BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2024-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2024	Session de rattrapage	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse .....(6.5 pts)
- L'exercice2 se rapporte à l'analyse .....(3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'exercice4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
- L'exercice5 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 6,5 pts

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$f_n(0)=0$ et $\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ f_n(x)=x-x^n\ln x$

Et on note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1-a) — 0,25 pts

Montrer que f_n est continue à droite en 0

INDICE

Écrire $x^n\ln x=x^{n-1}\cdot(x\ln x)$ et utiliser $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

1-b) — 0,75 pts

Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

INDICE

Factoriser par x^n pour la première limite ; pour la seconde, $\dfrac{f_n(x)}{x}=1-x^{n-1}\ln x$.

1-c) — 0,5 pts

Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

1-d) — 0,5 pts

Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ f_n'(x)=1-x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x$

1-e) — 0,5 pts

Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

INDICE

Étudier séparément le signe de $1-x^{n-1}$ et celui de $-nx^{n-1}\ln x$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

2-a) — 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $\forall x\in[0,+\infty[\ ;\ f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

INDICE

Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ et le factoriser.

2-b) — 0,25 pts

En déduire la position relative des deux courbes (C_n) et (C_{n+1})

3-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]1;2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

(On prendra $\ln 2 = 0{,}7$)

INDICE

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction strictement monotone f_n sur $[1, 2]$.

3-b) 0,25 pts

Vérifier que $(\forall n \geq 2) \quad \alpha_{n+1}^{n} \ln \alpha_{n+1} = 1$

3-c) 0,25 pts

En déduire que pour tout $n \geq 2$, $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

3-d) 0,5 pts

Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

INDICE

Comparer $f_n(\alpha_{n+1})$ et $f_n(\alpha_n)$, puis utiliser la stricte décroissance de f_n sur $[1, +\infty[$.

3-e) 0,25 pts

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4-a) 0,25 pts

4- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Montrer que : $1 \leq \ell \leq 2$

4-b) 0,5 pts

Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n - 1 = -\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

INDICE

Écrire $f_n(\alpha_n) = 0$ sous la forme $\alpha_n^{n-1} \ln \alpha_n = 1$, puis prendre le logarithme.

4-c) 0,25 pts

On suppose que $\ell > 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de ℓ

4-d) 0,5 pts

En déduire la valeur de la limite ℓ

INDICE

Raisonner par l'absurde : d'après 4-b, le quotient de 4-c vaut $-(n-1)$.

Exercice 2 — 3,5 pts

1-a) — 0,25 pts

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

1-b) — 0,5 pts

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

INDICE

Mettre n^2 en facteur au dénominateur pour faire apparaître une somme de Riemann.

2- — 0,25 pts

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \leq 1$

3-a) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in [0,1])\ ;\ 0 \leq e^x - 1 \leq e.x$

INDICE

Pour l'inégalité de droite, appliquer le théorème des accroissements finis à $t \mapsto e^t$ sur $[0,x]$.

3-b) — 0,25 pts

En déduire que : $(\forall x \in [0,1])\ ;\ 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

INDICE

Intégrer l'encadrement de 3-a entre 0 et x.

4-a) — 0,25 pts

4- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

4-b) — 0,25 pts

Montrer que la fonction : $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$

4-c) — 0,25 pts

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1,2,.....,n\}$, on a :

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(1+x^2\right)^{-2} dx$$

5-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \dfrac{e}{2n}$

INDICE

Écrire $\left(\dfrac{n}{n^2+k^2}\right)^2 = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n}\left(1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right)^{-2}$, puis sommer les inégalités de 4-c.

5-b) 0,5 pts

En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 — 3,5 pts

Soit $m \in \mathbb{C}^*$

I 1-a) — 0,25 pts

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$

Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$

I 1-b) — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

I 2- — 0,5 pts

Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ $\left(r \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\right)$

II 1- — 0,75 pts

Partie II : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

Soit M_1 le point d'affixe z_1, M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^* - \{1\})$

Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k

INDICE

Écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$; d'une homothétie de centre O et de rapport k : $z' = kz$.

II 2- — 0,75 pts

Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

II 3- — 0,75 pts

En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

INDICE

Quatre points deux à deux distincts, dont trois ne sont pas alignés, sont cocycliques si et seulement si le quotient de 2 est réel.

Exercice 4 — 3,5 pts

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par :
$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 \; ; \; (x+iy)*(x'+iy') = (xy' + y^5x') + iyy'$

I 1-a) — 0,25 pts

Partie I :

Vérifier que : $1 * 2i = 2$

I 1-b) — 0,25 pts

Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative.

I 2- — 0,5 pts

Montrer que la loi $*$ est associative.

I 3-a) — 0,25 pts

Vérifier que : $1 * (1 + 2i) = 2$

I 3-b) — 0,25 pts

En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe.

INDICE

Dans un groupe, tout élément est simplifiable.

I 4-a) — 0,25 pts

4- Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $E = \{x + yi \; / \; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$

Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

I 4-b) — 0,5 pts

Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

INDICE

Chercher un neutre $e = a + ib$ en écrivant $z * e = z$ pour tout $z \in E$, puis vérifier $e * z = z$.

II 1- — 0,5 pts

Partie II :

On considère les sous-ensembles de E définies par : $F = \{yi \; / \; y \in \mathbb{R}^*\}$ et $G = \{x + i \; / \; x \in \mathbb{R}\}$

Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$

II 2-a) — 0,25 pts

2- On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; \varphi(x) = x + i$

Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$

II 2-b) 0,25 pts

Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$

II 2-c) 0,25 pts

En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

INDICE

L'image d'un groupe par un homomorphisme est un groupe, commutatif si le groupe de départ l'est.

Exercice 5 3 pts

1- 0,5 pts

En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, ..., 22\}$ tel que :

$10u \equiv 1\ [23]$

2-a) 0,5 pts

2- Soient m un entier naturel et q et r, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10

Montrer que : $m \equiv 10(q + ur)\ [23]$

2-b) 0,75 pts

Montrer que : $23 \text{ divise } m \Leftrightarrow 23 \text{ divise } (q + ur)$

3-a) 0,75 pts

3- On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 1\ [23] \\ x \equiv 2\ [10] \end{cases}$

Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et 23 divise $(q + 7)$

INDICE

Appliquer 2-b au nombre $m = x - 1$.

3-b) 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S)

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2024