BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2022-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session de rattrapage	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse (10 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes (3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux structures algébriques (3.5 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'arithmétique (3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 10 pts

A) 1) — 0,25 pts

A-

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $1 + x \leq e^x$

A) 2-a) — 0,25 pts

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

A) 2-b) — 0,5 pts

En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

INDICE

Intégrer deux fois l'encadrement de la question 2-a entre 0 et x.

A) 2-c) — 0,5 pts

Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

B) 1-a) — 0,5 pts

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0, +\infty[) \; ; \; f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que f est continue à droite en 0

B) 1-b) — 0,25 pts

Vérifier que : $(\forall x > 0)$; $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

B) 1-c) — 0,5 pts

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

B) 2-a) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x + 1 - e^x(1 + x)\right)$

B) 2-b) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x > 0)$; $f'(x) \leq -e^{-2x}$

(On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$)

B) 2-c) — 0,25 pts

En déduire le sens de variations de f sur I

B) 3-a) 0,25 pts

3- On admet que : $(\forall x > 0)$; $f''(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2 - 4x - 2 + e^x\left(2 + 2x + x^2\right)\right)$

Montrer que : $(\forall x \geq 0)$; $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

B) 3-b) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall x > 0)$; $f''(x) > 0$

B) 4-a) 0,5 pts

4-On admet que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\dfrac{3}{2}$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

B) 4-b) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall x \in I)$; $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

B) 5-a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

B) 5-b) 0,25 pts

Dresser le tableau de variations de f

B) 5-c) 0,25 pts

Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0;1)$

B) 5-d) 0,5 pts

Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

C) 1-a) 0,5 pts

C-1- Pour tout x de $[0;1]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$

Montrer que g est une bijection de $[0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

C) 1-b) 0,5 pts

Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

C) 2-a) 0,5 pts

2- Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0; 1.....; n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$$

Montrer que : $\forall k \in \{0; 1.....; n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)dt$

INDICE

Écrire $J_k - I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\, dt$ et appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre x_k et t.

C) 2-b) 0,5 pts

En déduire que : $\forall k \in \{0; 1.....; n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

C) 3-a) 0,5 pts

3- On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

C) 3-b) 0,25 pts

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 — 3,5 pts

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : \quad mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$$

I) 1-a) — 0,25 pts

Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = \left(m^2 - 1\right)^2$

I) 1-b) — 0,5 pts

Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

I) 2) — 0,5 pts

On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \pi$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

INDICE

Factoriser par l'angle moitié : $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$.

II) 1) — 0,5 pts

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m-1$ et $\dfrac{1}{m} - 1$

Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$

II) 2-a) — 0,5 pts

2- On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$

Montrer que l'affixe du point C est : $c = m - 1 + \left(\dfrac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

II) 2-b) — 0,5 pts

Montrer que : $2(p-r) = m - 1 + \left(\dfrac{1}{m} - m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$

et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\dfrac{1}{m} - m\right)$

II) 2-c) — 0,25 pts

Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

II) 2-d) 0,5 pts

Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

Exercice 3 3,5 pts

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et soit $G = \{M(a) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$

1-a) 0,5 pts

1- Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R})$; $\varphi(a) = M(a)$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

1-b) 0,5 pts

Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, en déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

1-c) 0,5 pts

Déterminer J l'élément neutre dans $(G, \times)$

1-d) 0,5 pts

Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$

1-e) 0,5 pts

Résoudre dans $(G, \times)$ l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

2-a) 0,25 pts

Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})$; $M(a) \times J = M(a) \times I$

2-b) 0,5 pts

En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

2-c) 0,25 pts

Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, sont des solutions dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

Exercice 4 — 3 pts

1) — 0,5 pts

Montrer que 137 est un nombre premier.

2) — 0,5 pts

Déterminer un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$

3-a) — 0,5 pts

3- Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1\ [137]$

Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

3-b) — 0,5 pts

Montrer que : $x^{136} \equiv 1\ [137]$

3-c) — 0,5 pts

Montrer que : $x^{2} \equiv 1\ [137]$

INDICE

Utiliser un couple de la question 2 avec $u > 0$: $38u = 2 + 136w$ avec $w \in \mathbb{N}$.

4) — 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{19} \equiv 1\ [137]$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2022