, car pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(r) = \exp(r \times 1) = \big(\exp(1)\big)^r = e^r$ (F03).

Avec elle, pour tous réels a et b, tout rationnel r et tout réel $y > 0$:

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad \big(e^a\big)^r = e^{ra}, \quad \ln\big(e^a\big) = a, \quad e^{\ln y} = y.$$

Exemple : simplifier une expression

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\frac{e^{3x} \times e^{1-x}}{\big(e^x\big)^2} &= \frac{e^{3x+1-x}}{e^{2x}}\\ &= e^{2x+1-2x} = e^1 = e.\end{aligned}$$

On a regroupé le produit, puis appliqué la règle du quotient. Le résultat ne dépend pas de x.

Le piège de la somme

Attention : une somme d'exponentielles ne se regroupe pas

✗ $e^a + e^b = e^{a+b}$. Avec $a = b = 0$, le membre de gauche vaut 2 et celui de droite vaut 1.

✓ $e^a \times e^b = e^{a+b}$: seul le **produit** se regroupe. De même, $\left(e^a\right)^3 = e^{3a}$, et non e^{a+3}.

Trouve l'erreur : Où est l'erreur ?

Un élève écrit, pour tout réel x :

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+1-x-1} = e^x.$$

Où est l'erreur ?

A. Dans la règle : un quotient ne se change pas en différence d'exposants.

Faux.

La règle $\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$ est juste : le problème est ailleurs.

B. Dans le calcul de $A - B$: il fallait $-(x-1) = -x + 1$.

Juste.

Juste : le signe moins porte sur toute la parenthèse.

C. Dans la conclusion : un quotient d'exponentielles n'en est jamais une.

Faux.

Il l'est toujours : $\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$.

D. Nulle part : le calcul est juste.

Faux.

Teste $x = 0$: le membre de gauche vaut $\frac{e^1}{e^{-1}} = e^2$, et non $e^0 = 1$.

Correction

La règle du quotient est bien employée, mais le signe moins porte sur toute la parenthèse. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}} &= e^{2x+1-(x-1)} \\ &= e^{2x+1-x+1} \\ &= e^{x+2}.\end{aligned}$$

En $x = 0$, on retrouve bien e^2.

À toi : Rédige une égalité

Montre que, pour tout réel x, $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Indice 1

Pars du membre de droite : il contient e^{-x}, l'inverse de e^x.

Indice 2

Multiplie son numérateur et son dénominateur par e^x, qui n'est pas nul.

Indice 3

Point délicat : $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$ et $e^x \times e^x = e^{2x}$. Justifie aussi que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Réponse

Soit x un réel. Les dénominateurs $e^{2x}+1$ et $e^x + e^{-x}$ sont strictement positifs, comme sommes de réels strictement positifs.

On multiplie le numérateur et le dénominateur du membre de droite par $e^x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x e^x - e^x e^{-x}}{e^x e^x + e^x e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Équations, inéquations et systèmes

Une exponentielle est positive

Devine : Une équation suspecte

Combien de solutions réelles l'équation $e^x = -3$ a-t-elle ?

A. Une : $x = \ln(-3)$.

Faux.

$\ln(-3)$ n'existe pas : le logarithme n'est défini que pour un réel strictement positif.

B. Une : $x = -\ln 3$.

Faux.

$e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{3}$, et non -3.

C. Une infinité.

Faux.

$\exp$ est strictement croissante : elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

D. Aucune.

Juste.

Juste : $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x \neq -3$.

Correction

> Pour tout réel x, $e^x > 0$, alors que $-3 < 0$. Donc, pour tout réel x, $e^x \neq -3$: l'équation n'a aucune solution.
>
> Plus généralement, l'équation $e^x = k$ n'a aucune solution lorsque $k \leq 0$.

Pour résoudre une équation ou une inéquation avec $\exp$, on compare les exposants.

Pourquoi est-ce vrai ? La fonction $\exp$ est strictement croissante : elle conserve l'ordre et ne prend jamais deux fois la même valeur. Et tout réel $k > 0$ s'écrit $e^{\ln k}$.

Comparer deux exponentielles

Propriété : Équations et inéquations exponentielles

Soit A, B et k trois réels. Pour tout réel x :

- $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$, et $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$.
- Si $k > 0$: $e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$; $e^x < k \Leftrightarrow x < \ln k$; $e^x > k \Leftrightarrow x > \ln k$.
- Si $k \leq 0$: l'équation $e^x = k$ n'a aucune solution réelle, et $e^x > k$ pour tout réel x.

Démonstration

Étape 1. La première ligne est F02, écrite avec la notation F04.

Étape 2. Soit $k > 0$. Par F04, $k = e^{\ln k}$. La première ligne, avec $B = \ln k$, donne $e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$ et $e^x < k \Leftrightarrow x < \ln k$. En échangeant les rôles, $e^{\ln k} < e^x \Leftrightarrow \ln k < x$.

Étape 3. Soit $k \leq 0$. Pour tout réel x, $e^x > 0 \geq k$ (F02) : donc $e^x \neq k$ et $e^x > k$.

En clair. Deux exponentielles sont égales, ou rangées, exactement comme leurs exposants.

- Si $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a une seule solution, $\ln k$, et une inégalité entre e^x et k se transmet à x et $\ln k$ sans changer de sens.
- Si $k \leq 0$, l'équation n'a aucune solution, et $e^x > k$ pour tout réel x.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Pour $k > 0$, la preuve réécrit k sous la forme $e^{\ln k}$. L'équation devient une comparaison de deux exponentielles, donc de leurs exposants. Pour $k \leq 0$, aucun calcul : la positivité de e^x suffit.

> **Vérifie : À quoi sert k > 0 ?**
>
> Dans l'énoncé, à quoi sert l'hypothèse $k > 0$ pour écrire $e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$?

A. À rendre la fonction $\exp$ strictement croissante.

Faux.

$\exp$ est strictement croissante sans aucune hypothèse sur k.

B. À rien : l'équivalence vaut pour tout réel k.

Faux.

Avec $k = -3$, l'équation n'a pas de solution, et $\ln(-3)$ n'existe pas.

C. À garantir que la solution x est elle aussi positive.

Faux.

$x = \ln k$ est négatif si $0 < k < 1$: par exemple, $\ln \dfrac{1}{2} < 0$.

D. À donner un sens à $\ln k$, puis à $e^{\ln k}$.

Juste.

Juste : sans elle, $\ln k$ n'existe pas, et l'on ne peut pas écrire $k = e^{\ln k}$.

Correction

Le réel $\ln k$ n'existe que pour $k > 0$. Pour un tel k, on a $k = e^{\ln k}$, et l'équation $e^x = e^{\ln k}$ équivaut à $x = \ln k$, car $\exp$ est strictement croissante.

La solution peut être négative : $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

Exemple : Contre-exemple : k négatif ou nul

L'inéquation $e^x > -2$ est vraie pour **tout** réel x, car $e^x > 0 > -2$. Son ensemble de solutions est $\mathbb{R}$, et écrire « $x > \ln(-2)$ » n'aurait aucun sens.

De même, l'inéquation $e^x \leq 0$ n'a aucune solution. Sans l'hypothèse $k > 0$, la réécriture $k = e^{\ln k}$ est impossible.

Rédiger une résolution

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation exponentielle

1. **Domaine** : écris l'ensemble des réels pour lesquels chaque membre a un sens.
2. **Forme** : transforme l'écriture jusqu'à comparer deux exponentielles, ou une exponentielle et un réel k. Si e^{2x} et e^x apparaissent ensemble, pose $X = e^x$, en notant que $X > 0$.
3. **Équivalences** : justifie chaque passage par la stricte croissance de $\exp$. Rejette toute valeur de X négative ou nulle.
4. **Conclusion** : écris l'ensemble des solutions sous la forme « $S = \ldots$ ».

Exemple : Exemple guidé : un changement d'inconnue

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$.

Forme. Pour tout réel x, $e^{2x} = (e^x)^2$. On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$.

Second degré. $\Delta = 49 - 24 = 25$, donc $X = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{7+5}{4} = 3$. Les deux valeurs sont strictement positives.

Retour à l'inconnue. $e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$, et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Conclusion. $S = \{-\ln 2, \ln 3\}$.

Attention : une valeur de X négative se rejette

Résous $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$ avec $X = e^x$: $X^2 + 2X - 8 = 0$, donc $X = 2$ ou $X = -4$.

✗ « $x = \ln 2$ ou $x = \ln(-4)$ ».

✓ Comme $e^x > 0$, la valeur $X = -4$ est rejetée. Il reste $e^x = 2$, d'où $S = \{\ln 2\}$.

Deux inconnues

Méthode : résoudre un système avec des exponentielles

1. **Changer d'inconnues** : $X = e^x$ et $Y = e^y$. Ces nouvelles inconnues sont strictement positives.
2. **Résoudre** le système obtenu en X et Y, par substitution ou par combinaison.
3. **Trier** : ne garde que les couples dont les deux valeurs sont strictement positives.
4. **Conclure** : chaque couple retenu donne $x = \ln X$ et $y = \ln Y$. Contrôle ensuite le résultat dans le système initial.

Exemple : Exemple guidé : un système

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 3e^x - e^y = 7 \end{cases}$$

Nouvelles inconnues. Avec $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$: $X + 2Y = 7$ et $3X - Y = 7$.

Résolution. La seconde équation donne $Y = 3X - 7$. Alors $X + 6X - 14 = 7$, soit $X = 3$, puis $Y = 2$. Les deux sont strictement positifs.

Contrôle. $3 + 2 \times 2 = 7$ et $3 \times 3 - 2 = 7$.

Conclusion. $x = \ln 3$ et $y = \ln 2$: le système a pour unique solution le couple $(\ln 3, \ln 2)$.

À toi : Rédige une inéquation

Rédige la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $e^{2x} - 3e^x - 4 \geq 0$.

Indice 1
Pose $X = e^x$, sans oublier la condition sur X.
Indice 2
Factorise $X^2 - 3X - 4$: ses racines sont -1 et 4.
Indice 3
Point délicat : comme $X > 0$, le facteur $X + 1$ est strictement positif. Il ne reste qu'un facteur à étudier.

Réponse
« Posons $X = e^x$, avec $X > 0$. L'inéquation devient $X^2 - 3X - 4 \geq 0$, soit $(X + 1)(X - 4) \geq 0$.

Comme $X > 0$, on a $X + 1 > 0$: l'inéquation équivaut à $X - 4 \geq 0$, soit $e^x \geq 4$.

Comme $\exp$ est strictement croissante, cela équivaut à $x \geq \ln 4$. Donc $S = [\ln 4, +\infty[$, avec $\ln 4 = 2 \ln 2$. »

Limites et croissances comparées

Une course entre deux fonctions

Devine : Qui l'emporte ?

D'après toi, que devient le quotient $\dfrac{e^x}{x^3}$ quand x tend vers $+\infty$?

A. Il tend vers 0.

Faux.
Le cube grandit vite, mais l'exponentielle grandit plus vite encore : à la calculatrice, pour $x = 20$, le quotient dépasse déjà $60\,000$.

B. Il tend vers 1.

Faux.
Les deux termes ne restent pas proches : à la calculatrice, pour $x = 20$, le quotient dépasse $60\,000$.

C. Il tend vers $+\infty$.

Juste.
Juste : l'exponentielle finit par distancer toute puissance de la variable.

D. Il n'a pas de limite.

Faux.
Le quotient finit par croître sans retour : il a une limite infinie.

Correction

> À la calculatrice, pour $x = 20$, e^{20} dépasse 485 millions, alors que $20^3 = 8\,000$: le quotient dépasse $60\,000$.
>
> Le quotient tend vers $+\infty$: c'est une croissance comparée, démontrée dans cette section.

Compare quelques valeurs, lues à la calculatrice. Pour $x = 5$, e^5 dépasse 148, et $5^3 = 125$. Pour $x = 10$, e^{10} dépasse $22\,000$, contre $10^3 = 1\,000$. L'exponentielle part lentement, puis distance le cube.

Pourquoi est-ce vrai ? D'abord, e^x dépasse n'importe quel réel $A > 0$ dès que $x > \ln A$.

Limites et croissances comparées

Propriété : Limites de la fonction exponentielle aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $A > 0$. Posons $B = \ln A$. Pour tout réel $x > B$, F05 donne $e^x > A$. Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe un réel B tel que, pour tout $x > B$, $e^x \in]A, +\infty[$: c'est la définition de $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (limites, programme de 1BAC SM).

Étape 2. Pour tout réel x, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ (F04). Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc e^{-x} tend vers $+\infty$ (étape 1 et limite d'une composée).

Étape 3. L'inverse d'une fonction qui tend vers $+\infty$ tend vers 0 (opérations sur les limites) : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Reste le quotient $\dfrac{e^x}{x^n}$, qui donne une forme indéterminée.

Pourquoi est-ce vrai qu'il tend vers $+\infty$? Le changement de variable $y = e^x$ ramène $\dfrac{x}{e^x}$ à $\dfrac{\ln y}{y}$. Or $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$ (chapitre des logarithmes).

Propriété : Croissances comparées de l'exponentielle et des puissances entières

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

En particulier, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

Démonstration

Étape 1 (cas $n = 1$ en $+\infty$). Pour $x > 0$, posons $y = e^x$; alors $x = \ln y$ et $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\ln y}{y}$. Quand x tend vers $+\infty$, y tend vers $+\infty$ (F06) et $\dfrac{\ln y}{y}$ tend vers 0 (croissances comparées du logarithme). Comme $\dfrac{x}{e^x} > 0$ pour $x > 0$, son inverse $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$.

Étape 2 (cas $n \geq 1$). Pour $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n$ (F04). Quand x tend vers $+\infty$, $t = \dfrac{x}{n}$ aussi ; par l'étape 1, $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$, donc sa puissance n-ième aussi, et son produit par la constante $\dfrac{1}{n^n} > 0$ encore (opérations sur les limites).

Étape 3 (en $-\infty$). Posons $t = -x$, qui tend vers $+\infty$. Alors $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{t^n}{e^t}$, et $\dfrac{t^n}{e^t}$, inverse de $\dfrac{e^t}{t^n}$, tend vers 0 par l'étape 2.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une limite nouvelle, on change de variable afin de retrouver une limite connue. Ici, $y = e^x$ ramène l'exponentielle au logarithme. Puis $t = \dfrac{x}{n}$ ramène l'exposant n au cas $n = 1$, et $t = -x$ ramène $-\infty$ à $+\infty$.

Vérifie : Le signe en moins l'infini

À l'étape 3 de la preuve, on pose $t = -x$. Comment s'écrit alors $x^n e^x$?

A. $(-1)^n \dfrac{t^n}{e^t}$

Juste.

Juste : $x^n = (-1)^n t^n$ et $e^x = \dfrac{1}{e^t}$.

B. $\dfrac{t^n}{e^t}$

Faux.

Le signe de $x^n = (-t)^n$ dépend de la parité de n : il manque $(-1)^n$.

C. $(-1)^n t^n e^t$

Faux.

$e^x = e^{-t} = \dfrac{1}{e^t}$: l'exponentielle passe au dénominateur.

D. $-\dfrac{t^n}{e^t}$

Faux.

Ce signe ne vaut que pour n impair : avec $n = 2$, $x^2 e^x > 0$.

Correction

Avec $x = -t$: $x^n = (-t)^n = (-1)^n t^n$ et $e^x = e^{-t} = \dfrac{1}{e^t}$. Donc

$$x^n e^x = (-1)^n \frac{t^n}{e^t}.$$

> Quand x tend vers $-\infty$, t tend vers $+\infty$, et $\dfrac{t^n}{e^t}$ tend vers 0. Le facteur $(-1)^n$ vaut 1 ou -1 : il ne change pas la limite 0.

La bonne borne

Exemple : Contre-exemple : la borne compte

Chaque croissance comparée porte sur **une** borne.

En $-\infty$, le quotient $\dfrac{e^x}{x^3}$ n'a rien d'indéterminé : e^x tend vers 0 et x^3 vers $-\infty$. Il tend donc vers 0, et non vers $+\infty$.

De même, en $+\infty$, x^2e^x tend vers $+\infty$, et non vers 0. Avant de citer un résultat, vérifie la borne.

Méthode : lever une forme indéterminée avec l'exponentielle

1. **Repérer** la forme indéterminée : « $+\infty - (+\infty)$ », « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » ou « $0 \times (+\infty)$ ».
2. **Factoriser** par le terme qui l'emporte, en général e^x en $+\infty$.
3. **Citer** la croissance comparée employée, avec sa borne.
4. **Conclure** par les opérations sur les limites, une ligne par facteur.

Exemple : Exemple guidé : factoriser par l'exponentielle

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 4x^2 + 1\right)$.

Forme. e^x tend vers $+\infty$ et $-4x^2$ vers $-\infty$: c'est une forme indéterminée.

Factorisation. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} & e^x - 4x^2 + 1 \\ &= e^x\left(1 - 4\,\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right). \end{aligned}$$

Limites. Par croissance comparée, $\dfrac{x^2}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$, et $\dfrac{1}{e^x}$ aussi. La parenthèse tend vers 1.

Conclusion. Par produit, $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 4x^2 + 1\right) = +\infty$.

Citer, pas deviner

Exemple : un polynôme et l'exponentielle en moins l'infini

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + 2x\right)e^x$.

Développement. Pour tout réel x, $\left(x^3+2x\right)e^x = x^3e^x + 2\,xe^x$.

Conclusion. Par croissance comparée en $-\infty$, avec $n=3$ puis $n=1$, chaque terme tend vers 0. Par somme, la limite vaut 0.

Attention : « l'exponentielle l'emporte » n'est pas une preuve

✗ « $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 2x^4\right) = +\infty$ car l'exponentielle l'emporte. »

✓ « Pour $x>0$, $e^x - 2x^4 = e^x\left(1 - 2\,\dfrac{x^4}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, $\dfrac{x^4}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$. La parenthèse tend vers 1, donc la limite vaut $+\infty$. » La factorisation fait apparaître le quotient que l'on cite.

À toi : Rédige un calcul de limite

Rédige le calcul de $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2+1}$.

Indice 1

C'est une forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$: factorise le numérateur par e^x et le dénominateur par x^2.

Indice 2

Tu obtiens $\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}$.

Indice 3

Point délicat : cite la croissance comparée deux fois, pour $\dfrac{e^x}{x^2}$ et pour $\dfrac{x}{e^x}$.

Réponse

« Pour $x>0$:

$$\frac{e^x+x}{x^2+1} = \frac{e^x}{x^2}\times\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Par croissance comparée, $\dfrac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Le second facteur tend donc vers 1.

Par produit, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2+1} = +\infty$. »

Dérivées et primitives avec l'exponentielle

La pente de la courbe de exp

Devine : Une pente en miroir

La tangente à la courbe de $\ln$ au point $(1,0)$ a pour pente $\ln'(1)=1$. D'après toi, quelle est la pente de la tangente à la courbe de $\exp$ au point $(0,1)$?

A. 1

Juste.

Juste : la symétrie d'axe $y = x$ change une pente m non nulle en $\dfrac{1}{m}$, et $\dfrac{1}{1} = 1$.

B. -1

Faux.

Cette symétrie ne change pas le signe d'une pente : $\exp$ est croissante.

C. 0

Faux.

Une tangente horizontale chez $\exp$ viendrait d'une tangente verticale chez $\ln$: ce n'est pas le cas en $(1, 0)$.

D. e

Faux.

e est la valeur $\exp(1)$, pas une pente en 0.

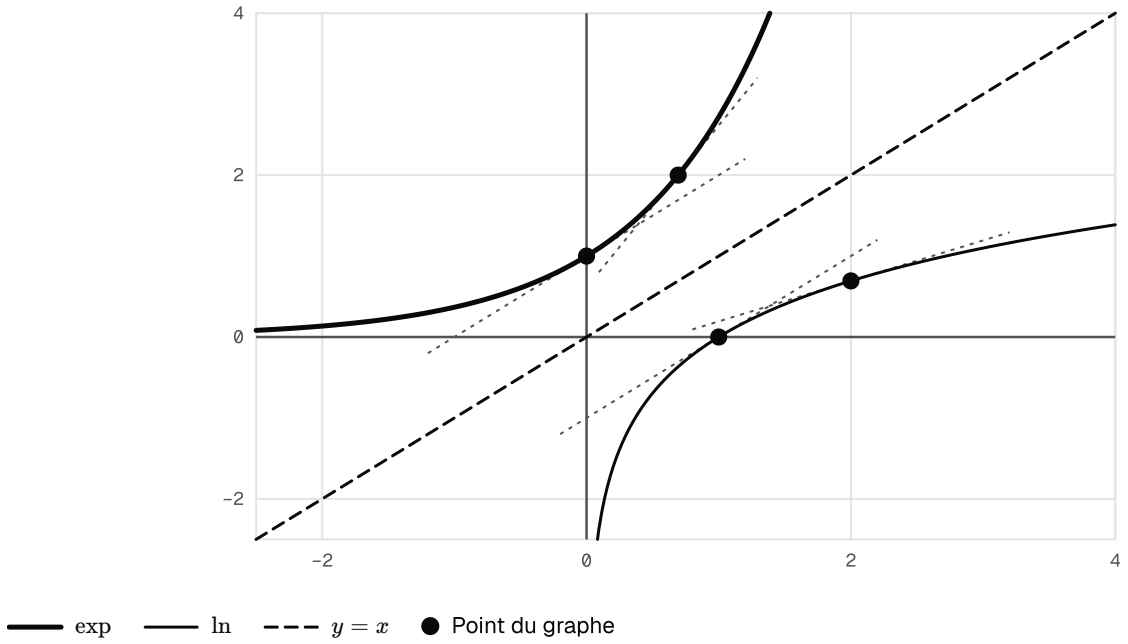
Correction

La tangente à la courbe de $\ln$ en $(1, 0)$ est la droite d'équation $y = x - 1$. Son reflet par la symétrie d'axe $y = x$ est la droite $x = y - 1$, soit $y = x + 1$.

C'est la tangente à la courbe de $\exp$ en $(0, 1)$: sa pente vaut 1, l'inverse de la pente 1.

En un point quelconque, le même miroir agit. Au point $(y, \ln y)$, la courbe de $\ln$ a pour pente $\dfrac{1}{y}$. Au point symétrique (x, e^x), avec $y = e^x$, la pente de $\exp$ vaudrait donc $y = e^x$.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve remplace la figure par le théorème rappelé ci-dessous.



Les courbes de exp et de ln, symétriques par rapport à la droite y = x. Les tangentes en (0, 1) et en (1, 0) ont la même pente 1 ; avec y = 2, la tangente à ln en (2, ln 2) a pour pente 1/2, et celle à exp au point symétrique (ln 2, 2) a pour pente 2.

Petit rappel. Soit f continue, strictement monotone et dérivable sur un intervalle I, et y un réel de $f(I)$. Si $f'\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Tu sais aussi que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Deux dérivées

Théorème : Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\exp'(x) = e^x$.

En particulier, $\exp'(0) = 1$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\ln$ est continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et $\ln'(y) = \dfrac{1}{y} \neq 0$ pour tout $y > 0$ (chapitre des logarithmes).

Étape 2. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque (chapitre de la dérivation), $\exp$ est dérivable en tout réel x, et $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)} = \dfrac{1}{1/e^x} = e^x$.

Étape 3. En $x = 0$, le nombre dérivé vaut $e^0 = 1$ (F02). Par définition du nombre dérivé, $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Pour $x \mapsto e^{u(x)}$, la fonction $\exp$ est composée avec u.

Pourquoi est-ce vrai que sa dérivée vaut $u'\, e^u$? C'est la dérivée d'une composée, avec $\exp' = \exp$. Lue à l'envers, cette dérivée donne une primitive.

Propriété : Dérivée de e^u et primitives de u'e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $\left(e^u\right)'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$.
- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sur I ; les primitives de cette fonction sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- En particulier, pour des réels a et b avec $a \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{1}{a} e^{ax+b}$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. u est dérivable sur I, et $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, qui contient $u(x)$ pour tout $x \in I$. D'après la dérivée d'une composée (chapitre de la dérivation) et F08 : $\left(\exp \circ u\right)'(x) = \exp'\left(u(x)\right) \times u'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$.

Étape 2. Par définition d'une primitive (chapitre des primitives), e^u est donc une primitive de $u'\, e^u$ sur I. Comme I est un intervalle, les primitives de $u'\, e^u$ sur I sont exactement les fonctions $e^u + k$, $k \in \mathbb{R}$ (ensemble des primitives, chapitre des primitives).

Étape 3. Avec $u(x) = ax + b$ et $u'(x) = a$: $x \mapsto e^{ax+b}$ est une primitive de $x \mapsto a\, e^{ax+b}$ sur $\mathbb{R}$. Par linéarité, avec le facteur $\dfrac{1}{a}$, $x \mapsto \dfrac{1}{a} e^{ax+b}$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Aucune limite nouvelle n'est calculée. La première preuve applique le théorème de la dérivée d'une réciproque, la seconde celui d'une composée. La limite de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0 en découle : c'est le nombre dérivé de $\exp$ en 0.

Vérifie : Une condition du rappel

La preuve applique le théorème de la dérivée d'une réciproque. Pourquoi vérifie-t-elle que $\ln'(y) \neq 0$ pour tout $y > 0$?

A. Pour que la fonction $\ln$ soit strictement croissante.

Faux.
La croissance de $\ln$ est une autre hypothèse du théorème, déjà acquise.

B. Parce que la formule divise par $\ln'\big(\exp(x)\big)$.

Juste.
Juste : sans cette condition, le quotient n'existe pas.

C. Pour que $\exp(x)$ soit strictement positif.

Faux.
$\exp(x) > 0$ vient de la définition, pas de la dérivée de $\ln$.

D. Elle ne sert à rien : $\ln'$ est positive.

Faux.
Elle est positive ici, mais c'est justement ce qu'il faut vérifier : le théorème l'exige.

Correction
Le théorème donne $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)}$. Ce quotient n'a de sens que si $\ln'\big(\exp(x)\big) \neq 0$. Or $\ln'(y) = \dfrac{1}{y} \neq 0$ pour tout $y > 0$.

Là où une fonction a une tangente horizontale, sa réciproque a une tangente verticale : elle n'y est pas dérivable.

Une hypothèse sur u

Exemple : u doit être dérivable

Soit g la fonction définie sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $g(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$.

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, mais pas en $-\dfrac{1}{2}$. On applique donc la formule sur cet intervalle ouvert seulement. Pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, e^{\sqrt{2x+1}}.$$

En $-\dfrac{1}{2}$, la formule ne dit rien : l'hypothèse « u dérivable sur I » fixe l'intervalle.

Exemple : dériver et lire le signe

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2-4x}$. Avec $u : x \mapsto x^2 - 4x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $u'(x) = 2x - 4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x-4)\, e^{x^2-4x} \\ &= 2(x-2)\, e^{x^2-4x}. \end{aligned}$$

Comme $e^{x^2-4x} > 0$, $h'(x)$ a le signe de $x - 2$.

Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Son minimum vaut $h(2) = e^{-4}$.

Lire une dérivée à l'envers

Méthode : reconnaître la dérivée d'une exponentielle composée

1. **Repérer** l'exposant : c'est la fonction u, dérivable sur l'intervalle I. Calcule $u'(x)$.
2. **Comparer** la fonction donnée à $u'(x)\,e^{u(x)}$: elle s'écrit $\lambda\,u'(x)\,e^{u(x)}$, avec λ réel constant.
3. **Conclure** : $x \mapsto \lambda\,e^{u(x)}$ est une primitive sur l'intervalle I.
4. **Vérifier** en dérivant, puis rédiger : « F est dérivable sur I et $F' = f$, donc F est une primitive de f sur I. »

Exemple : Exemple guidé : un facteur à ajuster

Énoncé. Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 e^{2x^3}$.

Repérer. Avec $u : x \mapsto 2x^3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $u'(x) = 6x^2$. Il manque un facteur 6 : pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{6}\,u'(x)\,e^{u(x)}$.

Conclure. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \dfrac{1}{6}\,e^{2x^3}$.

Vérifier. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{1}{6} \times 6x^2\,e^{2x^3} = f(x)$.

Attention : le facteur u′ ne disparaît pas

✗ $\left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1}$.

✓ $\left(e^{x^2+1}\right)' = 2x\,e^{x^2+1}$: la dérivée de l'exposant vient en facteur. Dans l'autre sens, une primitive de $x \mapsto e^{4x-1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4}\,e^{4x-1}$. Ce n'est pas $x \mapsto e^{4x-1}$, dont la dérivée vaut $4\,e^{4x-1}$.

À toi : Rédige une primitive qui prend une valeur

Rédige la recherche de la primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (1-x)\,e^{x^2-2x}$ telle que $F(0) = 0$.

Indice 1

Repère la fonction $u : x \mapsto x^2 - 2x$ et calcule $u'(x)$.

Indice 2

Écris $f(x) = \lambda\,u'(x)\,e^{u(x)}$: ici $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Les primitives sont les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\,e^{x^2-2x} + k$.

Indice 3

Point délicat : $e^0 = 1$. Traduis $F(0) = 0$ en une équation d'inconnue k.

Réponse

« **Forme.** La fonction $u : x \mapsto x^2 - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2x - 2 = -2(1 - x)$. Donc, pour tout réel x, $f(x) = -\dfrac{1}{2}\, u'(x)\, e^{u(x)}$.

Primitives. Les primitives de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\, e^{x^2-2x} + k$, où k est un réel.

Condition. $F(0) = 0$ donne $-\dfrac{1}{2}\, e^0 + k = 0$, soit $k = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{x^2-2x}\right)$. »

Étudier une fonction avec l'exponentielle

La courbe et sa tangente

Devine : Au-dessus ou au-dessous ?

La droite T d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe de $\exp$ au point $(0, 1)$. D'après toi, comment la courbe se place-t-elle par rapport à T ?

A. Au-dessous de T sur $\mathbb{R}$, sauf au point de contact.

Faux.

En $x = -2$: $e^{-2} > 0 > -1 = -2 + 1$. La courbe passe au-dessus de T.

B. Au-dessus de T sur $]0, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, 0[$.

Faux.

En $x = -1$: $e^{-1} > 0 = -1 + 1$. La courbe est encore au-dessus.

C. Au-dessus de T sur $\mathbb{R}$, et ne la touche qu'en $(0, 1)$.

Juste.

Juste : c'est ce que démontre l'énoncé suivant.

D. Elle coupe la droite T en deux points distincts.

Faux.

L'étude qui suit montre que $e^x - (x + 1)$ ne s'annule qu'une fois.

Correction

Pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$, avec égalité seulement en $x = 0$. La courbe de $\exp$ est donc au-dessus de sa tangente T, et ne la touche qu'au point $(0, 1)$.

Par exemple, en $x = -1$: $e^{-1} > 0 = -1 + 1$.

Comparer une courbe et une droite, c'est étudier le signe d'une différence.

Pourquoi est-ce vrai que $e^x - (x+1)$ ne devient jamais négatif ? On étudie cette différence comme une fonction : sa dérivée, ses variations, son minimum.

Étude de la fonction exponentielle

Propriété : Étude et courbe de la fonction exponentielle

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $\exp$ dans un repère orthonormé.

- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\exp'' = \exp > 0$: $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente T : $y = x + 1$ au point d'abscisse 0.
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$; en $+\infty$, $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Démonstration

Étape 1. Par F08, $\exp' = \exp$, elle-même dérivable, donc $\exp'' = \exp$, strictement positive (F02). Le signe de la dérivée seconde (chapitre de la dérivation) donne la convexité.

Étape 2. Soit $g(x) = e^x - 1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. g est dérivable et $g'(x) = e^x - 1$. Par F05, $g'(x) < 0$ si $x < 0$, $g'(x) > 0$ si $x > 0$, et g' ne s'annule qu'en 0. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations (chapitre de la dérivation), g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$: pour tout $x \neq 0$, $g(x) > g(0) = 0$. La tangente en 0 a pour équation $y = e^0(x - 0) + e^0$, soit $y = x + 1$.

Étape 3. F06 donne l'asymptote $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ (F06) et $\dfrac{e^x}{x}$ aussi (F07) : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux expressions, on étudie leur différence, appelée **fonction auxiliaire**. Son minimum donne l'inégalité ; le point où il est atteint donne le cas d'égalité. Ce geste resservira dans tout le chapitre.

Vérifie : L'argument du minimum

Dans la preuve, la fonction auxiliaire est $g : x \mapsto e^x - 1 - x$. Pourquoi a-t-on $g(x) > 0$ pour tout réel $x \neq 0$?

A. Parce que g est croissante sur tout $\mathbb{R}$.
Faux.
g décroît sur $]-\infty, 0]$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ pour $x < 0$.

B. Parce que g admet en 0 un minimum strict, nul.

Juste.

Juste : g décroît strictement avant 0 et croît strictement après.

C. Parce que $e^x > 0$ pour tout réel x.

Faux.

Cela ne suffit pas : l'expression contient aussi $-1 - x$.

D. Parce que $g'(0) = 0$, ce qui donne un minimum.

Faux.

Une dérivée nulle en un point ne garantit pas un minimum en ce point.

Correction

Pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 1$. Elle est strictement négative pour $x < 0$ et strictement positive pour $x > 0$.

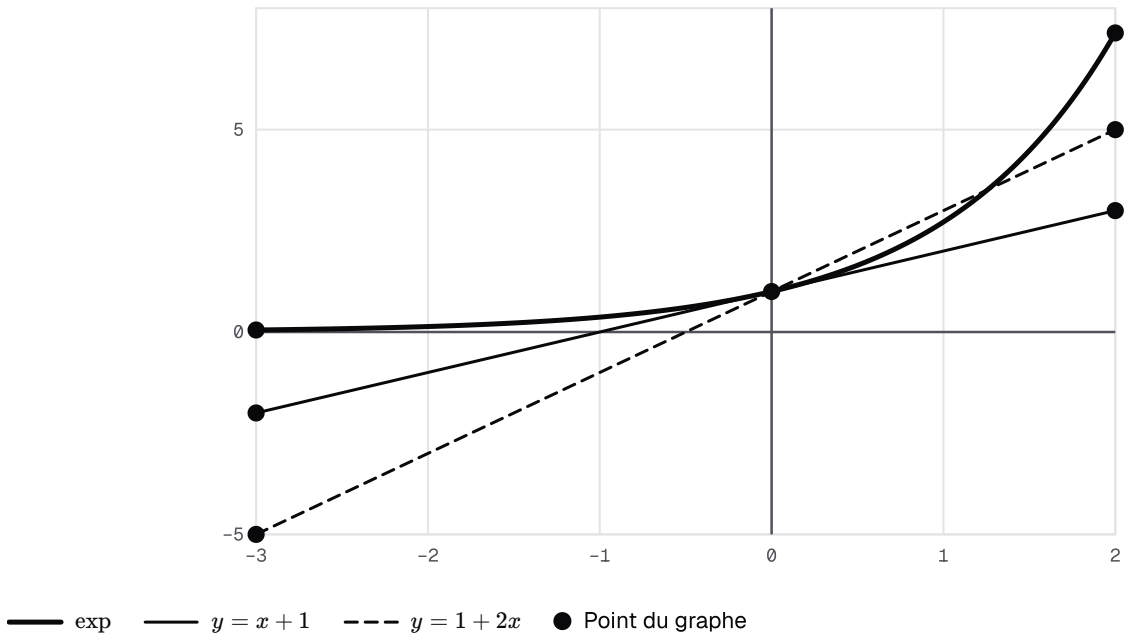
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a donc $g(x) > g(0) = 0$.

Exemple : Contre-exemple : seule la tangente convient

L'inégalité $e^x \geq 1 + x$ ne se renforce pas en changeant la pente de la droite. Testons $e^x \geq 1 + 2x$ en $x = \dfrac{1}{2}$, où $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

L'inégalité démontrée, appliquée au réel $-\dfrac{1}{2} \neq 0$, donne $e^{-\frac{1}{2}} > \dfrac{1}{2}$. Donc $\sqrt{e} = \dfrac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} < 2$, c'est-à-dire $\sqrt{e} < 2 = 1 + 2 \times \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, l'inégalité « $e^x \geq 1 + 2x$ pour tout réel x » est fausse. La droite d'équation $y = 1 + 2x$ passe bien par $(0, 1)$, mais elle n'est pas tangente : elle coupe la courbe.



La courbe de exp, sa tangente y = x + 1 au point (0, 1), et la droite y = 1 + 2x. La tangente reste sous la courbe ; l'autre droite la coupe en (0, 1) et en un second point d'abscisse comprise entre 1 et 2.

Prouver une inégalité

Méthode : prouver une inégalité par étude de fonction

1. **Ramener** l'inégalité à la forme $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle I donné, où g est la différence des deux membres.
2. **Dériver** g et étudier le signe de $g'(x)$, en factorisant par $e^{u(x)} > 0$ si possible.
3. **Lire** le minimum de g sur I dans le tableau de variations.
4. **Conclure** par une phrase complète : « pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$, donc… », sans oublier le cas d'égalité.

Exemple : Exemple guidé : une inégalité sur une demi-droite

Énoncé. Montre que, pour tout $x \geq 0$, $e^{2x} \geq 1 + 2x + 2x^2$.

Fonction auxiliaire. Soit $g : x \mapsto e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2$, dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2 - 4x \\ &= 2\left(e^{2x} - (1 + 2x)\right). \end{aligned}$$

Signe. L'inégalité $e^t \geq 1 + t$, vraie pour tout réel t, appliquée à $t = 2x$, donne $g'(x) \geq 0$.

Conclusion. g est croissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire $e^{2x} \geq 1 + 2x + 2x^2$.

À toi : Rédige une inégalité

Rédige la preuve de : pour tout réel x, $e^x \geq e\,x$. Interprète ensuite le cas d'égalité.

Indice 1
Pose une fonction auxiliaire égale à la différence des deux membres, puis dérive-la.
Indice 2
Sa dérivée $x \mapsto e^x - e$ s'annule en 1 : étudie son signe de part et d'autre.
Indice 3
Point délicat : le minimum vaut $e^1 - e \times 1 = 0$. Conclus, puis relie ce résultat à une tangente.

Réponse
« Soit $g : x \mapsto e^x - e\,x$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $g'(x) = e^x - e = e^x - e^1$.

Par stricte croissance de $\exp$, $g'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 1$. Donc g admet en 1 un minimum, égal à $g(1) = e - e = 0$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) \geq 0$, soit $e^x \geq e\,x$, avec égalité seulement en $x = 1$. »

Interprétation. La droite d'équation $y = e\,x$ est la tangente à la courbe de $\exp$ au point $(1, e)$: la courbe reste au-dessus.

Une étude complète

Méthode **: étudier une fonction comportant l'exponentielle**

1. **Limites** : calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition, en citant les croissances comparées.
2. **Dérivée** : dérive avec $(e^u)' = u'\,e^u$, puis factorise par $e^{u(x)}$, qui est strictement positif.
3. **Variations** : le signe de $f'(x)$ est celui de l'autre facteur. Dresse le tableau.
4. **Courbe** : asymptotes, branches infinies, tangentes utiles, puis le tracé.

Exemple **: Exemple guidé : une étude complète**

Énoncé. Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)\,e^x$.

Limites. En $+\infty$, $x^2 - 3$ et e^x tendent vers $+\infty$, donc $f(x)$ aussi, par produit.

En $-\infty$, pour tout réel x, $f(x) = x^2 e^x - 3e^x$. Par croissance comparée, $x^2 e^x$ tend vers 0, et e^x aussi. Donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

Dérivée. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,e^{x} + (x^{2}-3)\,e^{x} \\ &= (x^{2}+2x-3)\,e^{x} \\ &= (x+3)(x-1)\,e^{x}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x+3)(x-1)$: strictement positif hors de $[-3,1]$, strictement négatif sur $]-3,1[$.

Variations de f sur $\mathbb{R}$: maximum local $6e^{-3}$ en −3, minimum $-2e$ en 1, limite 0 en $-\infty$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$6e^{-3}$	↘	$-2e$	↗	$+\infty$

Vérifie : Lire le tableau

Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $\mathbb{R}$, pour la fonction f de l'exemple ?

A. Aucune.

Faux.

$f(1) = -2e < 0$, et f prend aussi des valeurs positives : son signe change.

B. Une seule.

Faux.

Le tableau en montre une sur $]-3,1[$ et une autre sur $]1,+\infty[$.

C. Deux.

Juste.

Juste : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2} = 3$, car $e^{x} \neq 0$.

D. Trois.

Faux.

Sur $]-\infty,-3]$, f croît de la limite 0 jusqu'à $6e^{-3}$: elle y reste strictement positive.

Correction

Comme $e^{x} > 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x^{2} - 3 = 0$, soit $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

Le tableau le confirme : $-\sqrt{3}$ est dans $]-3,1[$, où f passe de $6e^{-3} > 0$ à $-2e < 0$, et $\sqrt{3}$ est dans $]1,+\infty[$.

La chaîne d'un sujet

Exemple : Exemple guidé : fonction auxiliaire et valeur en α

Énoncé. Soit g et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + 3x - 4$ et $f(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2 - 4x$, de sorte que $f' = g$.

Existence de α. « Pour tout réel x, $g'(x) = e^x + 3 > 0$: g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $g(0) = -3 < 0$ et $g(1) = e - 1 > 0$, car $e > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $0 < \alpha < 1$. »

Encadrement. « $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{5}{2} < 0$, car $\sqrt{e} < 2$. Donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. »

Valeur en α. « Comme $g(\alpha) = 0$, $e^\alpha = 4 - 3\alpha$. Donc $f(\alpha) = 4 - 3\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 - 4\alpha$, soit $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^2 - 7\alpha + 4$. »

Remarque : Coin examen : enchaîner les questions

L'exponentielle intervient dans 10 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), dans une fonction, une intégrale ou une suite étudiée.

Les questions s'enchaînent comme dans l'exemple : fonction auxiliaire, théorème des valeurs intermédiaires, signe de g, variations de f, puis $f(\alpha)$ grâce à $g(\alpha) = 0$.

Pour une branche infinie, voici la rédaction attendue :

« Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{3}{2}x - 4$. Ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$, par croissance comparée. Comme $f(x)$ tend aussi vers $+\infty$, la courbe présente en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. »

Chaque « En déduire » réutilise la réponse précédente : écris-la, puis cite-la.

L'exponentielle de base a

Une puissance pour tout exposant

Devine : Réécrire une puissance

Tu sais que $2^3 = 8$. Laquelle de ces écritures vaut aussi 8 ?

A. $e^{2\ln 3}$

Faux.
$e^{2\ln 3} = e^{\ln 9} = 9$: la base et l'exposant ont été échangés.

B. $3\,e^{\ln 2}$

Faux.
$3\,e^{\ln 2} = 3 \times 2 = 6$.

C. $e^{3\ln 2}$

Juste.

Juste : $3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$, et $e^{\ln 8} = 8$.

D. $\ln(2^3)$

Faux.

$\ln 8$ n'est pas égal à 8 : il manque l'exponentielle.

Correction

Par la règle des puissances du logarithme, $3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$. Donc $e^{3\ln 2} = e^{\ln 8} = 8 = 2^3$.

L'écriture $e^{x\ln 2}$ a un sens pour **tout** réel x : elle va servir de définition. Par exemple, on posera $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}$.

Définition : Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **fonction exponentielle de base** a. Pour $a = e$, on retrouve $x \mapsto e^x$, car $\ln e = 1$.

Les règles des puissances entières restent-elles vraies pour des exposants réels ? Et comment varie $x \mapsto a^x$?

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit chaque puissance avec l'exponentielle, puis on applique les règles de $\exp$, sa dérivée et ses limites.

Les règles de calcul

Propriété : Règles de calcul des puissances à exposant réel

Soit a et b deux réels strictement positifs, et x et y deux réels.

- $a^x > 0$ et $\ln\left(a^x\right) = x\ln a$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$, $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$.
- Si x est rationnel, le réel a^x de F11 est égal à la puissance rationnelle de a déjà connue.

Démonstration

Étape 1. $a^x = e^{x\ln a} > 0$ (F02), et $\ln\left(a^x\right) = \ln\left(e^{x\ln a}\right) = x\ln a$ (F04).

Étape 2. $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a}\,e^{y\ln a} = a^x a^y$ (F04). Avec $y = -x$: $a^x a^{-x} = a^0 = e^0 = 1$, d'où $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, puis le quotient.

Étape 3. Par l'étape 1 appliquée à la base $a^x > 0$: $\left(a^x\right)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$. Et $(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x\ln a + x\ln b} = a^x b^x$.

Étape 4. Soit r rationnel et p la puissance rationnelle a^r déjà connue. Alors $p > 0$ et $\ln p = r\ln a$ (chapitre des logarithmes), donc $p = e^{\ln p} = e^{r\ln a}$: c'est la valeur donnée par F11.

Exemple : écrire avec l'exponentielle

Pour tout réel x :

- $3^x = e^{x\ln 3}$;
- $10^x = e^{x\ln 10}$;
- $\left(\frac{1}{4}\right)^x = e^{x\ln\frac{1}{4}} = e^{-2x\ln 2}$, car $\ln\frac{1}{4} = -2\ln 2$.

La condition $a > 0$ est indispensable : $\ln(-2)$ n'existe pas, donc la formule ne définit pas $(-2)^x$ pour un réel x quelconque.

Variations et réciproque

Propriété : Dérivée, variations et limites de x ↦ a^x

Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\left(a^x\right)' = (\ln a)\, a^x$.

- Si $a > 1$: elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.
- Si $a = 1$: $a^x = 1$ pour tout réel x.

Démonstration

Étape 1. $a^x = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x\ln a$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = \ln a$. Par F09, $\left(a^x\right)' = (\ln a)\, e^{x\ln a} = (\ln a)\, a^x$.

Étape 2. Comme $a^x > 0$ (F12), la dérivée a le signe de $\ln a$: strictement positif sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$, strictement négatif si $0 < a < 1$ ($\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$). Le théorème liant le signe de la dérivée et les variations (chapitre de la dérivation) donne le sens de variation. Pour $a = 1$, $a^x = e^0 = 1$.

Étape 3. Si $a > 1$, $\ln a > 0$: $x\ln a$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$; par F06 et la limite d'une composée, a^x tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$. Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: les limites de $x\ln a$ s'échangent, donc celles de a^x aussi.

En clair. Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ croît si $a > 1$, décroît si $0 < a < 1$, et reste égale à 1 si $a = 1$: tout dépend du signe de $\ln a$.

Et si $a \neq 1$, peut-on revenir de $y = a^x$ à x ? **Pourquoi est-ce vrai** que $\log_a$ fait ce retour ? On passe par $\ln$, puis on divise par $\ln a$.

Propriété : Exponentielle de base a et logarithme de base a

Soit a un réel strictement positif, différent de 1. Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

La fonction $x \mapsto a^x$, de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, est la fonction réciproque de $\log_a$. En particulier, pour tout réel x et tout réel $y > 0$: $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y$.

Démonstration

Étape 1. Pour $y > 0$, $\log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, avec $\ln a \neq 0$ car $a \neq 1$ (chapitre des logarithmes).

Étape 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Par F11, $y = a^x \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$. Par F01, appliquée au réel $x \ln a$ et au réel $y > 0$, cela équivaut à $\ln y = x \ln a$, puis, en divisant par $\ln a \neq 0$, à $x = \dfrac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$.

Étape 3. Cette équivalence, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$, dit exactement que $x \mapsto a^x$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ car $a^x > 0$ (F12), est la réciproque de $\log_a$. Le cas $a = 10$ est celui du logarithme décimal.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les trois preuves suivent le même geste : écrire $a^x = e^{x \ln a}$, puis utiliser une propriété de $\exp$. Le sens de variation se lit sur le signe de $\ln a$. La réciproque vient de la définition de $\exp$ et de l'égalité $\log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve qui relie a^x et $\log_a$, l'étape 2 divise par $\ln a$. Quelle hypothèse le permet ?

A. $a > 0$

Faux.

Elle donne un sens à $\ln a$, mais $\ln a$ pourrait encore être nul.

B. $a \neq 1$

Juste.

Juste : $\ln a = 0$ seulement pour $a = 1$.

C. $y > 0$

Faux.

Elle donne un sens à $\ln y$, pas à la division par $\ln a$.

D. $x \neq 0$

Faux.

Le réel x peut être nul : $a^0 = 1$ et $\log_a 1 = 0$.

Correction

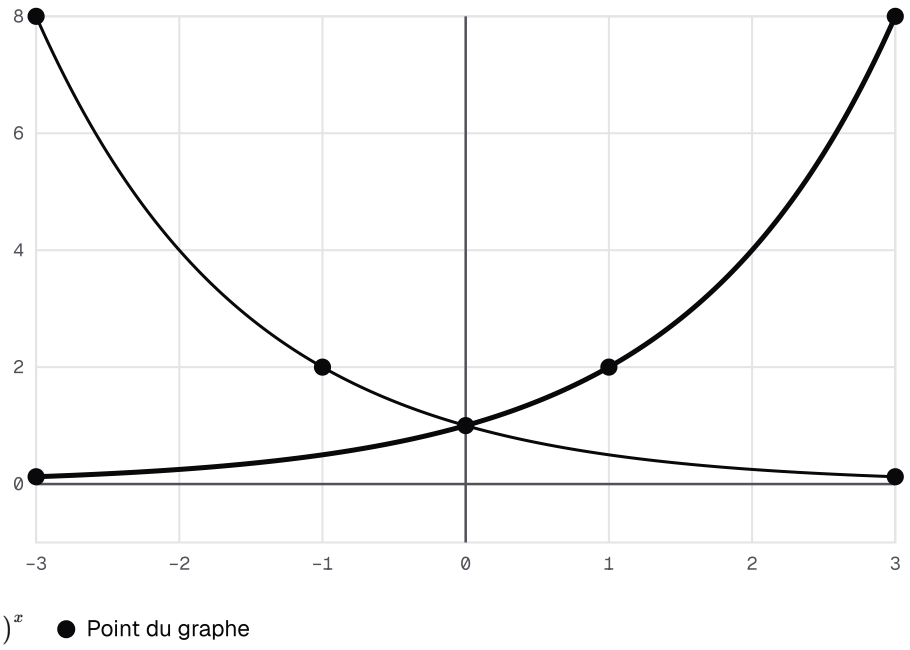
Pour $a > 0$, $\ln a$ existe, et $\ln a = 0$ si et seulement si $a = 1$. L'hypothèse $a \neq 1$ garantit donc $\ln a \neq 0$, ce qui permet de diviser. L'hypothèse $a > 0$ sert avant, pour écrire $a^x = e^{x \ln a}$.

La base 1 et la figure

Exemple : Contre-exemple : la base 1

Avec $a = 1$, pour tout réel x, $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$: la fonction est constante.

L'équation $1^x = 5$ n'a aucune solution, et $1^x = 1$ en a une infinité. La fonction $x \mapsto 1^x$ n'est donc pas une bijection, et « $\log_1$ » n'a aucun sens. C'est pourquoi la réciproque exige $a \neq 1$.



Les courbes de x ↦ 2^x, croissante, et de x ↦ (1/2)^x, décroissante. Elles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et passent toutes deux par le point (0, 1).

Calculer avec une base a

Méthode : revenir à l'exponentielle

1. **Condition** : vérifie que la base a est strictement positive.

2. **Réécrire** : $a^x = e^{x \ln a}$.
3. **Appliquer** l'outil voulu de l'exponentielle : équivalence, dérivée de e^u ou limite.
4. **Rédiger** la conclusion avec l'écriture de départ, par exemple : « donc $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$ ». La même méthode servira pour les puissances réelles.

Exemple : Exemple guidé : une équation en base 10

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^{2x-1} = 5$.

Réciproque. Comme $10 > 0$ et $10 \neq 1$, pour tout réel X : $10^X = 5 \Leftrightarrow X = \log_{10} 5$.

Résolution. Soit x un réel. Avec $X = 2x - 1$, l'équation équivaut à $2x - 1 = \log_{10} 5$, soit $x = \dfrac{1 + \log_{10} 5}{2}$.

Autre écriture. $\log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$, donc $x = 1 - \dfrac{\log_{10} 2}{2}$.

Conclusion. L'équation a une unique solution : $S = \left\{1 - \dfrac{\log_{10} 2}{2}\right\}$.

Attention : base fixe ou exposant fixe

✗ $(3^x)' = x\, 3^{x-1}$.

✓ $(3^x)' = (\ln 3)\, 3^x$: ici la **base** est fixe et l'exposant varie. La formule $n\, x^{n-1}$ vaut pour $x \mapsto x^n$, où l'**exposant** est fixe. En $x = 0$, la dérivée fausse vaudrait 0 ; la vraie vaut $\ln 3 \neq 0$.

À toi : Rédige une inéquation

Rédige la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 8$.

Indice 1

Écris les deux membres avec l'exponentielle : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = e^{-x \ln 2}$ et $8 = e^{3 \ln 2}$.

Indice 2

Compare les exposants grâce à la stricte croissance de $\exp$.

Indice 3

Point délicat : en divisant par $-\ln 2 < 0$, le sens de l'inégalité change.

Réponse

« Pour tout réel x, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = e^{-x \ln 2}$, et $8 = e^{3 \ln 2}$.

Comme $\exp$ est strictement croissante, l'inéquation équivaut à $-x \ln 2 > 3 \ln 2$. Comme $\ln 2 > 0$, cela équivaut à $-x > 3$, soit $x < -3$.

Donc $S =]-\infty, -3[$. »

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ est strictement décroissante : elle renverse l'ordre.

Les puissances réelles

La base devient variable

Petit rappel. Soit $x > 0$ et $r = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et q entier, $q \geq 2$. Tu connais $x^r = (\sqrt[q]{x})^p$; pour r entier, c'est la puissance habituelle. Par exemple, $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$.

Jusqu'ici, la base a était fixe et l'exposant variait. Maintenant, l'exposant est fixe et la base x varie.

Devine : Une puissance rationnelle réécrite

Pour $x > 0$, laquelle de ces expressions est égale à $x^{\frac{3}{2}}$?

A. $\dfrac{3}{2}\, e^{\ln x}$

Faux.
$\dfrac{3}{2}\, e^{\ln x} = \dfrac{3}{2}\, x$: le facteur est sorti de l'exposant.

B. $e^{x \ln \frac{3}{2}}$

Faux.
C'est $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$: la base et l'exposant sont échangés.

C. $\ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

Faux.
Il manque l'exponentielle : ce nombre vaut $\dfrac{3}{2}\ln x$.

D. $e^{\frac{3}{2}\ln x}$

Juste.
Juste : $\ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln x$.

Correction
Pour $x > 0$, $\ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln x$, donc $x^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}\ln x}$. Cette écriture garde un sens pour un exposant réel quelconque, pourvu que $x > 0$.

Définition : Fonction puissance d'exposant réel

Soit α un réel. Pour tout réel $x > 0$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (F11, avec la base x).

La fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $]0, +\infty[$, est appelée **fonction puissance d'exposant** α. D'après F12, appliquée à la base x : pour tous réels $x > 0$, $y > 0$, α et β,

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \ln x.$$

Exemple : calculer avec des exposants réels

Pour tout $x > 0$, $x^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln x}$. Les règles s'appliquent comme pour les entiers :

$$\frac{x^{\pi} \times x^{2-\pi}}{x} = \frac{x^{\pi+2-\pi}}{x} = \frac{x^2}{x} = x,$$
$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = x^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = x^2.$$

Chacune de ces égalités suppose $x > 0$.

Pour un entier n, tu sais que $(x^n)' = n\,x^{n-1}$. La même forme vaut-elle pour un exposant réel ?

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, puis on dérive une exponentielle de la forme e^{u}.

Dériver une puissance réelle

Propriété : Dérivée, variations et limites de x ↦ x^α

Soit α un réel. La fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

- Si $\alpha > 0$: elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$; elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.
- Si $\alpha < 0$: elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$.
- Si $\alpha = 0$: $x^0 = 1$ pour tout $x > 0$.

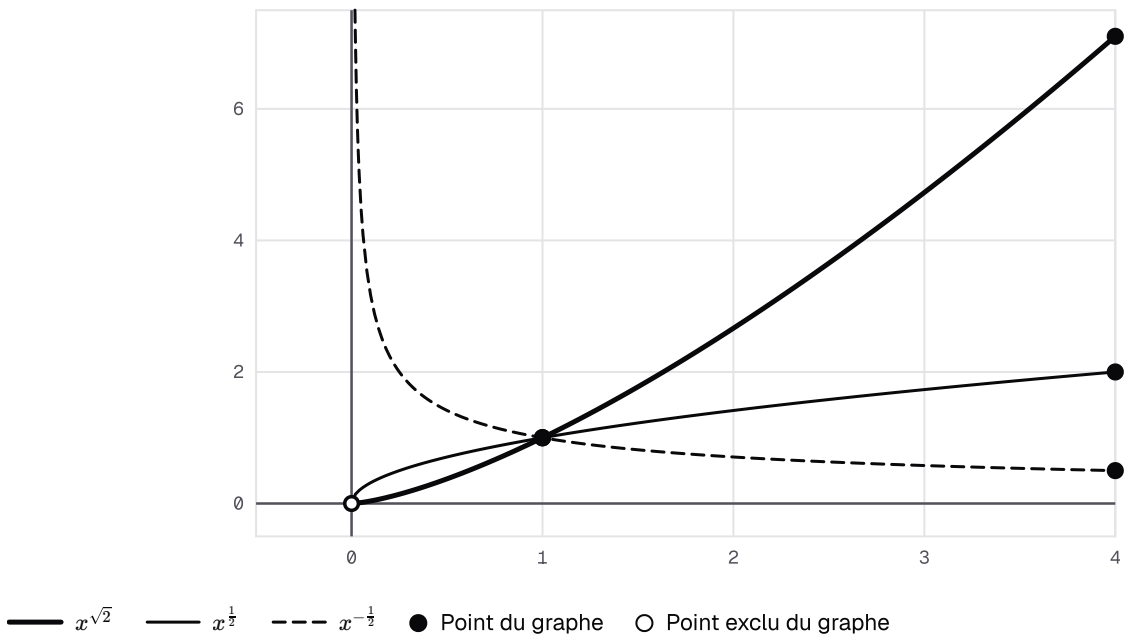
Démonstration

Étape 1. $x^{\alpha} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \alpha \ln x$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et $u'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$. Par F09 et F15 : $\left(x^{\alpha}\right)' = \dfrac{\alpha}{x}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha}\, x^{-1} = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Étape 2. Comme $x^{\alpha-1} > 0$ (F12), la dérivée a, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le signe strict de α ; le théorème liant le signe de la dérivée et les variations (chapitre de la dérivation) donne le sens de variation. Pour $\alpha = 0$, $x^0 = e^0 = 1$.

Étape 3. Quand x tend vers 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$; quand x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$ (chapitre des logarithmes). Si $\alpha > 0$, $\alpha \ln x$ a les mêmes limites ; par F06 et la limite d'une composée, x^{α} tend vers 0 en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Si $\alpha < 0$, les limites de $\alpha \ln x$ s'échangent, donc celles de x^{α} aussi.

Étape 4. Si $\alpha > 0$, soit g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^{\alpha}$ pour $x > 0$. Comme $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$, g est continue à droite en 0, donc continue sur $[0, +\infty[$: c'est le prolongement par continuité annoncé.



Les courbes de x ↦ x^√2, x ↦ x^(1/2) et x ↦ x^(−1/2) sur]0, 4]. Toutes passent par le point (1, 1). Les deux premières croissent, la troisième décroît.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

En clair. Pour $x > 0$, la dérivée de x^α est $\alpha\, x^{\alpha-1}$, comme pour un entier. Si $\alpha > 0$, la fonction croît de 0 à $+\infty$; si $\alpha < 0$, elle décroît de $+\infty$ à 0.

Et si la base est une fonction u ? **Pourquoi est-ce vrai** que $(u^\alpha)' = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$? Le même geste s'applique, avec $\ln u$ à la place de $\ln x$. Il exige que u soit strictement positive.

Une base qui varie avec u

Propriété : Dérivée de u^α et primitives de u'u^α

Soit α un réel et u une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

- La fonction $x \mapsto \big(u(x)\big)^\alpha$ est dérivable sur I et $\big(u^\alpha\big)' = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$ sur I.
- Si $\alpha \neq -1$, la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $u'\, u^\alpha$ sur I.

Démonstration

Étape 1. Sur I, $u^\alpha = e^{\alpha \ln u}$ (F15). Comme $u > 0$ sur I, la fonction $\alpha \ln u$ est dérivable sur I, de dérivée $\alpha\dfrac{u'}{u}$ (dérivée de $\ln u$, chapitre des logarithmes).

Étape 2. Par F09 : $\big(u^\alpha\big)' = \alpha\dfrac{u'}{u}\, u^\alpha = \alpha\, u'\, u^\alpha\, u^{-1} = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$ (F15).

Étape 3. Si $\alpha \neq -1$, l'étape 2 avec l'exposant $\alpha+1$ donne $\left(\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \dfrac{(\alpha+1)\, u'\, u^\alpha}{\alpha+1} = u'\, u^\alpha$. Par définition d'une primitive (chapitre des primitives), c'est une primitive de $u'\, u^\alpha$ sur I.

En clair. On dérive u^α comme x^α, puis on multiplie par u'. Deux conditions : u dérivable et strictement positive sur l'intervalle I. Pour la primitive, il faut en plus $\alpha \neq -1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque preuve revient à l'exponentielle : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, puis la dérivée de e^u. Le produit $\dfrac{\alpha}{x}\, x^\alpha$ se simplifie en $\alpha\, x^{\alpha-1}$ par les règles de calcul. La primitive se lit en dérivant $u^{\alpha+1}$.

Vérifie : L'hypothèse sur u

Dans la preuve de la dérivée de u^α, à quoi sert l'hypothèse $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$?

A. À écrire $u^\alpha = e^{\alpha \ln u}$, puis à dériver $\ln u$.

Juste.

Juste : $\ln u$ n'existe que là où $u > 0$.

B. À rendre la fonction u^α croissante sur I.

Faux.

La preuve ne parle pas de variations : u^α peut décroître.

C. À garantir que l'exposant α est positif.

Faux.

α est un réel quelconque : la condition porte sur la base, pas sur l'exposant.

D. À rien : la formule vaut pour toute u dérivable.

Faux.

Avec $u : x \mapsto x - 2$ sur $]0, 1[$, l'écriture $u^{\sqrt{2}}$ n'a pas de sens.

Correction

La preuve écrit $u^\alpha = e^{\alpha \ln u}$, puis dérive $\alpha \ln u$ en $\alpha\, \dfrac{u'}{u}$. Les deux étapes exigent $u(x) > 0$ en tout point de I.

Sans cette hypothèse, u^α n'est même pas défini pour un exposant réel quelconque.

Hypothèses nécessaires

Exemple : Contre-exemple : l'exposant –1

Une primitive de $u'\, u^\alpha$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, pour $\alpha \neq -1$. Avec $\alpha = -1$, la formule diviserait par 0 : elle ne s'applique pas.

Par exemple, $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $u'\, u^{-1} = \dfrac{u'}{u}$, avec $u : x \mapsto x^2 + 1$, strictement positive. Ses primitives viennent du logarithme, vu au chapitre précédent.

Attention : une puissance réelle exige une base positive

✗ « $\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x^{2\times\frac{1}{2}} = x$ pour tout réel x. »

✓ Avec $x=-8$: $\left((-8)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$, alors que $-8 \neq 8$. La règle $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ ne vaut que pour $x>0$. Pour un réel x quelconque, $\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Dériver et primitiver

Exemple : Exemple guidé : une dérivée et une primitive

Dérivée. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)^{\sqrt{2}}$. La fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2} \times 2x\,(x^2+1)^{\sqrt{2}-1} \\ &= 2\sqrt{2}\,x\,(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Primitive. La fonction $g : x \mapsto x\,(x^2+1)^{\pi}$ s'écrit $\dfrac{1}{2}\,u'\,u^{\pi}$, avec $\pi \neq -1$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{\pi+1}}{\pi+1} \\ &= \frac{(x^2+1)^{\pi+1}}{2(\pi+1)}. \end{aligned}$$

À toi : Rédige une primitive

Rédige la recherche d'une primitive sur $]0,+\infty[$ de $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}}$.

Indice 1

Écris $\dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}}$ comme une puissance de x, grâce aux règles de calcul.

Indice 2

Tu obtiens $x^{-\sqrt{2}}$: c'est la forme $u'\,u^{\alpha}$, avec $u : x \mapsto x$ et $\alpha = -\sqrt{2}$.

Indice 3

Point délicat : vérifie $\alpha \neq -1$ et $u > 0$ sur l'intervalle, puis contrôle en dérivant.

Réponse

« Pour $x>0$, $\dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}} = x^{-\sqrt{2}}$. La fonction $u : x \mapsto x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$, avec $u'(x)=1$, et $\alpha = -\sqrt{2} \neq -1$.

Une primitive de h sur $]0,+\infty[$ est donc

$$H : x \mapsto \frac{x^{1-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}.$$

Contrôle : pour tout $x > 0$, $H'(x) = \dfrac{(1-\sqrt{2})\,x^{-\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = x^{-\sqrt{2}} = h(x)$. »

Croissances comparées avec des puissances réelles

Logarithme contre racine

Devine : Logarithme ou racine ?

D'après toi, que devient $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$?

A. Il tend vers $+\infty$, comme $\ln x$.

Faux.

Le numérateur tend vers l'infini, mais le dénominateur aussi, et plus vite.

B. Il tend vers 1.

Faux.

À la calculatrice, pour $x = 10^6$, le quotient est déjà inférieur à $\dfrac{14}{1\,000}$: il ne reste pas près de 1.

C. Il tend vers 0.

Juste.

Juste : la racine carrée finit par distancer le logarithme.

D. Il n'a pas de limite.

Faux.

Le quotient finit par décroître vers une valeur précise : il a une limite.

Correction

À la calculatrice, pour $x = 10^6$, $\ln x = 6 \ln 10$ est inférieur à 14, alors que $\sqrt{x} = 1\,000$. Le quotient est déjà inférieur à $\dfrac{14}{1\,000}$.

Il tend vers 0 : c'est une croissance comparée avec l'exposant réel $\dfrac{1}{2}$.

Le cas de l'exposant 1 est connu : $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Mais $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ grandit moins vite que x.

Pourquoi est-ce vrai que le logarithme perd encore ? Un changement de variable ramène tout exposant réel $\alpha > 0$ aux cas déjà démontrés.

Trois limites

Propriété : Croissances comparées avec des puissances réelles

Soit α un réel strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Pour $x > 0$, posons $t = \dfrac{x}{\alpha}$. Par F15, $\dfrac{e^x}{x^\alpha} = \dfrac{\left(e^t\right)^\alpha}{(\alpha t)^\alpha} = \alpha^{-\alpha}\left(\dfrac{e^t}{t}\right)^\alpha$. Quand x tend vers $+\infty$, t aussi, et $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$ (F07) ; par F16 ($\alpha > 0$) et la limite d'une composée, sa puissance α tend vers $+\infty$, et son produit par la constante $\alpha^{-\alpha} > 0$ encore (opérations sur les limites).

Étape 2. Pour $x > 0$, posons $s = x^\alpha$: s tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (F16), et $\ln s = \alpha \ln x$ (F15). Donc $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{\ln s}{s}$, qui tend vers 0 (croissances comparées du logarithme).

Étape 3. Quand x tend vers 0^+, $s = x^\alpha$ tend vers 0 en restant strictement positif (F16), et $x^\alpha \ln x = \dfrac{1}{\alpha}\, s \ln s$, qui tend vers 0 (chapitre des logarithmes).

En clair. Pour tout exposant $\alpha > 0$:

- en $+\infty$, e^x l'emporte sur x^α, et x^α l'emporte sur $\ln x$;
- en 0^+, le produit $x^\alpha \ln x$ tend vers 0.

Sans l'hypothèse $\alpha > 0$, aucune de ces limites n'est garantie.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque limite se ramène à une limite connue par un changement de variable : $t = \dfrac{x}{\alpha}$ pour l'exponentielle, $s = x^\alpha$ pour le logarithme. L'hypothèse $\alpha > 0$ garantit que la nouvelle variable tend vers la bonne borne.

Vérifie : Où sert l'hypothèse sur α ?

À l'étape 2 de la preuve, on pose $s = x^\alpha$. Pourquoi faut-il $\alpha > 0$?

A. Pour que le réel s soit strictement positif.
Faux.
$x^\alpha > 0$ pour tout réel α, dès que $x > 0$.

B. Pour pouvoir écrire l'égalité $\ln s = \alpha \ln x$.
Faux.
Cette règle vaut pour tout réel α, dès que $x > 0$.

C. Pour que $\ln x$ tende vers $+\infty$ en $+\infty$.
Faux.
$\ln x$ tend vers $+\infty$ sans aucune hypothèse sur α.

D. Pour que s tende vers $+\infty$ avec x.
Juste.
Juste : la limite connue du logarithme porte sur une variable qui tend vers l'infini.

Correction

La limite connue $\lim_{s\to+\infty} \dfrac{\ln s}{s} = 0$ porte sur une variable s qui tend vers $+\infty$. Or x^α tend vers $+\infty$ en $+\infty$ seulement si $\alpha > 0$.

Si $\alpha < 0$, x^α tend vers 0, et la limite connue ne s'applique plus.

Exemple : Contre-exemple : un exposant négatif ou nul

Avec $\alpha = -1$, le quotient devient $\dfrac{\ln x}{x^{-1}} = x \ln x$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et non vers 0.

Avec $\alpha = 0$, il devient $\ln x$, qui tend aussi vers $+\infty$. L'hypothèse $\alpha > 0$ est donc nécessaire.

Lever une forme indéterminée

Exemple : Exemple guidé : une limite en 0 à droite

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{2}}\,(\ln x)^2$.

Forme. $x^{\sqrt{2}}$ tend vers 0 et $(\ln x)^2$ vers $+\infty$: forme indéterminée « $0 \times (+\infty)$ ».

Réécriture. Pour tout $x > 0$, $x^{\sqrt{2}} = \left(x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2$, donc

$$x^{\sqrt{2}}\,(\ln x)^2 = \left(x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln x\right)^2.$$

Conclusion. Avec $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$, la croissance comparée en 0^+ donne $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$. Par produit, le carré tend aussi vers 0 : la limite cherchée vaut 0.

Exemple : exponentielle contre puissance réelle

Un quotient. Par croissance comparée, avec $\alpha = \pi > 0$, $\dfrac{e^x}{x^\pi}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Une différence. Pour $x^{\sqrt{5}} - e^x$, on factorise par e^x. Pour tout $x > 0$:

$$x^{\sqrt{5}} - e^x = e^x \left(\frac{x^{\sqrt{5}}}{e^x} - 1\right).$$

Par croissance comparée, avec $\alpha = \sqrt{5} > 0$, le quotient tend vers 0 : la parenthèse tend vers -1. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{\sqrt{5}} - e^x\right) = -\infty$.

À toi : Rédige une limite

Rédige le calcul de $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$.

Indice 1

Pour $x > 0$, écris $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

Indice 2

Le quotient devient $\left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^3$.

Indice 3

Point délicat : cite la croissance comparée avec $\alpha = \dfrac{1}{3} > 0$, puis passe au cube.

Réponse

« Pour $x > 0$, $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$, donc

$$\frac{(\ln x)^3}{x} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^3.$$

Par croissance comparée, avec $\alpha = \dfrac{1}{3} > 0$, $\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par cube, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x} = 0$. »

Remarque : À maîtriser : citer une croissance comparée

Pour une limite qui mêle puissance réelle, exponentielle ou logarithme, rédige en trois temps :

1. **La forme** : écris la forme indéterminée, par exemple « $0 \times (-\infty)$ ».
2. **La réécriture** : factorisation, ou changement de variable qui fait apparaître $x^\alpha \ln x$, $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ ou $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$.
3. **La limite citée** : « par croissance comparée, avec $\alpha = \cdots > 0$ ». L'hypothèse fait partie de la citation.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir : les résultats

- $\exp$ est la réciproque de $\ln$: pour tout réel x et tout réel $y > 0$, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$; l'équation $e^x = k$ a une solution, $\ln k$, si et seulement si $k > 0$.
- $\left(e^u\right)' = u'\, e^u$, et $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x.
- Pour $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$; pour $x > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
- Pour $\alpha > 0$, en $+\infty$, e^x l'emporte sur x^α, et x^α sur $\ln x$.

À retenir : les méthodes

- **Équation, inéquation, système** : poser $X = e^x$, garder $X > 0$, justifier chaque équivalence.
- **Forme indéterminée** : factoriser par le terme qui l'emporte, puis citer la croissance comparée avec sa borne.

- **Primitive** : écrire la fonction sous la forme $\lambda\, u'\, e^{u}$ ou $\lambda\, u'\, u^{\alpha}$, puis vérifier en dérivant.
- **Étude et inégalité** : dérivée factorisée par $e^{u} > 0$; fonction auxiliaire, minimum, cas d'égalité.
- **Base a et puissances réelles** : vérifier la condition, puis revenir à l'exponentielle.

Le mot du prof. Tu sais maintenant passer du logarithme à l'exponentielle, dans les deux sens, et démontrer chaque règle. Tu sais aussi prouver une inégalité par une fonction auxiliaire. Les intégrales et les équations différentielles s'appuieront sur ces outils, dans les chapitres suivants.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions exponentielles et puissances réelles » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)