BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2021

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/examens/2021-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2021	Session normale	Examen national	4h	9	20 pts (barème officiel)

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse .....(12 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(4 pts)
- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique .....(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 — 12 pts

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

I 1-a) — 0,5 pts

Partie I :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

INDICE

Réduire $f_n(x) - nx + 2$ au même dénominateur.

I 1-b) — 0,5 pts

Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

I 2-a) — 0,5 pts

Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

I 2-b) — 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

INDICE

Comparer $4e^x$ et $(1+e^x)^2$ en développant.

I 2-c) — 0,5 pts

En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)

I 3-a) — 0,5 pts

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0

I 3-b) — 0,5 pts

Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

INDICE

Dériver $x \mapsto \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$ et étudier le signe de f_n''.

I 4- 0,5 pts

Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2).

I 5-a) 0,5 pts

5- Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

INDICE

Utiliser $f_n(x) - (nx - 2) = \dfrac{2}{1 + e^x} = \dfrac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, de la forme $-2\dfrac{u'}{u}$.

I 5-b) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t)$

II 1-a) 0,5 pts

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f_0(u_n)$

Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

INDICE

Étudier la fonction $g : x \mapsto f_0(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

II 1-b) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

II 2-a) 0,5 pts

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

INDICE

Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_0 entre u_n et α.

II 2-b) 0,5 pts

En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

II 2-c) 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α

III 1-a) 0,5 pts

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

III 1-b) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$

(On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1.47$)

III 2-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

III 2-b) 0,5 pts

En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

III 2-c) 0,5 pts

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

III 3-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

INDICE

Écrire $f_n(x_n) = 0$ sous la forme $nx_n = h(x_n)$ avec $h(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$, puis utiliser la monotonie de h sur $[0, 1]$.

III 3-b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$

III 4-a) 0,5 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

III 4-b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$

Exercice 2 — 4 pts

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b \neq c$

1-a) — 0,5 pts

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

(E) : $z^2-(a+b+c)z+c(a+b)=0$

INDICE

Chercher deux nombres dont la somme vaut $a+b+c$ et le produit $c(a+b)$.

1-b) — 0,5 pts

On suppose dans cette question que : $a=i$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c=a-b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

INDICE

Factoriser $e^{i\theta}\pm e^{i\varphi}$ par $e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$.

2-a) — 1 pts

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

Montrer que : $2p=b+a+(a-b)i$ et $2q=c+a+(c-a)i$

INDICE

L'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

2-b) — 0,5 pts

Calculer : $\frac{p-d}{q-d}$

2-c) — 0,5 pts

En déduire la nature du triangle PDQ

3-a) — 0,5 pts

3- Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$

Montrer que l'affixe de K est $k=a+\frac{i}{2}(c-b)$

3-b) 0,5 pts

Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

INDICE

Montrer que $\frac{k-p}{k-q} \times \frac{d-q}{d-p}$ est un réel, ou que $DPKQ$ est un carré.

Exercice 3 — 4 pts

I 1- — 0,25 pts

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

I 2- — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

INDICE

Soustraire membre à membre $47x - 43y = 1$ et $47 \times 11 - 43 \times 12 = 1$, puis appliquer le théorème de Gauss.

II 1-a) — 0,5 pts

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4\ [43]$

1- Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$

II 1-b) — 0,5 pts

Montrer que : $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$

II 2- — 0,5 pts

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F)

III 1-a) — 0,5 pts

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4\ [43] \\ x^{47} \equiv 10\ [47] \end{cases}$

1- Soit x une solution du système (S)

Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$

III 1-b) — 0,5 pts

En déduire que : $x \equiv 527\ [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

INDICE

Avec la solution $(11, 12)$ de (E), remarquer que $527 = 11 + 43 \times 12 = 10 + 47 \times 11$.

III 2- — 0,5 pts

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences mathématiques A et B, option française · 2021