BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2022-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session normale	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse .....(10 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 10 pts

A 1- — 0,25 pts

A-

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ 0 \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \leq x^3$

INDICE

Réduire $1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1}$ au même dénominateur.

A 2- — 0,25 pts

En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ 0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^4}{4}$

INDICE

Intégrer l'encadrement de la question 1 entre 0 et x.

B 1-a) — 0,5 pts

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ et pour tout x de $]0, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que f est continue à droite en 0

INDICE

Diviser l'encadrement de A 2- par x^2 pour encadrer $f(x)$.

B 1-b) — 0,5 pts

Montrer que f est dérivable à droite en 0

B 1-c) — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

INDICE

Écrire $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \dfrac{1+x}{x^2}$.

B 2-a) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)\ ;\ f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3}$

où $g(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

B 2-b) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in I)\ ;\ 0 \leq g'(x) \leq x^2$

B 2-c) 0,25 pts

En déduire que : $(\forall x \in I)\ ;\ 0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$

INDICE

Intégrer l'encadrement de g' entre 0 et x, sachant que $g(0) = 0$.

B 2-d) 0,25 pts

Déterminer le sens de variation de f sur I

B 3-a) 0,25 pts

Dresser le tableau de variation de f

B 3-b) 0,5 pts

Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

C 1- 0,5 pts

C-

Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

INDICE

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $h(x) = f(x) - x$ sur $[0,1]$.

C 2-a) 0,5 pts

2- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n)$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \in [0;1]$

C 2-b) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|$

INDICE

Utiliser $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3}$ (conséquence de B 2-a et B 2-c) et l'inégalité des accroissements finis entre u_n et α.

C 2-c) 0,5 pts

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

C 2-d) 0,25 pts

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

D 1- 0,5 pts

D- Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

D 2-a) 0,5 pts

En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$(\forall x \in]0,+\infty[)\ ;\ F(x) = 2\ln 2 - \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$

INDICE

Pour $t>0$, poser $u(t) = t - \ln(1+t)$ et $v(t) = -\frac{1+t}{t}$, dont la dérivée est bien $\frac{1}{t^2}$.

D 2-b) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)\,dt = 2\ln 2 - 1$

D 2-c) 0,5 pts

Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

E 1-a) 0,25 pts

E- On pose : pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \le \Delta_k \le f(k) - f(k+1)$

INDICE

Encadrer $f(t)$ pour $t \in [k, k+1]$ grâce à la décroissance de f, puis intégrer.

E 1-b) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \le S_n \le \frac{1}{2}$

E 2-a) 0,25 pts

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

E 2-b) 0,25 pts

En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

E 2-c) 0,25 pts

Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

INDICE

Une suite croissante est minorée par son premier terme ; calculer S_1 avec D 2-b.

Exercice 2 — 3,5 pts

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I 1- — 0,5 pts

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

(E_m) : $z^2 + mj^2z + m^2j = 0$

Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

I 2-a) — 0,25 pts

Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = [m(1-j)]^2$

I 2-b) — 0,5 pts

Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

INDICE

Utiliser la racine carrée $m(1-j)$ de Δ, puis les relations $1 + j = -j^2$ et $1 + j^2 = -j$.

I 3- — 0,5 pts

Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

INDICE

Écrire $1 + i$ et $1 + j$ sous forme exponentielle.

II 1- — 0,25 pts

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

II 2-a) — 0,75 pts

2- On considère les points A , B et C d'affixes respectives m , mj et mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A , B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

INDICE

Utiliser $1 + j = -j^2$ et $j^3 = 1$.

II 2-b) — 0,25 pts

Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

II 2-c) 0,5 pts

En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

INDICE

Retrancher $p\left(1+j+j^2\right)=0$ à la relation de II 2-b pour obtenir $\dfrac{q-p}{r-p}$.

Exercice 3 — 3 pts

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

1-a) — 0,25 pts

Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n \ [p]$

1-b) — 0,25 pts

Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

INDICE

Raisonner par l'absurde et utiliser : si un nombre premier divise a^n, il divise a.

1-c) — 0,25 pts

En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \ [p]$

2- — 0,5 pts

Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3-a) — 0,5 pts

3- On suppose que n est impair.

Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

INDICE

Montrer que n et $p-1$ sont premiers entre eux, puis appliquer le théorème de Bézout.

3-b) — 0,25 pts

Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

3-c) — 0,5 pts

On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

3-d) — 0,5 pts

Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

INDICE

Calculer $(x+1)^{nr}$ et x^{nr} modulo p de deux façons, avec $nr = 1 + (p-1)v'$.

Exercice 4 — 3,5 pts

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

1-a) — 0,25 pts

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

1-b) — 0,25 pts

Vérifier que pour tout a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$

1-c) — 0,5 pts

Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- — 0,5 pts

Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ \varphi(M(a,b)) = \left| a^2 - 3b^2 \right|$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

INDICE

Développer $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2$ et le factoriser.

3-a) — 0,25 pts

3- Soit $M(a,b) \in E$

Montrer que $M(a,b) \times M(a,-b) = (a^2 - 3b^2).I$

3-b) — 0,5 pts

Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

3-c) — 0,5 pts

On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse.

INDICE

Montrer que $a^2 - 3b^2 = -1$ est impossible en raisonnant modulo 3, puis utiliser 3-a.

4-a) — 0,25 pts

Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

4-b) 0,25 pts

En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

4-c) 0,25 pts

Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2022