BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2023-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2023	Session de rattrapage	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse (10 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes (3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux structures algébriques (3.5 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'arithmétique (3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 10 pts

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0, +\infty[) \quad ; \quad f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I) 1-a) — 0,5 pts

Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0

I) 1-b) — 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

I) 1-c) — 0,75 pts

Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $\dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

I) 1-d) — 0,5 pts

Calculer, suivant la parité de n , $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

I) 2-a) — 0,75 pts

Montrer que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad ; \quad f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$$

I) 2-b) — 0,25 pts

Vérifier que : $\forall n \geq 2$, $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $(x = 1$ ou $x = e^{-2n})$

I) 2-c) — 1 pts

Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

INDICE

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$: le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$. Étudier chaque facteur sur $]0; e^{-2n}[$, $]e^{-2n}; 1[$ et $]1; +\infty[$, en distinguant $n - 1$ pair ou impair.

I) 2-d) 0,25 pts

Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

INDICE

Dériver $f'_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)}{2\sqrt{x}}$ et factoriser $f''_n(x)$ par $(\ln x)^{n-2}$.

II) 1-a) 0,25 pts

Partie II :

1- Soit $\beta \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad u_n = f_n(\beta)$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n < \sqrt{e}$

II) 1-b) 0,25 pts

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

II) 1-c) 0,25 pts

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II) 2-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1; e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

II) 2-b) 0,75 pts

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

INDICE

Calculer $f_{n+1}(x_n)$ à l'aide de $f_n(x_n) = 1$, puis comparer à $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$.

II) 3-a) 0,5 pts

3- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Montrer que : $1 < \ell \leq e$

II) 3-b) 0,25 pts

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

II) 3-c) 0,25 pts

Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

II) 3-d) 0,25 pts

En déduire la valeur de ℓ

III) 1-a) 0,25 pts

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 \, dt$

Montrer que la fonction F est continue sur I

III) 1-b) 1 pts

En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \; ; \; F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$$

III) 2-a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x)$

III) 2-b) 0,25 pts

En déduire la valeur de $F(0)$

III) 2-c) 0,5 pts

Calculer, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle $[0, 1]$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\mathrm{cm}$)

Exercice 2 — 3,5 pts

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : (S):

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

I) 1-a) — 0,25 pts

1- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

Montrer que : $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

I) 1-b) — 0,75 pts

Montrer que : $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$, en déduire les valeurs possibles de z

(On remarque que : $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

I) 1-c) — 0,25 pts

En déduire les valeurs du couple (x,y)

I) 2) — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

II) 1) — 0,25 pts

PARTIE II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

II) 2-a) — 0,5 pts

La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$

INDICE

$(AP)\parallel(BC)$ équivaut à $\dfrac{p-a}{c-b}\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire à l'égalité de ce nombre et de son conjugué ; utiliser $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ pour $z\in\{a,b,c,p\}$.

II) 2-b) 0,5 pts

La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q = -p$

II) 2-c) 0,5 pts

La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$

Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

INDICE

Appliquer la question 2-a au point C et à la droite (AB) pour obtenir r, puis montrer que $\frac{r-p}{b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 — 3,5 pts

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1) — 0,25 pts

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$

2-a) — 0,5 pts

2- On munit l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall\, ((x,z),(x',z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 \ ; \ (x,z) * (x',z') = (x + x', z + z')$$

et on considère l'application φ définie de E vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \varphi\left(M(a,b,c)\right) = (a, b + ci)$$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ et que $\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

2-b) — 0,25 pts

En déduire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif.

3-a) — 0,25 pts

3- On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall\, ((x,z),(x',z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 \ ; \ (x,z) T (x',z') = (x\,\mathrm{Re}(z') + x'\,\mathrm{Re}(z), zz')$$

($\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z)

Montrer que T est commutative.

3-b) — 0,25 pts

Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

3-c) — 0,5 pts

Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1,i) T (x,-i) = (0,1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

4-a) — 0,25 pts

4- Soit $G = \{(\mathrm{Im}(z), z) \ / \ z \in \mathbb{C}\}$

($\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z)

Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$

(On remarque que $(-\mathrm{Im}(z), -z)$ est le symétrique de $(\mathrm{Im}(z), z)$ pour la loi $*$)

4-b) 0,25 pts

Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^*$; $\psi(z) = (\mathrm{Im}(z), z)$

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$

4-c) 0,5 pts

En déduire que $(G - \{(0,0)\}, T)$ est un groupe commutatif.

5) 0,5 pts

Montrer que $(G, *, T)$ est un corps commutatif.

INDICE

Prolonger ψ à $\mathbb{C}$ tout entier : $\psi(z+z') = \psi(z) * \psi(z')$ et $\psi(zz') = \psi(z) T \psi(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, puis en déduire la distributivité.

Exercice 4 3 pts

Soit p un nombre premier impair. On pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{p-1}$

Soit q un nombre premier qui divise S .

1-a) 0,5 pts

Montrer que p et q sont premiers entre eux.

1-b) 0,25 pts

En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1\ [q]$

1-c) 0,5 pts

Vérifier que : $p^p - 1 = (p-1)S$, en déduire que : $p^p \equiv 1\ [q]$

2-a) 0,75 pts

2- On suppose que p et $q - 1$ sont premiers entre eux.

En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p \equiv 1\ [q]$

INDICE

Choisir des coefficients de Bézout $u > 0$ et $v \leq 0$: $up = 1 + w(q-1)$ avec $w \geq 0$, puis calculer p^{up} de deux façons.

2-b) 0,25 pts

En déduire que $S \equiv 1\ [q]$

3) 0,75 pts

Montrer que : $q \equiv 1\ [p]$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2023