BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2023-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2023	Session normale	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse .....(7.75 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse .....(2.25 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)
- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 7,75 pts

I. 1- a) — 0,5 pts

Partie I

Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[\ ; \dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

INDICE

Réduire chaque inégalité, après multiplication par un dénominateur strictement positif, à $t^2 \geq 0$.

I. 1- b) — 0,5 pts

En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[\ ; \dfrac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+2x}{1+x}\right)$

I. 2- — 0,5 pts

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{g(x) - 1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

II. 1- — 0,5 pts

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(0) = 1$ et $\forall x \in]0, +\infty[\ ; f(x) = g(x)e^{-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

II. 2- a) — 0,25 pts

Montrer que f est continue à droite en 0

II. 2- b) — 0,25 pts

Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[\ ; \dfrac{f(x) - 1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x} - 1}{x}\right) g(x) + \left(\dfrac{g(x) - 1}{x}\right)$

II. 2- c) — 0,5 pts

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

II. 3- — 0,75 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

$\forall x \in]0, +\infty[\ ; f'(x) = \dfrac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$

II. 4- a) 0,5 pts

Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ; -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

INDICE

Multiplier par $(1+x)^2 > 0$ les deux inégalités de I-1-b) pour encadrer $(1+x)^2\ln(1+x)$.

II. 4- b) 0,25 pts

En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[\ ; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

II. 5- a) 0,25 pts

Dresser le tableau de variations de f

II. 5- b) 0,75 pts

Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 2\text{cm}$)

III. 1- 0,5 pts

Partie III

Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

INDICE

Étudier $h(x) = f(x) - 3x$ sur $[0;+\infty[$: continuité, sens de variation, valeur en 0 et limite en $+\infty$.

III. 2- a) 0,5 pts

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$u_0 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 0$

III. 2- b) 0,5 pts

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

INDICE

Remarquer que $\alpha = \frac{1}{3}f(\alpha)$, puis appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre u_n et α, avec II-4-b).

III. 2- c) 0,5 pts

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

III. 2- d) 0,25 pts

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Exercice 2 — 2,25 pts

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; ...; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

1- a) — 0,5 pts

Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; ...; (n-1)\}\ \exists c_k \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$

1- b) — 0,25 pts

Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; ...; (n-1)\}$; $M_kM_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

1- c) — 0,5 pts

En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; ...; (n-1)\}$; $\frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_kM_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- a) — 0,5 pts

2- Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}$

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

2- b) — 0,5 pts

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$

Exercice 3 — 3,5 pts

On considère le nombre complexe : $u = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right) i$

1- a) — 0,5 pts

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

1- b) — 0,25 pts

Montrer que : $\dfrac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

1- c) — 0,25 pts

En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

1- d) — 0,5 pts

Montrer que : $u = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- a) — 0,5 pts

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left(2 - \sqrt{3}\right) y_n \\ y_{n+1} = \left(2 - \sqrt{3}\right) x_n + y_n \end{cases}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$

2- b) — 0,5 pts

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

3- a) — 0,5 pts

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

3- b) — 0,5 pts

Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

Exercice 4 — 3 pts

Soit p **un nombre premier impair**. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^2 \equiv 2 \quad [p]$

1- a) — 0,25 pts

Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

1- b) — 0,25 pts

En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

(On remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = 2^{p-1} - 1$)

2- a) — 0,5 pts

2- Soit x une solution de l'équation (E)

Montrer que p et x sont premiers entre eux.

2- b) — 0,5 pts

En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

3- — 0,25 pts

Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k \in \{1, 2, ..., p-1\})\ C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

4- a) — 0,25 pts

En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)

4- b) — 0,5 pts

On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \quad [p]$ (on pourra utiliser la question3-)

5- — 0,5 pts

En déduire que si $p \equiv 5 \quad [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

INDICE

Calculer $\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ lorsque $p = 8m + 5$, puis comparer avec 2-b).

Exercice 5 — 3,5 pts

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

I. 1- — 0,5 pts

Partie I :

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

I. 2- — 0,25 pts

Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

I. 3- a) — 0,25 pts

Vérifier que : $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$; $M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$

I. 3- b) — 0,5 pts

En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

I. 4- a) — 0,25 pts

Vérifier que : $M\left(\sqrt{3}, 1\right) \times M\left(-\sqrt{3}, 1\right) = O$

I. 4- b) — 0,25 pts

En déduire que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

II. 1- — 0,25 pts

Partie II :

Soient $F = \left\{ x + y\sqrt{3} \ / \ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ et $G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / \ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$

Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$; $x + y\sqrt{3} = 0$ si et seulement si ($x = 0$ et $y = 0$)

II. 2- — 0,25 pts

Montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

INDICE

Pour l'inverse de $x' + y'\sqrt{3}$, multiplier par la quantité conjuguée $x' - y'\sqrt{3}$, non nulle d'après 1-.

II. 3- a) 0,25 pts

3- Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$\forall (x,y)\in \mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}$; $\varphi\left(x+y\sqrt{3}\right)=M(x,y)$

Vérifier que : $\varphi\left(F-\{0\}\right)=G-\{O\}$

II. 3- b) 0,25 pts

Montrer que φ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

II. 3- c) 0,25 pts

En déduire que $(G-\{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

II. 4- 0,25 pts

Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2023