BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2021

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2021-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2021	Session de rattrapage	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse .....(8 pts)
- L'exercice2 se rapporte à l'analyse .....(4 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux nombres complexes.....(4 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'arithmétique .....(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 8 pts

Partie I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1-x)$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) 1-a) — 0,25 pts

Montrer que la fonction f est continue sur I

I) 1-b) — 0,25 pts

Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

I) 1-c) — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

I) 1-d) — 0,5 pts

Interpréter graphiquement les résultats obtenus

I) 1-e) — 0,25 pts

Donner le tableau de variations de f

I) 2-a) — 0,25 pts

Montrer que la courbe (C) est concave.

I) 2-b) — 0,25 pts

Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) 3-a) — 0,25 pts

Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

I) 3-b) — 0,25 pts

Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

I) 3-c) — 0,25 pts

Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

II) 1) 0,5 pts

Partie II- Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que :

$$P_n(x_n) = 1$$

II) 2) 0,5 pts

Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

II) 3-a) 0,5 pts

Montrer que : pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

II) 3-b) 0,5 pts

En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

II) 3-c) 0,25 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in]0,\alpha]$

II) 3-d) 0,25 pts

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

II) 4-a) 0,5 pts

4- pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

Montrer que : $(\forall x \in I)$; $(\forall n \geq 2) \quad f_n'(x) = \frac{-x^n}{1-x}$

II) 4-b) 0,25 pts

Montrer que : $(\forall x \in [0,\alpha])$; $(\forall n \geq 2) \quad |f_n'(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

II) 4-c) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall x \in [0,\alpha])$; $(\forall n \geq 2) \quad |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

II) 4-d) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

II) 4-e) 0,5 pts

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice 2 — 4 pts

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}\,dt$

1-a) — 0,5 pts

Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1-b) — 1 pts

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

2-a) — 0,5 pts

En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}dx$$

INDICE

Intégrer par parties avec $u(x) = F(x)$ et $v'(x) = 1$, en choisissant la primitive $v(x) = x - 1$ (et non x).

2-b) — 0,5 pts

Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3-a) — 0,5 pts

3- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

Vérifier que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$$

3-b) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} F\left(\frac{k}{n}\right)$

3-c) — 0,5 pts

En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 — 4 pts

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2-(m-i)z-im=0$$

1-a) — 0,5 pts

Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+i)^2$

1-b) — 0,5 pts

Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

1-c) — 0,75 pts

Sachant que $m=e^{i\frac{\pi}{8}}$; écrire le nombre z_1+z_2 sous forme exponentielle.

INDICE

Écrire $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et factoriser $e^{ia}+e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$.

2-a) — 0,5 pts

2- On considère les points A , B et M d'affixes respectifs 2 , $-i$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.

Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

2-b) — 0,75 pts

Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme.

2-c) — 1 pts

Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\mathrm{Re}\left((2-i)m\right)=\mathrm{Re}\left(m^2\right)$

INDICE

Deux vecteurs non nuls d'affixes z et w sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{w}{z}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire $\mathrm{Re}\left(w\,\overline{z}\right)=0$.

Exercice 4 — 4 pts

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1-a) — 1 pts

Montrer que $a^7 \equiv 1\ [p]$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $a^{7n} \equiv 1\ [p]$

1-b) — 1 pts

Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad ; \quad a^{(p-1)m} \equiv 1\ [p]$$

2-a) — 0,5 pts

2- On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$

Montrer que : $a \equiv 1\ [p]$

INDICE

Comme 7 est premier, $7 \wedge (p-1) = 1$. Chercher u et v naturels tels que $7u = 1 + (p-1)v$, puis calculer a^{7u} de deux façons.

2-b) — 0,5 pts

En déduire que : $p = 7$

3) — 1 pts

Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1\ [7]$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2021