BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2025

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2025-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2025	Session de rattrapage	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse (7.75 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse (2.25 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes (3.5 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique (3 pts)
- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques (3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 7,75 pts

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} \quad \text{si} \quad x \in]0; +\infty[$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) 1-a) — 0,25 pts

Etudier la continuité de f à droite en 0

I) 1-b) — 0,5 pts

Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

I) 1-c) — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

I) 2-a) — 0,5 pts

2- Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 + 1 + 2\ln x$

Dresser le tableau de variations de φ

I) 2-b) — 0,5 pts

Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$ (On donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$)

INDICE

Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sous forme exacte, puis utiliser les valeurs approchées de $\ln 2$ et $\ln 3$ pour trouver leurs signes.

I) 2-c) — 0,25 pts

Montrer que : $f(\beta) = -\dfrac{\beta^2}{2}$

I) 3-a) — 0,5 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$

I) 3-b) — 0,5 pts

Donner le tableau de variations de f

I) 3-c) 0,25 pts

Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta; +\infty[$

INDICE

Pour l'unicité, utiliser la bijection de $]\beta; +\infty[$ sur son image ; pour vérifier $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$, utiliser $\ln \beta = -\frac{1+\beta^2}{2}$.

I) 3-d) 0,5 pts

Montrer que la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$

INDICE

Montrer que $\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2$ en remplaçant $-2\ln\beta$ par $1 + \beta^2$.

I) 4) 0,5 pts

Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)

II) 1-a) 0,25 pts

Partie II :

On pose $J =]\sqrt{3}; 2[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$

Etudier les variations de g

II) 1-b) 0,25 pts

Montrer que : $(\forall x \in J)$; $\sqrt{3} < g(x) < 2$

(On donne $\sqrt{3} \simeq 1.73$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$)

II) 2-a) 0,25 pts

En utilisant le résultat de la question I.3-c), montrer que : $g(\alpha) = \alpha$

II) 2-b) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in J)$; $|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$

II) 2-c) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall x \in J)$; $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$

II) 3-a) 0,25 pts

3- On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = \frac{7}{4} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \in J$

II) 3-b) 0,5 pts

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$

II) 3-c) 0,25 pts

En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α .

Exercice 2 — 2,25 pts

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1-a) — 0,25 pts

1- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

1-b) — 0,25 pts

En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$; $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

2-a) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

2-b) — 0,5 pts

En déduire que : $(\forall n \geq 2)$; $u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

2-c) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

INDICE

Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)\,dx$ avec une primitive de $\ln$ (ou une intégration par parties), puis isoler u_n dans chacune des deux inégalités de la question 2-b.

2-d) — 0,25 pts

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 — 3,5 pts

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

I) 1-a) — 0,25 pts

Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$

I) 1-b) — 0,5 pts

En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\mathrm{Im}(z_1) \leq 0$

I) 2-a) — 0,25 pts

Montrer que : $\dfrac{z_1 + 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

INDICE

Factoriser par l'angle moitié : $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$ et $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$.

I) 2-b) — 0,25 pts

En déduire la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{z_1 + iz_2}{z_2 + i}$

II) 1-a) — 0,25 pts

Partie II :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$

Soient m un nombre **réel** de $]0; 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$

Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R

II) 1-b) — 0,25 pts

Vérifier que : $R(A) = C$

II) 2-a) — 0,5 pts

2- Soit H le point d'affixe $h = \dfrac{m}{m-i}e^{i\theta}$

Montrer que : $\dfrac{p-a}{h} = \dfrac{m^2+1}{m}i$ et $\dfrac{h-a}{p-a} = \dfrac{1}{m^2+1}$

II) 2-b) — 0,25 pts

En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP)

II) 2-c) 0,5 pts

Montrer que : $\dfrac{b-h}{q-h} = \dfrac{1}{m}i$

II) 2-d) 0,25 pts

En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

II) 2-e) 0,25 pts

Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

INDICE

Calculer aussi $\dfrac{b-a}{q-a}$: il est imaginaire pur. Deux angles droits qui « voient » le même segment $[QB]$.

Exercice 4 — 3 pts

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $\quad y = \dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{d}$ où $a, b, c\ et\ d$ sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$

1-a) 0,5 pts

1- On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0)

Montrer que : d divise bc

1-b) 0,5 pts

En déduire que : d divise b

2-a) 0,5 pts

2- On suppose que d divise b et on pose : $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

Montrer que qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$

2-b) 0,75 pts

En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S = \{(-vcn + bk\ ;\ -ucn + ak)/k \in \mathbb{Z}\}$$

INDICE

Montrer d'abord que $(E) \iff ax - by = nc$, puis en chercher une solution particulière à partir de $bu - av = 1$.

3) 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $\quad y = \dfrac{3}{2975}x - \dfrac{2}{119}$

(On donne : $2975 = 119 \times 25$)

Exercice 5 — 3,5 pts

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $E = \{x + yi \ / \ x \in \mathbb{Z} \ et \ y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4$; $(x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$

Partie I :

I) 1-a) — 0,25 pts

Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$

I) 1-b) — 0,25 pts

Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E

I) 2) — 0,5 pts

Montrer que la loi $*$ est associative dans E

I) 3) — 0,25 pts

Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E

I) 4-a) — 0,25 pts

Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$; $(x + yi) * \left((-1)^{(y+1)} x - yi\right) = 0$

I) 4-b) — 0,25 pts

Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

II) 1-a) — 0,5 pts

Partie II :

Soient les deux ensembles $F = \{x + 2yi \ / \ x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$

II) 1-b) — 0,25 pts

Montrer que la loi $*$ est commutative dans F

II) 2-a) 0,5 pts

2- Soit φ l'application définie de F vers $M_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ \varphi(x+2yi) = M(x,y)$$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(F,*)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

II) 2-b) 0,25 pts

Montrer que $\varphi(F) = G$

II) 2-c) 0,25 pts

En déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2025