BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2025

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2025-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2025	Session normale	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse .....(10 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 10 pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + e}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

I. 1- a) — 0,25 pts

Partie I :

Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(1-x) = f(x)$

I. 1- b) — 0,25 pts

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

I. 1- c) — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

I. 1- d) — 0,5 pts

Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

I. 2- a) — 0,5 pts

Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = f(x)\dfrac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$

I. 2- b) — 1 pts

Donner les variations de f puis en déduire que :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ 0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$

I. 3- — 0,5 pts

Représenter graphiquement la courbe (Γ).

(On prendra $\left\|\vec{i}\right\| = 1\,cm$, $\left\|\vec{j}\right\| = 2\,cm$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{e}} \cong 0.30$ et $\dfrac{1}{1+e} \cong 0.27$)

I. 4- a) — 0,5 pts

Montrer que: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$

I. 4- b) — 0,25 pts

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

I. 5- a) — 0,25 pts

En effectuant le changement de variables : $t = e^x$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$$

I. 5- b) 0,5 pts

Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\left(\sqrt{e}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$

I. 5- c) 0,25 pts

En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

II. 1- 0,5 pts

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n)$

En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ |f'(x)| \leq f(x)$

II. 2- a) 0,5 pts

Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\ ;\ 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

II. 2- b) 0,25 pts

Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

II. 2- c) 0,5 pts

En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

II. 3- a) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < \frac{1}{2}$

II. 3- b) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

II. 3- c) 0,5 pts

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

II. 3- d) 0,25 pts

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

III. 1- a) 0,25 pts

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ S_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

III. 1- b) 0,5 pts

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)

III. 2- 0,5 pts

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 — 3,5 pts

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

(E_α) : $z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0$

I. 1- a) — 0,25 pts

Partie I :

Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2$

I. 1- b) — 0,5 pts

En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$

I. 2- — 0,25 pts

Vérifier que $\dfrac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

II. 1- a) — 0,5 pts

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\dfrac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \mathrm{Im}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Montrer que : $\dfrac{h}{b-a} = -\left(\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\right) i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

II. 1- b) — 0,5 pts

Montrer que : $\dfrac{h-a}{b-a} = \dfrac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

II. 2- a) — 0,5 pts

2- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$

Montrer que : $\dfrac{n}{m-a} = -\lambda i$

II. 2- b) — 0,5 pts

En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda|\, AI$

II. 2- c) 0,25 pts

Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

II. 2- d) 0,25 pts

Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

Exercice 3 3 pts

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

1- 0,5 pts

Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ [p]$

2- a) 0,5 pts

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2 \equiv 1\ [p]$. Soit x_0 une solution de cette équation.

Montrer que : $x_0^{p-1} \equiv 1\ [p]$

2- b) 0,25 pts

En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$

3- a) 0,5 pts

3- Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$

3- b) 0,5 pts

En déduire que l'équation (E) : $11x + \left(2^{2n+1} - 1\right) y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

4- a) 0,25 pts

4- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^2 + 5x + 2 \equiv 0\ [11]$

Montrer que : $(F) \Leftrightarrow 2(2x + 5)^2 \equiv 1\ [11]$

4- b) 0,5 pts

En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Exercice 4 — 3,5 pts

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

1- a) — 0,25 pts

Vérifier que : $A^2 = -2A$

1- b) — 0,25 pts

En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$

2- a) — 0,25 pts

Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2- b) — 0,25 pts

En déduire que la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

3- — 0,25 pts

Montrer que : $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité : $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$)

4- — 1 pts

Montrer que : $\left(E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe commutatif.

5- a) — 0,5 pts

5- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ M(x) \, T \, M(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \varphi(x) = M\left(\frac{1 - x}{2}\right)$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$

5- b) — 0,25 pts

En déduire que (E, T) est un groupe commutatif.

6- 0,5 pts

Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2025