BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2024-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2024	Session normale	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse .....(7.5 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse .....(2.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 7,5 pts

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$f(1) = \frac{1}{2}$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- — 0,5 pts

Montrer que f est continue à droite en 1

2- — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3- a) — 0,25 pts

Soit $x \in]1, +\infty[$

En posant : $t = (x-1)^2$, vérifier que : $\frac{1 - x + \ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t}$

3- b) — 0,5 pts

Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[)$, $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln\left(1 + \sqrt{t}\right)}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0; t]$)

INDICE

Appliquer le théorème des accroissements finis à $g(s) = -\sqrt{s} + \ln\left(1 + \sqrt{s}\right)$ sur $[0; t]$, en remarquant que $g(0) = 0$.

3- c) — 0,25 pts

En déduire que : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

4- a) — 0,5 pts

Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} = -\frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x-1)^2}$

4- b) — 0,5 pts

En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5- a) — 0,5 pts

5- Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$

Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$

5- b) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $I(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x}$

5- c) 0,5 pts

Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{I(x)}{J(x)}$

5- d) 0,5 pts

En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[, -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

6- a) 0,25 pts

Dresser le tableau de variations de la fonction f

6- b) 0,5 pts

Tracer la courbe (C) (On prendra $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1\text{cm}$ et $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2\text{cm}$)

7- 0,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$

INDICE

Étudier $h(x) = f(x) - x + 1$ sur $[1; 2]$: sa dérivée se majore grâce à 5-d).

8- a) 0,5 pts

8- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$a_0 \in [1, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 + f(a_n)$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{2}|a_n - a|$

INDICE

Remarquer que $a = 1 + f(a)$, vérifier que tous les termes a_n sont dans $[1; +\infty[$, puis appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre a_n et a.

8- b) 0,5 pts

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

8- c) 0,25 pts

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 — 2,5 pts

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$

1- a) — 0,5 pts

Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$

1- b) — 0,5 pts

En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta=\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}dt$

2- a) — 0,5 pts

2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell=\dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$

INDICE

Écrire $S_n=\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{\beta}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}F^{-1}\left(0+k\frac{\beta-0}{n}\right)$: on reconnaît une somme de Riemann de F^{-1} sur $[0;\beta]$.

2- b) — 0,5 pts

Montrer que $\ell=\dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^1 u\,e^{u^2}du$

(On pourra effectuer le changement de variable $u=F^{-1}(t)$)

2- c) — 0,5 pts

En déduire que : $\ell=\dfrac{e-1}{2\beta}$

Exercice 3 — 3,5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

(E_α): $z^2 - 2iz + \alpha = 0$ où $\alpha \in \mathbb{C}$

Partie I 1- a) — 0,25 pts

Partie I :

Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$

Partie I 1- b) — 0,25 pts

Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

Partie I 2- — 0,5 pts

On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$

Partie II 1- a) — 0,5 pts

Partie II :

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m

Partie II 1- b) — 0,25 pts

En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.

Partie II 2- a) — 0,25 pts

2-On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

Partie II 2- b) — 0,5 pts

Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

Partie II 2- c) — 0,25 pts

En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

Partie II 3- a) — 0,25 pts

Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

Partie II 3- b) 0,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

INDICE

Traduire « rectangle en O » par $Re\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$ avec $z_1\neq 0$ et $z_2\neq 0$, puis utiliser 2-b) et 3-a) : $|z_1-z_2|^2=|\Delta|$. Ne pas oublier les points à exclure.

Exercice 4 3,5 pts

On considère dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$\forall\left((a,b),(c,d)\right)\in\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\right)^2$; $(a,b)T(c,d)=\left(a\overline{d}+c,bd\right)$

($\overline{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d)

1- a) 0,5 pts

Vérifier que $(i,2)T(1,i)=(2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$

1- b) 0,25 pts

En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

2- 0,5 pts

Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

3- 0,25 pts

Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

4- a) 0,5 pts

Vérifier que $\forall(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$; $(a,b)T\left(-\dfrac{a}{\overline{b}},\dfrac{1}{b}\right)=(0,1)$

4- b) 0,5 pts

Montrer que $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*,T)$ est un groupe non commutatif.

5- a) 0,5 pts

Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T

5- b) 0,5 pts

Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*,T)$

Exercice 5 — 3 pts

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1- a) — 1 pts

Montrer que p divise $r^{p-1}-1$ et que q divise $r^{q-1}-1$

1- b) — 0,5 pts

En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$

1- c) — 0,5 pts

Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$

2- — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \quad [221]$ (On donne : $221 = 13 \times 17$)

INDICE

Appliquer la question 1 avec $p = 13, q = 17$ et $r = 2024$: que vaut $(p-1)(q-1)$?

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2024